Локальная классификация геометрических величин на плоскости Лобачевского

Н. Г. КОНОВЕНКО
Одесская национальная академия пищевых технологий
e-mail: konovenko@ukr.net

УДК 514.132

Ключевые слова: плоскость Лобачевского, геометрические величины, дифференциальные инварианты, изометрии.

Аннотация

В работе описываются локальные структуры геометрических величин на плоскости Лобачевского. Это описание содержит как линейные, например тензоры, так и нелинейные геометрические величины и существенным образом используется при нахождении базисных дифференциальных инвариантов.

Abstract

N. G. Konovenko, On local classification of geometrical quantities on the Lobachevski plane, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 55—59.

In this paper, we study the local structure of geometrical quantities on the Lobachevski plane. This structure is used for the description of metric differential invariants on the Lobachevski plane.

1. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-действие на плоскости Лобачевского

В стандартной модели геометрия Лобачевского реализуется на верхней полуплоскости $\mathbf{L}^2$ с метрикой

$$\Theta = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Группа движений плоскости Лобачевского изоморфна группе Ли $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R})$, а её алгебра Ли порождена векторными полями

$$\begin{aligned} A &= \partial_x, \\ B &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \\ H &= 2x\partial_x + 2y\partial_y, \end{aligned}$$

удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[H, A] = -2A, \quad [H, B] = 2B, \quad [A, B] = H.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 55—59.

Под однородным расслоением над плоскостью Лобачевского мы понимаем расслоение
$$\pi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}^2,$$
где $\pi\colon (u,x,y) \mapsto (x,y)$, в которое поднято $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-действие. Иначе говоря, в тотальном пространстве расслоения π указаны векторные поля $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{H}$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$
$$[\bar{H},\bar{A}] = -2\bar{A}, \quad [\bar{H},\bar{B}] = 2\bar{B}, \quad [\bar{A},\bar{B}] = \bar{H}$$
и такие, что
$$\pi_*(\bar{A}) = A, \quad \pi_*(\bar{B}) = B, \quad \pi_*(\bar{H}) = H.$$
Геометрической величиной на плоскости Лобачевского называется гладкое сечение однородного $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-расслоения. Размерностью геометрической величины называется размерность соответствующего однородного расслоения.

2. Локальная классификация геометрических величин

Предположим, что векторные поля в рассматриваемой области порождают гладкое распределение $\mathfrak{P}$ размерности r. В данном случае векторные поля A и B линейно независимы, поэтому векторные поля $\bar{A}$, $\bar{B}$ также линейно независимы. Следовательно, $r = \dim\mathfrak{P}$ может принимать только два значения: $r = 2$ или $r = 3$. В любом из этих случаев мы можем выбрать координаты $(u, w^2, \ldots, w^m, x, y)$ в расслоении π так, чтобы $w^2, \ldots, w^m$ были первыми интегралами для векторных полей $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{H}$, а функция u дополнительно являлась первым интегралом векторных полей $\bar{A}$ и $\bar{H}$.

Действительно, это очевидно в случае, когда $r = 2$, поскольку тогда функция u может быть выбрана как первый интеграл векторных полей $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{H}$. Если же $r = 3$, то на трёхмерных многообразиях $w^2 = \ldots = w^m = \mathrm{const}$ векторные поля $\bar{A}$ и $\bar{H}$ определяют двумерное распределение, которое вполне интегрируемо в силу коммутационного соотношения $[\bar{H},\bar{A}] = -2\bar{A}$. Функция u может быть выбрана как первый интеграл этого распределения. При таком выборе координат представление примет вид
$$\begin{aligned} &\bar{A} = \partial_x, \\ &\bar{B} = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y + yb(x,y,u,w)\partial_u, \\ &\bar{H} = 2x\partial_x + 2y\partial_y. \end{aligned}$$

Из коммутационных соотношений следует, что функция b имеет вид
$$b(x,y,u,w) = y\tilde{b}(u,w).$$

Отметим также, что если $r = 2$, или, иначе говоря, если размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-орбит в расслоении π равны 2, то $\tilde{b}(u,w) \equiv 0$. Если же размерности

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-орбит в расслоении π равны 3, то $\tilde{b}(u,w) \neq 0$ и заменой переменных вида

$$(u,w) \mapsto \big(U(u), W(u,w)\big)$$

векторное поле $\tilde{b}\partial_u$ может быть выпрямлено.

Суммируя сказанное, приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Действие алгебры Ли изометрий плоскости Лобачевского в однородном $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-расслоении локально эквивалентно одному из следующих*:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \partial_x, \\ \bar{B} &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \\ \bar{H} &= 2x\partial_x + 2y\partial_y, \end{aligned}$$

если размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-орбит в расслоении π равны 2,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \partial_x, \\ \bar{B} &= (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y + y\partial_u, \\ \bar{H} &= 2x\partial_x + 2y\partial_y, \end{aligned}$$

если размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-орбит в расслоении π равны 3.

3. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-действия на геометрических величинах

Рассмотрим векторное поле $\nabla = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$ на плоскости Лобачевского, и пусть

$$\bar{\nabla} = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y + \sum_{i=1}^{m} A_i(x,y,u)\partial_{u^i} \text{ —}$$

его поднятие в расслоение геометрических величин. Обозначим через φ_t однопараметрическую группу сдвигов вдоль векторного поля ∇, а через $\bar{\varphi}_t$ — группу сдвигов вдоль $\bar{\nabla}$. Тогда каждая геометрическая величина

$$s\colon \mathbb{R}^m \times \mathbf{L}_2 \to \mathbf{L}_2$$

определяет путь s_t в пространстве геометрических величин

$$s_t = \bar{\varphi}_{-t} \circ s \circ \varphi_t.$$

Скорость изменения

$$\nabla(s) \overset{\text{def}}{=} \dot{s}(0)$$

мы называем действием ∇ на геометрическую величину s. Несложно проверить, что

$$\nabla(s) = as_x + bs_y - A(x,y,s).$$

Используя предыдущую теорему и эту формулу, мы получаем следующие нормальные формы $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-действий на геометрических величинах.

Теорема 2. *Действие алгебры Ли изометрий плоскости Лобачевского на геометрических величинах локально эквивалентно следующему:*

$$\begin{aligned} &A(s) = s_x, \\ &B(s) = (x^2 - y^2)s_x + 2xys_y, \\ &H(s) = 2xs_x + 2ys_y, \end{aligned} \tag{1}$$

если размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-орбит в расслоении π равны 2,

$$\begin{aligned} &A(s) = s_x, \\ &B(s) = (x^2 - y^2)s_x + 2xys_y - y, \\ &H(s) = 2xs_x + 2ys_y, \end{aligned} \tag{2}$$

если размерности $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$-орбит в расслоении π равны 3.

4. Примеры

В качестве примеров геометрических величин мы рассмотрим тензоры на плоскости Лобачевского с $\mathfrak{sl}_2$-действием, определяемым производной Ли.

4.1. Функции

Пусть $s = s(x, y)$ — гладкая функция на плоскости Лобачевского и

$$\nabla(s) \overset{\text{def}}{=} L_\nabla(s) = as_x + bs_y.$$

В этом случае поднятие $\bar{\nabla}$ имеет вид

$$\bar{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y,$$

где $A = 0$. Это действие совпадает с (1).

4.2. Векторные поля

Пусть $s = s_1\partial_x + s_2\partial_y$ — векторное поле на плоскости Лобачевского и

$$\nabla(s) \overset{\text{def}}{=} L_\nabla(s) = (as_{1,x} - s_1a_x + bs_{1,y} - a_ys_2)\partial_x + (as_{2,x} - s_1b_x + bs_{2,y} - b_ys_2)\partial_y.$$

Если записать векторное поле s в виде столбца

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

то указанное действие примет вид

$$\nabla(s) = \begin{pmatrix} as_{1,x} + bs_{1,y} \\ as_{2,x} + bs_{2,y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Соответственно, поднятие векторного поля $\bar{\nabla}$ имеет вид

$$\bar{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y + (a_x u_1 + a_y u_2)\partial_{u_1} + (b_x u_1 + b_y u_2)\partial_{u_2}.$$

Очевидно, что длина вектора $|s|^2 = y^{-2}(s_1^2 + s_2^2)$ является инвариантом $\mathfrak{sl}_2$-действий, а поэтому размерность $\mathfrak{sl}_2$-орбит в касательном расслоении равна 3. Таким образом, $\mathfrak{sl}_2$-действие, задаваемое производной Ли (4), локально эквивалентно (2).

4.3. Дифференциальные 1-формы

Пусть теперь $s = s_1 dx + s_2 dy$ — дифференциальная 1-форма на плоскости Лобачевского, а действие, как и выше, даётся производной Ли:

$$\nabla(s) \stackrel{\text{def}}{=} L_\nabla(s) = (as_{1,x} + bs_{1,y} + a_x s_1 + b_x s_2)\, dx + (as_{2,x} + bs_{2,y} + a_y s_1 + b_y s_2)\, dy.$$

Записав дифференциальную 1-форму s в виде столбца (3), мы получаем следующую форму действия:

$$\nabla(s) = \begin{pmatrix} as_{1,x} + bs_{1,y} \\ as_{2,x} + bs_{2,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, поднятие векторного поля $\bar{\nabla}$ имеет вид

$$\bar{\nabla} = a\partial_x + b\partial_y - (a_x u_1 + b_x u_2)\partial_{u_1} - (a_y u_1 + b_y u_2)\partial_{u_2}.$$

Соответствующее $\mathfrak{sl}_2$-действие также сохраняет длину дифференциальной формы $|s|^2 = y^2(s_1^2 + s_2^2)$. Поэтому размерность $\mathfrak{sl}_2$-орбит в кокасательном расслоении равна 3, а фундаментальное $\mathfrak{sl}_2$-действие локально эквивалентно (2).

Литература

[1] Коновенко Н. Г. Классификация многомерных геометрических величин для геометрий Лобачевского и де Ситтера // Тезисы докл. Междунар. конф., посвящённой 100-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева. — Тверь: Тверской гос. ун-т, 2009. — С. 12—13.

[2] Коновенко Н. Г., Лычагин В. В. Алгебры дифференциальных инвариантов в геометриях Лобачевского и де Ситтера // ДАН Украины. — 2010. — № 1.