Об условиях совпадения кривизн 1-го и 2-го типов на распределении плоскостей

О. М. ОМЕЛЬЯН
Российский государственный университет им. И. Канта
e-mail: olga_omelyan2002@mail.ru

УДК 514.76

Ключевые слова: распределение плоскостей, главное расслоение, оснащение, инвариант, связность, тензор кривизны.

Аннотация

В многомерном проективном пространстве рассмотрено распределение плоскостей. Построены кривизны 1-го и 2-го типов групповых связностей, индуцированных композиционным оснащением распределения плоскостей. Найдены условия совпадения этих кривизн. Произведено внутреннее композиционное оснащение распределения плоскостей. Доказано, что это оснащение индуцирует в главном расслоении внутренние кривизны 1-го и 2-го типов.

Abstract

O. M. Omelyan, On conditions of the coincidence of curvatures of the first and second types on distribution of planes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 61—66.

We consider distributions of planes in a multidimensional projective space and construct the curvatures of the first and second types of group connections induced by composite equipments of the distributions. Conditions of the coincidence of these curvatures are found. An internal composite equipment of a distribution of planes is performed. We prove that this equipment induces the internal curvatures of the first and second types in the principal fiber bundle.

В работе индексы принимают следующие значения: $I, \ldots = \overline{1, n}$, $i, \ldots = \overline{1, m}$, $a, \ldots = \overline{m+1, n}$.

1. В n-мерном проективном пространстве P_n будем рассматривать распределение NS_n [1,2] m-мерных центрированных плоскостей P^*_m, которое определяется структурными уравнениями $\omega^a_i = \Lambda^a_{iJ}\omega^J$, причём компоненты фундаментального объекта 1-го порядка распределения удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Lambda^a_{ij} = \tilde{\Lambda}^a_{ijK}\omega^K, \quad \Delta\Lambda^a_{ib} - \Lambda^a_{ij}\omega^j_b - \delta^a_b\omega_i = \Lambda^a_{ibK}\omega^K,$$
$$\Delta\Lambda^a_{ij} = d\Lambda^a_{ij} - \Lambda^a_{kj}\omega^k_i - \Lambda^a_{ik}\omega^k_j + \Lambda^b_{ij}\omega^a_b.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 61—66.

С распределением NS_n ассоциируется главное расслоение [2] $G(U_n)$, базой которого является область U_n проективного пространства P_n, описанная центром плоскости P^*_m. В этом расслоении способом Г. Ф. Лаптева (точнее, приёмом Ю. Г. Лумисте) [4] задана групповая связность с помощью формы $\tilde{\omega} = \omega - \Gamma_K \omega^K$, причём

$$\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}^i_j, \tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}^a_b, \tilde{\omega}^i_a, \tilde{\omega}_a\}.$$

Компоненты объекта связности

$$\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ia}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^a_{bc}, \Gamma^i_{aj}, \Gamma^i_{ab}, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ab}\}$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям [2], в частности,

$$\begin{gathered}
\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkI}\omega^I, \quad \Delta\Gamma^i_{ja} - \Gamma^i_{jk}\omega^k_a + \omega^i_{ja} = \Gamma^i_{jaI}\omega^I, \\
\Delta\Gamma_{ij} + \Gamma^k_{ij}\omega_k + \omega_{ij} = \Gamma_{ijJ}\omega^J, \quad \Delta\Gamma_{ia} + \Gamma_{ij}\omega^j_a + \Gamma^j_{ia}\omega_j + \omega_{ia} = \Gamma_{iaJ}\omega^J, \\
\Delta\Gamma^a_{bi} + \omega^a_{bi} = \Gamma^a_{biJ}\omega^J, \quad \Delta\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{bi}\omega^i_c - \omega^a_{bc} = \Gamma^a_{bcI}\omega^I, \ldots .
\end{gathered} \tag{1}$$

Объект групповой связности Γ содержит ряд подобъектов [2]. Определён объект кривизны $R = \{R^i_{jkl}, R^i_{jka}, R^i_{jab}, \ldots\}$ групповой связности Γ, компоненты которого выражаются [2] через компоненты объекта Γ и их пфаффовы производные: например,

$$\begin{gathered}
R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^i_{ja}\Lambda^a_{[kl]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{sl]}, \quad R^i_{jab} = \Gamma^i_{j[ab]} - \Gamma^k_{j[a}\Gamma^i_{kb]}, \\
R^i_{jka} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jka} - \Gamma^i_{jak} - \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka}) - \Gamma^l_{j[k}\Gamma^i_{la]},
\end{gathered} \tag{2}$$

причём альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках, поэтому $R^i_{j(kl)} = 0$, $R^i_{j(ab)} = 0$. Объект кривизны R связности Γ является тензором и содержит ряд подтензоров, соответствующих подобъектам объекта связности Γ.

2. Ранее [3, 4] было произведено композиционное оснащение распределения NS_n, состоящее в задании на нём аналогов плоскостей Картана и нормалей 2-го рода Нордена, а именно

$$C_{n-m-1}\colon P^*_m \oplus C_{n-m-1} = P_n, \quad N_{m-1}\colon A \oplus N_{m-1} = P^*_m,$$

причём оснащающие плоскости определены совокупностями точек

$$B_a = A_a + \lambda^i_a A_i + \lambda_a A, \quad B_i = A_i + \lambda_i A.$$

Объект $\lambda = \{\lambda^i_a, \lambda_a, \lambda_i\}$ является оснащающим квазитензором, содержащим три подквазитензора λ^i_a, $\{\lambda^i_a, \lambda_a\}$ и λ_i. Выражения для дифференциалов точек B_a и B_i имеют вид

$$\begin{aligned}
dB_a &= (\ldots)^b_a B_b + t^i_{aJ}\omega^J B_i + (t_{aI} - \lambda_i t^i_{aI})\omega^I A, \\
dB_i &= (\ldots)^j_i B_j + (\ldots)^a_{iI}\omega^I B_a + t_{iJ}\omega^J A,
\end{aligned}$$

где компоненты тензора $t = \{t^i_{aJ}, t_{aI}, t_{iJ}\}$ неспециальных смещений [3] являются функциями от фундаментального объекта 1-го порядка Λ^1 распределения

NS_n, оснащающего квазитензора λ и совокупности его пфаффовых производных $\lambda' = \{\lambda^i_{aJ}, \lambda_{aI}, \lambda_{iJ}\}$, а именно

$$\begin{aligned} t^i_{aj} &= \lambda^i_{aj} - \Lambda^b_{kj}\lambda^i_b\lambda^k_a + \delta^i_j\lambda_a, \\ t_{ij} &= \lambda_{ij} + \Lambda^a_{ij}(\lambda^k_a\lambda_k - \lambda_a) - \lambda_i\lambda_j, \\ t_{ai} &= \lambda_{ai} - \Lambda^b_{ji}\lambda^j_a\lambda_b, \dots . \end{aligned} \tag{3}$$

Тензор t содержит ряд простейших, простых и составных подтензоров, причём равенство нулю тензора t геометрически означает неподвижность пары плоскостей (C_{n-m-1}, P_{n-1}), где P_{n-1} представляет собой гиперплоскость Бортолотти, натянутую на плоскость Картана C_{n-m-1} и нормаль 2-го рода Нордена N_{m-1}, а именно $P_{n-1} = [B_a, B_i]$.

3. В [3] было доказано, что распределение NS_n и его композиционное оснащение индуцируют в расслоении $G(U_n)$ групповые связности 1-го и 2-го типов $\overset{01}{\Gamma}$ и $\overset{02}{\Gamma}$, с компонентами, определяемыми, в частности, по формулам

$$\begin{gathered} \overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\lambda^i_a - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j, \quad \overset{01}{\Gamma}{}_{ij} = \Lambda^a_{ij}\lambda_a - \lambda_i\lambda_j, \\ \overset{02}{\Gamma}{}_{ij} = \lambda_{ij} + \Lambda^a_{ij}\lambda^k_a\lambda_k - 2\lambda_i\lambda_j, \dots . \end{gathered} \tag{4}$$

Построим кривизны 1-го типа и 2-го типов, порождённые групповыми связностями 1-го и 2-го типов. Для этого сначала найдём охваты пфаффовых производных объекта Γ. Используя дифференциальные уравнения (1) для компонент объекта связности и выражения охватов (4) для 1-го и 2-го типов связностей, получим, что пфаффовы производные объекта Γ охватываются следующим образом:

$$\begin{gathered} \overset{01}{\Gamma}{}_{ijk} = (\Lambda^a_{jkl} + \Lambda^a_{jb}\Lambda^b_{kl})\lambda^i_a + \Lambda^a_{jk}\lambda^i_{al} - \delta^i_j\lambda_{kl} - \delta^i_k\lambda_{jl}, \\ \overset{02}{\Gamma}{}_{ijk} = (\Lambda^a_{ijk} + \Lambda^a_{ib}\Lambda^b_{jk})\lambda^l_a\lambda_l + \lambda_{ijk} + \Lambda^a_{ij}(\lambda^l_{ak}\lambda_l + \lambda^l_a\lambda_{lk}) - 2\lambda_{ik}\lambda_j - 2\lambda_i\lambda_{jk}, \dots . \end{gathered} \tag{5}$$

Возвращаясь к формулам (2), определяющим тензор кривизны R, видим, что для получения выражений охватов компонент тензора R необходимо

1) найти альтернации соответствующих пфаффовых производных (5) объекта Γ, учитывая симметрию компонент фундаментального объекта 2-го порядка распределения и симметрию пфаффовых производных 2-го порядка $\{\lambda_{iJK}, \lambda^i_{aJK}, \lambda_{aIJ}\}$ оснащающего квазитензора по двум последним индексам;
2) вычислить свёртки соответствующих компонент объекта Γ и фундаментального объекта, а также найти альтернированные свёртки соответствующих компонент объекта связности.

Таким образом, выражения охватов для тензоров кривизны 1-го и 2-го типов имеют следующий вид [5, 6]:

$$
\begin{aligned}
&\overset{01}{R}{}^i_{jkl} = \Lambda^a_{j[k} t^i_{al]} - \delta^i_j t_{[kl]} - \delta^i_{[k} t_{jl]}, \quad \overset{01}{R}_{ijk} = \Lambda^a_{i[j} t_{ak]} - t_{i[k}\lambda_{j]} - \lambda_i t_{[jk]},\\
&\overset{02}{R}_{ijk} = \overset{0}{R}{}^{\,l}_{ijk}\lambda_l - \Lambda^a_{[jk]}\lambda_{ia}, \quad \overset{02}{R}{}^i_{ajk} = \overset{0}{R}{}^{\,b}_{ajk}\lambda^i_b - \overset{0}{R}{}^{\,i}_{ljk}\lambda^l_a - \Lambda^b_{[jk]}\lambda^i_{ab}, \dots .
\end{aligned} \tag{6}
$$

Выражения охватов для остальных компонент тензоров кривизны определяются по формулам, аналогичным (6), но имеют более громоздкий вид.

Замечание. Охваты компонент тензора кривизны 1-го типа представляют собой функции компонент тензора неспециальных смещений t, оснащающего квазитензора λ и фундаментального объекта 1-го порядка Λ^1 распределения.

Теорема 1. *Неподвижность плоскости Картана и гиперплоскости Бортолотти* $(t = 0)$ *влечёт обращение в нуль тензора кривизны 1-го типа.*

Теорема 2. *В случае голономного распределения неподвижность плоскости Картана и гиперплоскости Бортолотти* $(t = 0)$ *влечёт обращение в нуль тензора кривизны 2-го типа.*

В [3] найдены аналитические и геометрические условия совпадения связностей 1-го и 2-го типа:

$$
\overset{01}{\Gamma} = \overset{02}{\Gamma} \iff t_{iJ} = 0,\ t^i_{aJ} = 0,\ t_{aI} = 0,
$$

$$
\overset{01}{\Gamma} = \overset{02}{\Gamma} \iff C_{n-m-1} = \mathrm{const},\ N_{m-1} + dN_{m-1} \subset P_{n-1}.
$$

Теорема 3. *Совпадение групповых связностей 1-го и 2-го типов эквивалентно неподвижности плоскости Картана и подчинённости нормализации 2-го рода оснащению Бортолотти, т. е. неподвижности пары плоскостей, а именно плоскости Картана и гиперплоскости Бортолотти.*

Аналогично найдены аналитические и геометрические условия совпадения кривизн 1-го и 2-го типов этих связностей:

$$
\overset{01}{R} = \overset{02}{R} \iff \Lambda^a_{[ij]} = 0,\ t_{aI} - t^i_{aI}\lambda_i = 0,
$$

$$
\overset{01}{R} = \overset{02}{R} \iff S_n, C_{n-m-1} + dC_{n-m-1} \subset P_{n-1}.
$$

Теорема 4. *Совпадение кривизн 1-го и 2-го типов равносильно голономности распределения и подчинённости оснащения Картана оснащению Бортолотти.*

Из теорем 3 и 4 вытекает следующая теорема [5].

Теорема 5. *В случае голономного распределения совпадение связностей 1-го и 2-го типов влечёт совпадение кривизн этих связностей, но не наоборот.*

4. Будем предполагать, что существует нетривиальный относительный инвариант I, построенный из компонент фундаментального подобъекта 1-го порядка $\{\Lambda^a_{ij}\}$, т. е. $I = I(\Lambda^a_{ij})$, дифференциальные уравнения которого имеют вид [6]

$$
d \ln I = 2(n - m)\omega^i_i - m\omega^a_a + I_K \omega^K .
$$

К распределению плоскостей присоединим подобъект 1-го порядка $\{V_a^{ij}\}$, компоненты которого являются частными производными логарифма инварианта по компонентам фундаментального подобъекта Λ_{ij}^a:

$$V_a^{ij} = \frac{\partial \ln I}{\partial \Lambda_{ij}^a}.$$

Этот объект является тензором [6], и мы будем называть его обращённым тензором 1-го порядка распределения NS_n.

Целью этого пункта является построение внутренних кривизн 1-го и 2-го типов, порождённых только фундаментальным объектом и обращённым тензором 1-го порядка распределения. Для решения этой задачи нам необходимо охватить оснащающий квазитензор λ, т. е. представить его в виде функции $\lambda = \lambda(\Lambda, V)$. В [6] были найдены охваты компонент квазитензора λ и его пфаффовых производных λ' с помощью фундаментального объекта и его обращённого подобъекта:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i = \frac{1}{n-m-1}\left(\frac{1}{n-m}\Lambda_{ij}^a \Lambda_{ka}^b V_b^{kj} - \Lambda_{ia}^a\right),\\
&\lambda_a^i = \frac{1}{n-m}\left[\frac{1}{n-m-1}V_a^{ji}\left(\Lambda_{jb}^b - \frac{1}{n-m}\Lambda_{jk}^b \Lambda_{lb}^c V_c^{lk}\right) - \Lambda_{ja}^b V_b^{ji}\right],\\
&\lambda_a = \frac{1}{m}(\Lambda_{ki}^b \lambda_a^k \lambda_b^i - \lambda_{ai}^i),\\
&\lambda_{iJ} = -\frac{1}{n-m-1}\left(\Lambda_{iaJ}^a - \frac{1}{n-m}\Lambda_{ij}^a V_b^{kj} \Lambda_{kaJ}^b\right),\\
&\lambda_{aJ}^i = -\frac{1}{n-m}(V_b^{ji}\Lambda_{jaJ}^b + V_a^{ji}\lambda_{jJ}).
\end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя выражения охватов (7) в формулы охватов (6) и им аналогичные для кривизн 1-го и 2-го типов, получаем выражения охватов для внутренних кривизн 1-го и 2-го типов распределения плоскостей, которые имеют достаточно громоздкий вид.

Теорема 6. *Распределение NS_n и его внутреннее композиционное оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении $G(U_n)$ внутренние кривизны 1-го и 2-го типов.*

Литература

[1] Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1971. — Т. 3. — С. 49—94.

[2] Омельян О. М. Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2002. — Т. 33. — С. 74—78.

[3] Омельян О. М. Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей // Междунар. конф. по геометрии и анализу. — Пенза, 2003. — С. 63—69.

[4] Омельян О. М. Пучки связностей 1-го и 2-го типов, индуцированные композиционным оснащением распределения плоскостей // Движения в обобщённых пространствах. — Пенза, 2005. — С. 94—101.

[5] Омельян О. М. О совпадении кривизн 1-го и 2-го типов на распределении плоскостей // Тезисы докладов междунар. конф. «Лаптевские чтения—2009». — Тверь, 2009. — С. 23.

[6] Омельян О. М. Внутренние групповые связности на распределении // Вестник ЧПГУ им. И. Я. Яковлева. — 2006. — № 5 (52). — С. 120—125.