Геометрия квазилинейной системы двух дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка при двух функциях от двух независимых переменных

Л. Н. ОРЛОВА
Московский государственный строительный университет
e-mail: dpp@mgsu.ru

УДК 514.763.8

Ключевые слова: квазилинейная дифференциальная система, характеристика, структурные уравнения Ли—Картана, законы сохранения.

Аннотация

В работе изучается геометрия системы двух дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков при двух функциях от двух независимых переменных; при этом используется метод инвариантных форм Э. Картана, а также теоретико-групповой метод «продолжений и охватов» Г. Ф. Лаптева (для конечных групп) и А. М. Васильева (для бесконечных групп). В статье приведена классификация систем квазилинейных уравнений первого и второго порядков при двух функциях u и v от двух независимых переменных x и y.

Abstract

L. N. Orlova, The geometry of a quasilinear system of two partial differential equations containing the first and second partial derivatives of two functions in two independent variables, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 67—84.

The geometry of a system of two partial differential equations containing the first and second partial derivatives of two functions in two independent variables is studied by using the Cartan method of invariant forms and the group-theoretic method of extensions and enclosings due to G. F. Laptev (for finite groups) and A. M. Vasil'ev (for infinite groups). Systems of quasilinear equations with the first and second partial derivatives of two functions u and v in two independent variables x and y are classified.

Условие задачи

Пусть дана система двух дифференциальных уравнений с частными производными при двух функциях $(u,\ v)$ от двух независимых переменных $(x,\ y)$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 67—84.

Пусть одно уравнение первого, другое — второго порядка. Уравнения заданы в общем виде

$$\begin{cases} F(x,y,u,v,u_x,u_y,v_x,v_y)=0, \\ \Phi(x,y,u,v,u_x,u_y,v_x,v_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},v_{xx},v_{xy},v_{yy})=0. \end{cases} \tag{1}$$

(см. [12]). Изучается геометрия этой системы дифференциальных уравнений, т. е. согласно общей схеме Клейна *свойства совокупности интегральных многообразий этой системы, инвариантные относительно преобразований бесконечной группы точечных преобразований*

$$\begin{cases} x'=f_1(x,y,u,v), \\ y'=f_2(x,y,u,v), \\ u'=f_3(x,y,u,v), \\ v'=f_4(x,y,u,v), \end{cases} \tag{2}$$

и проводится классификация этих систем.

Изучение ведётся при помощи метода внешних форм Картана [6, 7, 14] и теории погружённых многообразий Г. Ф. Лаптева [8] *для конечных групп* и А. М. Васильева [4, 5] *для бесконечных*.

Для изучения геометрии данных дифференциальных уравнений нам необходимо найти представление соответствующей бесконечной группы, которое показывает, как эта группа преобразует все входящие в уравнения переменные. А именно, группа (2) преобразует переменные, входящие в уравнения (1), по формулам (2), дополненным уравнениями

$$\begin{cases} u'_x=\dfrac{\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_3}{\partial u}u_x+\frac{\partial f_3}{\partial v}v_x\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial u}u_y+\frac{\partial f_2}{\partial v}v_y\right)}{A}- \\ \qquad -\dfrac{\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial u}u_y+\frac{\partial f_3}{\partial v}v_y\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial u}u_x+\frac{\partial f_2}{\partial v}v_x\right)}{A}, \\ u'_y=\dfrac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial u}u_x+\frac{\partial f_1}{\partial v}v_x\right)\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial u}u_y+\frac{\partial f_3}{\partial v}v_y\right)}{A}- \\ \qquad -\dfrac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial u}u_y+\frac{\partial f_1}{\partial v}v_y\right)\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_3}{\partial u}u_x+\frac{\partial f_3}{\partial v}v_x\right)}{A}, \\ A=\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+\dfrac{\partial f_1}{\partial u}u_x+\dfrac{\partial f_1}{\partial v}v_x\right)\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2}{\partial u}u_y+\dfrac{\partial f_2}{\partial v}v_y\right)- \\ \qquad -\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}+\dfrac{\partial f_1}{\partial u}u_y+\dfrac{\partial f_1}{\partial v}v_y\right)\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}+\dfrac{\partial f_2}{\partial u}u_x+\dfrac{\partial f_2}{\partial v}v_x\right). \end{cases} \tag{3}$$

Аналогичные формулы получаются для $v'_{x'}$ и $v'_{y'}$. Можно также подсчитать, как выражаются

$$u'_{x'x'},\quad u'_{x'y'},\quad u'_{y'y'},\quad v'_{x'x'},\quad v'_{x'y'},\quad v'_{y'y'}$$

через переменные

$$x,\quad y,\quad u,\quad v,\quad u_x,\quad u_y,\quad v_x,\quad v_y,\quad u_{xx},\quad u_{xy},\quad u_{yy},\quad v_{xx},\quad v_{xy},\quad v_{yy}.$$

Будем считать производные

$$u_x, \quad u_y, \quad v_x, \quad v_y, \quad u_{xx}, \quad u_{xy}, \quad u_{yy}, \quad v_{xx}, \quad v_{xy}, \quad v_{yy}$$

новыми переменными, преобразующимися по формулам (3). Тогда уравнения задачи будут содержать 14 переменных:

$$\begin{gathered} u_1 = x, \quad u_2 = y, \quad u_3 = u, \quad u_4 = v, \\ p_1 = u_x, \quad p_2 = u_y, \quad p_3 = v_x, \quad p_4 = v_y, \\ q_1 = u_{xx}, \quad q_2 = u_{xy}, \quad q_3 = u_{yy}, \quad q_4 = v_{xx}, \quad q_5 = v_{xy}, \quad q_6 = v_{yy}. \end{gathered}$$

Задание этой системы уравнений сводится к заданию подмногообразия в этом пространстве представления. Если рассматривать только переменные

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad p_4,$$

входящие в первое уравнение, то одно первое уравнение определит семимерную поверхность $M^{(7)}$ в этом восьмимерном пространстве $M^{(8)}$.

Два уравнения задачи на 14 переменных налагают два условия. Остаётся 12 свободных переменных. Получим многообразие $M^{(12)}$ в $M^{(14)}$. Будем считать его достаточно гладким. Для того чтобы воспользоваться методом внешних форм, нужно это многообразие задать уравнениями Пфаффа относительно независимых инвариантных линейных форм соответствующей бесконечной группы. От переменных $u_1, u_2, \ldots, q_6$ перейдём к их дифференциалам $du_1, du_2, \ldots, dq_6$, а затем, сделав замену базиса, введём новые линейно независимые формы в том же количестве. Вместо дифференциалов du_1, du_2, du_3, du_4 введём формы ω^1, ω^2, ω^3, ω^4; вместо дифференциалов dp_1, dp_2, dp_3, dp_4 — базисные формы ω_1^3, ω_2^3, ω_1^4, ω_2^4; вместо дифференциалов dq_1, dq_2, dq_3, dq_4, dq_5, dq_6 — формы ω_{11}^3, ω_{12}^3, ω_{22}^3, ω_{11}^4, ω_{12}^4, ω_{22}^4. Эти новые инвариантные формы группы удовлетворяют некоторым соотношениям: уравнениям структуры Ли—Картана на внешние дифференциалы этих форм

$$\begin{cases} D\omega^i = [\omega_k^i \omega^k], \\ D\omega_k^i = [\omega_l^i \omega_k^l] + [\omega_{kl}^i \omega^l], \\ [\omega_{kl}^i \omega^k \omega^l] = 0, \\ D\omega_{kl}^i = [\omega_{pl}^i \omega_k^p] + [\omega_{kp}^i \omega_l^p] - [\omega_{kl}^p \omega_p^i] + [\omega_{klp}^i \omega^p], \\ [\omega_{klp}^i \omega^k \omega^l \omega^p] = 0 \quad (i, k, l, p = 1, 2, 3, 4). \end{cases} \tag{4}$$

Запишем дифференциалы наших основных уравнений задачи:

$$\begin{cases} dF(u_1, u_2, u_3, u_4, p_1, p_2, p_3, p_4) = 0, \\ d\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4, p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u_1}du_1 + \dfrac{\partial F}{\partial u_2}du_2 + \dfrac{\partial F}{\partial u_3}du_3 + \dfrac{\partial F}{\partial u_4}du_4 + \\ \quad + \dfrac{\partial F}{\partial p_1}dp_1 + \dfrac{\partial F}{\partial p_2}dp_2 + \dfrac{\partial F}{\partial p_3}dp_3 + \dfrac{\partial F}{\partial p_4}dp_4 = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1}du_1 + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_1}dp_1 + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_1}dq_1 + \ldots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_6}dq_6 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Перейдём от дифференциалов

$$dp_1, \quad dp_2, \quad dp_3, \quad dp_4, \quad dq_1, \quad dq_2, \quad dq_3, \quad dq_4, \quad dq_5, \quad dq_6$$

к независимым линейным инвариантным формам нашей группы:

$$\begin{cases} \tilde{A}\omega_1^3 + \tilde{B}\omega_2^3 + \tilde{C}\omega_1^4 + \tilde{D}\omega_2^4 + \tilde{K}_i\omega^i = 0, \\ \bar{A}\omega_{11}^3 + \bar{B}\omega_{22}^3 + \bar{C}\omega_{11}^4 + \bar{D}\omega_{22}^4 + \alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3 + \gamma\omega_2^4 + e_i\omega^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases} \tag{6}$$

Всякий так называемый *геометрический объект*, инвариантно связанный с уравнением, является *точкой пространства представления данной группы преобразований*. Общая теория утверждает, что все они получаются внешним дифференцированием, продолжением и канонизацией этих уравнений. Если $\tilde{C} \neq 0$, то первое из уравнений (6) можно разрешить относительно ω_1^4:

$$\omega_1^4 = A\omega_1^3 + B\omega_2^3 + C\omega_2^4 + a_i\omega^i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{7}$$

Канонизируя, получаем, что $\omega_1^4 = \omega_2^3$ (если $B \neq 0$). Будем рассматривать общий случай $B \neq 0$.

Лемма Картана [14]. *Если для $2r$ линейных форм f_i, φ_i из n-мерного кольца $\Re[u]$ имеет место тождество*

$$[f_1\varphi_1] + [f_2\varphi_2] + \ldots + [f_r\varphi_r] = 0$$

и система форм f_i имеет ранг r, то формы φ_k линейно выражаются через формы f_i с симметричной матрицей коэффициентов.

После дифференцирования внешним образом уравнения (7) и применения леммы Картана получим

$$\begin{cases} -\omega_3^4 = \omega_2^1 + a_{11}\omega_1^3 + a_{12}\omega_2^3 + a_{13}\omega_2^4 + a_{1,i+3}\omega^i, \\ -\omega_4^4 = -\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 + a_{12}\omega_1^3 + a_{22}\omega_2^3 + a_{23}\omega_2^4 + a_{2,i+3}\omega^i, \\ \omega_4^3 = -\omega_1^2 + a_{13}\omega_1^3 + a_{23}\omega_2^3 + a_{33}\omega_2^4 + a_{3,i+3}\omega^i, \\ \omega_{12}^3 = \omega_{11}^4 + \ldots, \\ \omega_{23}^3 = \omega_{13}^4 + \ldots, \\ \omega_{24}^3 = \omega_{14}^4 + \ldots \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases} \tag{8}$$

Матрица коэффициентов симметричная. После канонизации некоторые из этих a_{ij} можно привести к нулю. Остальные будут образовывать геометрический объект: это будут коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23} и a_{33}. Для изучения геометрического смысла тех геометрических объектов, которые будут получены далее, важно рассмотреть другую интерпретацию этого восьмимерного пространства $M^{(8)}$. Рассмотрим четырёхмерное пространство $M^{(4)}$. С каждой его точкой (u_1, u_2, u_3, u_4) свяжем два вектора:

$$\vec{e}_1 = \bar{M}_{u_1} + \bar{M}_{u_3} \cdot p_1 + \bar{M}_{u_4} \cdot p_3,$$
$$\vec{e}_2 = \bar{M}_{u_2} + \bar{M}_{u_3} \cdot p_2 + \bar{M}_{u_4} \cdot p_4.$$

Эти два вектора определяют плоскость. Каждой точке $(u_1, \ldots, u_4, p_1, \ldots, p_4)$ восьмимерного пространства $M^{(8)}$ поставим в соответствие точку $M(u_1, u_2, u_3, u_4)$ и двумерную плоскость. Легко убедиться, что для интегрального многообразия первого исходного уравнения

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad p_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad p_4 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

эта двумерная плоскость будет касательным элементом.

Первое уравнение

$$\omega_1^4 = \omega_2^3$$

выделит подмногообразие этих двумерных элементов. Зафиксируем в этом четырёхмерном пространстве точку, т. е. положим

$$\omega^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Назовём эту точку *нулевой точкой* пространства. Преобразования нашей группы, которые сохраняют точку, образуют центро-аффинную группу. Рассмотрим структурные уравнения (4) для инвариантных форм нашей задачи. Если $\omega^i = 0$, то эти уравнения будут следующими:

$$D\omega_k^i = [\omega_l^i \omega_k^l] \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{9}$$

Остальных уравнений не будет. Уравнения (9) являются *структурными уравнениями центро-аффинной группы*. С каждой фиксированной точкой $\omega^i = 0$ будет связано четырёхмерное многообразие двумерных плоскостей. Рассмотрим проективную интерпретацию этого образа. В пересечении с трёхмерной несобственной гиперплоскостью, не проходящей через нулевую точку пространства, это центро-аффинное пространство образует проективное пространство со структурными уравнениями (9) и подвижным репером — тетраэдром $A_1A_2A_3A_4$, инфинитезимальные преобразования которого имеют вид

$$dA_i = \omega_i^k A_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{10}$$

Трёхмерное многообразие двумерных плоскостей в центро-аффинном пространстве, выделяемое уравнением (7), в пересечении с трёхмерной несобственной гиперплоскостью, не проходящей через нулевую точку пространства, даст *комплекс прямых*. Каждой прямой комплекса поставим в соответствие тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, ребро которого совпадает с этой прямой. Проводимая канонизация уравнения ($A = 0,\ C = 0,\ B = 1$) получает геометрический смысл выбора тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, наиболее удобным образом присоединённого к прямой комплекса. А именно, обращение в нуль коэффициента A означает, что в качестве плоскости $A_2A_1A_3$ нашего тетраэдра выбрана плоскость, касательная к конусу лучей комплекса, имеющему вершину в точке A_2; обращение в нуль коэффициента C достигается таким выбором положения координатного тетраэдра, при котором плоскость $A_1A_2A_4$ будет касательной к конусу лучей комплекса, имеющему вершину в точке A_1. Коэффициент B приводится к 1 нормированием координат вершины A_4 тетраэдра. Объект $(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23}, a_{33})$ характеризует этот комплекс.

Тем самым классификация в точке уравнения первого порядка нашей задачи сводится к классификации комплексов. Эта классификация известна, а следовательно, известен и геометрический смысл первого уравнения. Например, если

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{23} = a_{33} = 0,$$

то соответствующий комплекс линейный. Для этого случая рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \omega_1^4 = \omega_2^3, \\ \bar{A}\omega_{11}^3 + \bar{B}\omega_{22}^3 + \bar{C}\omega_{11}^4 + \bar{D}\omega_{22}^4 + \alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3 + \gamma\omega_2^4 + e_i\omega^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases} \tag{11}$$

Второе уравнение этой системы можно разрешать относительно той или другой трёхиндексной формы (в общем случае), а затем по-разному канонизировать полученное при этом уравнение. Геометрический смысл такой канонизации выясняется при рассмотрении новой интерпретации пространства представления группы, относительно преобразований которой изучаются уравнения задачи. При этой новой интерпретации образующим элементом является точка, плоский элемент и проходящий через него элемент второго порядка. С каждой точкой в пространстве и плоским элементом связано трёхмерное многообразие элементов второго порядка. Действительно, на шесть производных второго порядка имеем три уравнения: два от продолжения первого уравнения и второе данное уравнение.

Введём понятие характеристики. *Характеристика* — это такой линейный элемент, через который проходит большее число двумерных интегральных элементов, чем через соседние элементы. Вдоль характеристических направлений нельзя задавать начальные условия для системы.

Если считать, что $\bar{C} \neq 0$, и разрешить второе уравнение системы (11) относительно ω_{11}^4, то будет выделен некоторый специальный случай данной в самом начале системы дифференциальных уравнений. Действительно, дальнейшая канонизация приведёт лишь к таким возможным случаям:

1) $\omega_{11}^4 = \omega_{22}^3$ — три различные действительные характеристики;
2) $\omega_{11}^4 = 0$ — две совпавшие характеристики и ещё одна.

Если считать, что $\bar{B} \neq 0$, и разрешить второе уравнение относительно ω^3_{22}, то мы также получим некоторый специальный случай, так как в результате канонизации возникнет такое новое уравнение:

1) $\omega^3_{22} = 0$ — две совпавшие характеристики и ещё одна.

Если $\bar{A} \neq 0$, то можно разрешить второе уравнение системы (11) относительно ω^3_{11}. Канонизация в этом случае показывает, что мы имеем систему общего типа:

1) $\omega^3_{11} = \omega^3_{22}$ — три различные действительные характеристики;
2) $\omega^3_{11} = \omega^4_{11}$ — две совпавшие характеристики и ещё одна;
3) $\omega^3_{11} = 0$ — три совпавшие характеристики.

Такой же общий тип системы будет, если $\bar{D} \neq 0$ и второе уравнение системы (11) разрешено относительно ω^4_{22}. Будем дальше рассматривать именно этот случай.

После канонизации такой системы второе уравнение может быть приведено к следующим уравнениям:

1) $\omega^4_{22} = \omega^4_{11}$ — три различные действительные характеристики;
2) $\omega^4_{22} = \omega^3_{11}$ — три различные характеристики (из них две комплексно-сопряжённые);
3) $\omega^4_{22} = \omega^3_{22}$ — две совпавшие характеристики и одна;
4) $\omega^4_{22} = 0$ — три совпавшие характеристики.

Тем самым получается первоначальная классификация этой системы.

Рассмотрим первую систему (самого общего вида, с тремя действительными характеристиками, не совпадающими друг с другом):

$$\begin{cases} \omega^4_1 = \omega^3_2, \\ \omega^4_{22} = \omega^4_{11}. \end{cases} \tag{12}$$

Дальнейшее продолжение и возможная канонизация приводит к следующим уравнениям при условии линейного комплекса ($a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{23} = a_{33} = 0$):

$$\begin{cases} \omega^1_2 = b_{11}\omega^3_{11} + b_{12}\omega^4_{11} + b_{13}\omega^3_{22} + a\omega^3_1 + b\omega^3_2 + e\omega^4_2 + b_{1,i+6}\omega^i, \\ \omega^2_1 = b_{12}\omega^3_{11} + b_{22}\omega^4_{11} + b_{23}\omega^3_{22} - e\omega^3_1 + g\omega^3_2 + f\omega^4_2 + b_{2,i+6}\omega^i, \\ \omega^1_1 - \omega^2_2 = b_{13}\omega^3_{11} + b_{23}\omega^4_{11} + b_{33}\omega^3_{22} - b\omega^3_1 + c\omega^3_2 + g\omega^4_2 + b_{3,i+6}\omega^i, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} -2\omega^4_{13} = \ldots, \\ 2\omega^4_{23} - \omega^1_{22} - 2\omega^4_{14} + \omega^1_{11} = \ldots, \\ 2\omega^4_{24} - \omega^2_{22} + \omega^2_{11} = \ldots, \end{cases} \tag{14}$$

$$\{\, \omega^4_{22i} - \omega^4_{11i} = 0. \tag{15}$$

Коэффициенты при трёхиндексных формах образуют геометрический объект, а коэффициенты при двухиндексных формах являются относительными инвариантами нашей группы (при условии фиксации точки $\omega^i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Эти объекты позволяют классифицировать эту систему более подробно. А именно, если зафиксировать точку, плоский элемент и двумерный элемент, то три характеристики в пересечении с прямой комплекса определят тройку точек. Всегда можно считать, что это точки A_1, A_2, $A_1 + A_2$. Если фиксировать только исходную точку и плоский элемент, то таких троек будет трёхпараметрическое семейство. Таким образом, свойства системы в точке сводятся к свойствам следующей геометрической конфигурации: комплекс прямых и на каждой прямой трёхпараметрическое многообразие троек точек. Если

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{23} = a_{33} = 0, \quad b_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

и

$$a = b = c = e = f = g = 0$$

(объект равен нулю) и все относительные инварианты равны нулю, то на каждом луче эти тройки неподвижны и в трёхмерной несобственной гиперплоскости существует неподвижная прямая, через которую проходят три фиксированные плоскости, высекающие на каждой прямой комплекса эту тройку точек. Значит, можно, во-первых, производить классификацию по уменьшению произвола этих троек на каждом луче комплекса, т. е. по снижению ранга матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ -e & g & f \\ -b & c & g \end{pmatrix}, \tag{16}$$

а также, во-вторых, по существованию на прямой A_1A_2 в комплексе таких точек $A_1 + A_2$, которые описывали бы при движении прямой не всё пространство, а двумерную поверхность. Задача приводит к уравнению четвёртого порядка

$$ah^4 - 2bh^3 + (2eA_1 + A_2c)h^2 + 2gh - f = 0, \tag{17}$$

и значит, вообще говоря, возможна следующая классификация:

1) на прямой вообще нет таких точек,
2) четыре различные точки,
3) различные случаи совпадения таких точек,
4) случай тождественного выполнения такого уравнения.

Поскольку нами рассматривается система дифференциальных уравнений, для которой все три характеристики действительные и различные, то для уравнения (17) остаются лишь следующие возможности:

1) нет ни одного корня (т. е. ни одна из точек прямой A_1A_2 комплекса не описывает поверхность при движении луча);
2) существуют четыре различных корня, т. е. четыре точки A_1, A_2, $A_1 + A_2$ и A, описывающие поверхности (все различные);
3) существует один двойной корень и два различных.

В «двойной» точке может быть только совпадение точки A с какой-либо из точек A_1, A_2 или $A_1 + A_2$ (точки A_1, A_2, $A_1 + A_2$ по предположению не могут совпадать между собой). Других случаев не будет. Условия, при которых точки

A_1 ($h_1 = 0$), A_2 ($h_2 = \infty$), $A_1 + A_2$ ($h_3 = 1$) описывают поверхности при движении прямой комплекса, соответственно таковы:

$$f = 0, \quad a = 0, \quad a - 2b + 2e + c + 2g - f = 0. \tag{18}$$

Если эти условия выполняются одновременно, то координаты четвёртой точки A, описывающей поверхность, определяются по формуле

$$h_4 = \frac{-g}{b} = -\lambda, \quad \frac{g}{b} = \lambda = \mathrm{const}.$$

Дифференциальные уравнения нашей системы в точке, т. е. при $\omega^i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, при этом станут такими уравнениями Пфаффа:

$$\begin{cases} \omega_1^4 = \omega_2^3, \\ \omega_4^1 = \omega_3^2, \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \omega_2^1 = b\omega_2^3 + e\omega_2^4, \\ \omega_1^2 = -e\omega_1^3 + \lambda b\omega_2^3, \\ \omega_1^1 - \omega_2^2 = -b\omega_1^3 + 2\big(e + (\lambda - 1)\big)b\omega_2^3 + \lambda b\omega_2^4, \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \omega_3^4 = -\omega_2^1, \omega_4^3 = -\omega_1^2, \\ \omega_4^4 - \omega_3^3 = \omega_1^1 - \omega_2^2. \end{cases} \tag{21}$$

Классификация этой системы может быть более детально произведена по снижению ранга матрицы коэффициентов, стоящих в правых частях уравнений (13):

$$D = \det \begin{pmatrix} 0 & b & e \\ -e & b & 0 \\ -b & 2(e + (-1)b) & b \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Этот определитель матрицы в общем случае не равен нулю тождественно, значит, ранг этой матрицы равен 3. Произвол троек точек на лучах комплекса не снизится, если на каждом луче комплекса найдутся четыре точки, описывающие поверхности при смещении этого луча. Ранг этой матрицы уменьшится до двух, если либо $e = 0$, либо $b = -e$, либо $\lambda b + e = 0$. Таким образом, при выполнении одного из условий (18) точки A_1, A_2, $A_1 + A_2$, A прямой комплекса будут описывать поверхности, и произвол троек точек пересечения характеристик с прямой комплекса уменьшится до двух.

В [9] рассматривался случай с тремя различными характеристиками на каждом интегральном многообразии. В проективном пространстве, ассоциированном с касательным пространством к $M^{(4)}$ в произвольной точке, такая система задаёт комплекс прямых. На каждой прямой комплекса имеется семейство троек точек, зависящее, вообще говоря, от трёх параметров, а в частных случаях — от меньшего числа параметров. Была проведена классификация таких геометрических образов. В частности, выяснилось, что самым простым будет случай, когда комплекс линейный и на каждой его прямой три характеристические точки определяются единственным образом как пересечение этой прямой с тремя постоянными плоскостями, проходящими через одну прямую, принадлежащую комплексу. В этом случае вектор реперов, присоединённых к системе в точке, удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} dA_1 = \tilde{\omega} A_1 + \tilde{\omega}_1^3 A_3 + \tilde{\Omega} A_4, \\ dA_3 = \tilde{\Theta} A_3, \\ dA_2 = \tilde{\omega} A_2 + \tilde{\Omega} A_3 + \tilde{\omega}_2^4 A_4, \\ dA_4 = \tilde{\Theta} A_4 \end{cases} \tag{23}$$

(векторы A_1, A_2 принадлежат площадке; её характеристические направления определяются векторами A_1, A_2, $A_1 - A_2$; прямая пересечения трёх плоскостей определяется векторами A_3, A_4). При этом будут выполняться дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} d\omega^1 = [\omega\omega^1] + \ldots, \\ d\omega^2 = [\omega\omega^2] + \ldots, \\ d\omega^3 = [\omega_1^3\omega^1] + [\Omega\omega^2] + [\Theta\omega^3] + \ldots, \\ d\omega^4 = [\Omega\omega^1] + [\omega_2^4\omega^2] + [\Theta\omega^4] + \ldots, \end{cases} \tag{24}$$

где формы, входящие в (23), получаются из соответствующих форм без значков в (24) при фиксации точки в $M^{(4)}$. Невыписанные члены являются линейными комбинациями форм ω^i. В данном случае изучение системы совпадает с изучением g-структуры в $M^{(4)}$. Группа g оставляет инвариантным в несобственном проективном пространстве линейный комплекс и три указанные выше плоскости, а семейство реперов определяется уравнениями (23).

Мы рассмотрим ещё более специальный случай, когда невыписанные члены в (24) приводятся к нулю, т. е. первая структурная функция данной g-структуры равна нулю:

$$\begin{cases} d\omega^1 = [\omega\omega^1], \\ d\omega^2 = [\omega\omega^2], \\ d\omega^3 = [\omega_1^3\omega^1] + [\Omega\omega^2] + [\Theta\omega^3], \\ d\omega^4 = [\Omega\omega^1] + [\omega_2^4\omega^2] + [\Theta\omega^4]. \end{cases} \tag{25}$$

Сравнение (25) с (4) даёт

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1^1 = \tilde{\omega}_2^2, \quad \tilde{\Omega} = \tilde{\omega}_3^3 = \tilde{\omega}_4^4, \tag{26}$$

остальные формы $\tilde{\omega}_i^k$ равны нулю. Дифференцируя уравнение (25), получим

$$\begin{cases} [\Delta\omega_1^3\omega^1] + [\Delta\Omega\omega^2] + [d\Theta\omega^3] = 0, \\ [\Delta\Omega\omega^1] + [\Delta\omega_2^4\omega^2] + [d\Theta\omega^4] = 0, \\ [d\omega\omega^1] = 0, \\ [d\omega\omega^2] = 0, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\begin{cases} \Delta = d\omega_1^3 - [\omega_1^3\omega] - [\Theta\omega_1^3], \\ \Delta\Omega = d\Omega - [\Omega\omega] - [\Theta\Omega], \\ \omega_2^4 = d\omega_2^4 - [\omega_2^4\omega] - [\Theta\omega_2^4]. \end{cases} \tag{28}$$

После применения к уравнениям (27) обобщённой, а затем простой леммы Картана, учитывая, что уравнения системы накладывают на формы три условия, а характеристические направления определяются уравнениями

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^1 + \omega^2 = 0,$$

вводя обозначения

$$\omega_{12}^3 = \omega_{11}^4 = \omega_{22}^3 = \omega_{12}^4 = \Omega_0,$$

получим

$$\begin{cases} \Delta\omega_1^3 = [\omega_{11}^3\omega^1] + [\Omega_0\omega^2] + A_{1,ik}^3[\omega^i\omega^k], \\ \Delta\omega_2^4 = [\Omega_0\omega^1] + [\omega_{22}^4\omega^2] + A_{2,ik}^4[\omega^i\omega^k], \\ \Delta\Omega = [\Omega_0(\omega^1 + \omega^2)] + B_{ik}[\omega^i\omega^k], \\ \Delta\Theta = A_{ik}[\omega^i\omega^k]. \end{cases} \tag{29}$$

Вводя преобразования форм

$$\omega_{11}^3 \to \omega_{11}^3 + u_i^3\omega^k, \quad \omega_{22}^4 \to \omega_{22}^4 + u_i^4\omega^k, \quad \Omega_0 \to \Omega_0 + v^i\omega^i,$$

не меняющие уравнений (29), можно преобразовать их к виду

$$\begin{cases} \Delta\omega_1^3 = [\omega_{11}^3\omega^1] + [\Omega_0\omega^2] - A_{12}[\omega^2\omega^3] + B_{14}[\omega^2\omega^4] + A_{14}[\omega^3\omega^4], \\ \Delta\omega_2^4 = [\Omega_0\omega^1] + [\omega_{22}^4\omega^2] + B_{23}[\omega^1\omega^3] + A_{12}[\omega^1\omega^4] - A_{23}[\omega^3\omega^4], \\ \Delta\Omega = [\Omega_0(\omega^1 + \omega^2)] + B_{23}[\omega^2\omega^3] + B_{14}[\omega^1\omega^4] + A[\omega^3\omega^4], \\ d\Theta = A_{12}[\omega^1\omega^2] + A[\omega^1\omega^3] + A_{14}[\omega^1\omega^4] + A_{23}[\omega^2\omega^3] + A[\omega^2\omega^4] + A_{34}[\omega^3\omega^4], \\ d\omega = K[\omega^1\omega^2]. \end{cases} \tag{30}$$

Заметим, что изучаемая нами система эквивалентна системе внешних дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \omega^3 = 0, \omega^4 = 0, \quad [(\omega_1^3 - \Omega)\omega^1] = 0, \\ [(\omega_2^4 - \Omega)\omega^2] = 0, \quad [\Omega(\omega^1 + \omega^2)] = 0 \end{cases} \tag{31}$$

на многообразии $M^{(7)}$. Дифференцируя уравнения (30) внешним образом и приводя подобные члены, получим

$$\begin{cases} [\Delta\omega^3_{11}\omega^1] + [\Delta\Omega_0\omega^2] - [\Delta A_{12}\omega^2\omega^3] + [\Delta B_{14}\omega^2\omega^4] + [\Delta A_{14}\omega^3\omega^4] = 0, \\ [\Delta\Omega_0\omega^1] + [\Delta\omega^4_{22}\omega^2] + [\Delta B_{23}\omega^1\omega^3] + [\Delta A_{12}\omega^1\omega^4] - [\Delta A_{23}\omega^3\omega^4] = 0, \\ [\Delta\Omega_0(\omega^1+\omega^2)] + [\Delta B_{23}\omega^2\omega^3] + [\Delta B_{14}\omega^1\omega^4] + [\Delta A\omega^3\omega^4] = 0, \\ [\Delta A_{12}\omega^1\omega^2] + [\Delta A(\omega^2\omega^4 - \omega^1\omega^3)] + [\Delta A_{14}\omega^1\omega^4] + \\ \quad + [\Delta A_{23}\omega^2\omega^3] + [\Delta A_{34}\omega^3\omega^4] = 0, \\ [\Delta K\omega^1\omega^2] = 0, \end{cases} \tag{32}$$

где

$$\begin{cases} \Delta K = dK + 2K\omega, \\ \Delta A_{34} = dA_{34} + 2A_{34}\Theta, \\ \Delta A = dA + A\omega + A\Theta + A_{34}\Omega, \\ \Delta A_{14} = dA_{14} + A_{14}\omega + A_{14}\Theta + A_{34}\omega^3_1, \\ \Delta A_{23} = dA_{23} + A_{23}\omega + A_{23}\Theta - A_{34}\omega^4_2, \\ \Delta A_{12} = dA_{12} + 2A_{12}\omega + A_{14}\omega^4_2 - A_{23}\omega^3_1, \\ \Delta B_{14} = dB_{14} + 2B_{14}\omega + A\omega^3_1 + A_{14}\Omega - 2A\Omega, \\ \Delta B_{23} = dB_{23} + 2B_{23}\omega - A\omega^4_2 + A_{23}\Omega + 2A\Omega, \\ \Delta\Omega_0 = d\Omega_0 - 2[\Omega_0\omega] + [\Omega_0\Theta] - \dfrac{1}{2}K[\Omega(\omega^1-\omega^2)] + \dfrac{1}{2}A_{12}[\Omega(\omega^1-\omega^2)] - \\ \quad - \dfrac{1}{2}B_{23}[\omega^3_1(\omega^1-\omega^2)] + \dfrac{1}{2}B_{14}[\omega^4_2(\omega^1-\omega^2)] - 2A[\Omega\omega^4] + 2A[\Omega\omega^3], \\ \Delta\omega^3_{11} = d\omega^3_{11} - 2[\omega^3_{11}\omega] + [\omega^3_{11}\Theta] + K[\omega^3_1\omega^2] - \\ \quad - \dfrac{1}{2}K[\Omega\omega^2] - 2A_{12}[\omega^3_1\omega^2] + \dfrac{1}{2}A_{12}[\Omega\omega^2] + B_{14}[\Omega\omega^2] + \\ \quad + \dfrac{1}{2}B_{14}[\omega^4_2\omega^2] - \dfrac{1}{2}B_{23}[\omega^3_1\omega^2] - 2A_{14}[\omega^3_1\omega^4] + A_{14}[\Omega\omega^3] + A[\omega^3_1\omega^3], \\ \Delta\omega^4_{22} = d\omega^4_{22} - 2[\omega^4_{22}\omega] + [\omega^4_{22}\Theta] - K[\omega^4_2\omega^1] + \\ \quad + \dfrac{1}{2}K[\Omega\omega^1] + 2A_{12}[\omega^4_2\omega^1] - \dfrac{1}{2}A_{12}[\Omega\omega^1] + B_{23}[\Omega\omega^1] - \\ \quad - \dfrac{1}{2}B_{14}[\omega^4_2\omega^1] + \dfrac{1}{2}B_{23}[\omega^3_1\omega^1] - 2A_{23}[\omega^4_2\omega^3] + A_{23}[\Omega\omega^4] - A[\omega^4_2\omega^4]. \end{cases} \tag{33}$$

Из этих уравнений видно, что K и A_{34} являются относительными инвариантами, а ряд других коэффициентов образуют линейные геометрические объекты:

$$(A_{34}, \lambda A + \mu A_{14} + \nu A_{23}), \quad \lambda = \mathrm{const}, \quad \mu = \mathrm{const}, \quad \nu = \mathrm{const},$$
$$(A_{34}, A_{14}, A, B_{14}), \quad (A_{34}, A, A_{23}, B_{23}), \quad (A_{34}, A_{14}, A_{23}, A_{12})$$

и другие. Все коэффициенты вместе также образуют линейный геометрический объект (структурную функцию второго порядка g-структуры).

Выясним геометрический смысл обращения в нуль этих объектов. Вполне интегрируемая система $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ определяет расслоение многообразия $M^{(4)}$ с базисным многообразием $M^{(2)}$, которое мы будем называть *пространством независимых переменных*.

Каждое из уравнений $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, $\omega^1 + \omega^2 = 0$ вполне интегрируемо. Они определяют на $M^{(2)}$ три семейства кривых. K является кривизной этой три-ткани в смысле Бляшке [3]. Аналогично на каждом слое расслоения $M^{(4)}$, т. е. на интегральном многообразии системы $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ уравнения $\omega^3 = 0$, $\omega^4 = 0$, определяют три-ткань, кривизна которой равна A_{34}.

Обращение в нуль объекта

$$(A_{34}, \lambda A + \mu A_{14} + \nu A_{23})$$

необходимо и достаточно для полной интегрируемости системы Пфаффа

$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \lambda\Omega + \mu\omega_1^3 + \nu\omega_2^4 = 0$$

в многообразии $M^{(7)}$. Аналогично обращение в нуль объекта

$$(A_{34}, A, A_{14}, A_{23}, B_{23} + A_{12})$$

необходимо и достаточно для полной интегрируемости системы

$$\omega^1 = 0, \quad \Omega - \omega_1^3 = 0.$$

В этом случае уравнение

$$[(\omega_1^3 - \Omega)\omega^1] = 0$$

является самостоятельным дифференциальным уравнением в системе (31). Подставляя его решения в остальные уравнения системы, приходим к более простой системе дифференциальных уравнений, т. е. система допускает промежуточный интеграл. Аналогичную роль для уравнений

$$[(\omega_2^4 - \Omega)\omega^2] = 0$$

играет обращение в нуль объекта

$$(A_{34}, A, A_{14}, A_{23}, B_{23}, B_{14} - A_{12}),$$

а для уравнения

$$[\Omega(\omega^1 + \omega^2)] = 0 \text{ —}$$

объекта

$$(A_{34}, A, A_{14}, A_{23}, B_{23}, B_{14}).$$

В частности, получаем следующий результат.

Теорема. *Если у системы изучаемого вида две из систем Пфаффа*

$$\begin{cases} \omega_1^3 - \Omega = 0, \\ \omega^1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_2^4 - \Omega = 0, \\ \omega^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega = 0, \\ \omega^1 + \omega^2 = 0 \end{cases}$$

вполне интегрируемы, то это верно и для третьей системы.

Такие уравнения возникают при решении различных прикладных задач гидродинамики, физики атмосферы, физики плазмы. Здесь следует сослаться на системы уравнений С. Л. Соболева, а также его учеников. Системы уравнений указанного типа применяются и для описания реальных физико-химических процессов. Эти результаты изложены в [1]. Очень интересные примеры таких систем удалось найти в [15].

Законы сохранения

В работе получены законы сохранения данной системы дифференциальных уравнений для случая системы, имеющей три различные действительные характеристики. Речь идёт о математических законах сохранения: получены замкнутые кососимметричные дифференциальные формы. В [13, гл. 4, с. 65—70] рассмотрена связь внешних форм с законами сохранения. Роль замкнутых внешних дифференциальных форм в теориях поля связана с тем, что они отражают свойства законов сохранения для физических полей.

Первые формулировки законов сохранения энергии и количества движения относятся к XVII веку. Неявно законы сохранения использовались Галилеем и голландским учёным Х. Гюйгенсом. Для немеханических систем законы сохранения были получены в XIX веке. Немецким физиком Майером, английским физиком Джоулем и немецким учёным Гельмгольцем было сформулировано первое начало термодинамики, которое связывали с законом сохранения энергии. Второе начало термодинамики, которое тоже связывают с законами сохранения, было сформулировано немецким физиком Клаузиусом в 1850 году. В дальнейшем были открыты законы сохранения, выражающие сохраняемость некоторых физических величин или объектов. Такие законы сохранения можно назвать *точными*. Примером формулировки таких законов сохранения являются теоремы Нётер, которые при некоторых условиях могут быть записаны в виде $d\omega = 0$. Кроме того, имеются ещё другие законы сохранения: законы сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы, которые устанавливают баланс между изменением физических величин и соответствующими внешними воздействиями. Такие законы сохранения можно назвать *балансными* законами сохранения. Эти законы сохранения описываются дифференциальными уравнениями.

Математический аппарат кососимметричных дифференциальных форм (внешних и эволюционных) позволяет ответить на вопрос, существует ли связь между точными и балансными законами сохранения. Балансные законы сохранения — это законы сохранения для материальных сред. Точные законы сохранения — это законы сохранения для физических полей (они соответствуют физическим структурам, формирующим физические поля). Точные законы сохранения получаются из балансных законов сохранения в результате взаимодействия балансных законов сохранения между собой.

Связь теорий поля с теорией замкнутых внешних форм

Связь теорий поля с теорией замкнутых внешних форм объясняется прежде всего тем, что замкнутые внешние формы соответствуют законам сохранения, которым подчиняются физические поля.

Невырожденные преобразования теорий поля являются преобразованиями замкнутых внешних форм. Калибровочные преобразования для спинорных, скалярных, векторных и тензорных полей — это преобразования замкнутых 0-форм, 1-форм, 2-форм и 3-форм соответственно. Можно убедиться, что все существующие теории поля строились на постулатах инвариантности или ковариантности, которые являются условиями замкнутости внешней или дуальной формы. Гамильтоновый формализм основывается на свойствах замкнутых внешних и дуальных форм первой степени. Замкнутая внешняя форма

$$ds = -Hdt + p_j dq_j$$

(инвариант Пуанкаре) соответствует уравнению поля, связанному с гамильтоновой системой. Уравнение Шрёдингера в квантовой механике, которое есть аналог уравнения поля, где сопряжённые координаты заменены операторами, основывается на свойствах замкнутой внешней формы нулевой степени (а уравнение Гейзенберга — соответствующей дуальной формы). Свойства замкнутых внешних и дуальных форм второй степени лежат в основе уравнений электромагнитного поля. Уравнения Максвелла записываются в виде

$$d\theta^2 = 0, \quad d^*\theta^2 = 0,$$

где

$$\theta^2 = \frac{1}{2} F_{\mu\upsilon} dx^\mu dx^\nu$$

(здесь $F_{\mu\upsilon}$ — тензор напряжённости). В уравнении гравитационного поля заложены условия замкнутости внешних и дуальных форм третьей степени.

Приведённая выше связь уравнений поля с замкнутыми внешними формами показывает, что возможно классифицировать физические поля по степеням замкнутых внешних форм. (Если обозначить через k степень соответствующих замкнутых внешних форм, то $k = 0$ соответствует сильному взаимодействию, $k = 1$ — слабому, $k = 2$ — электромагнитному и $k = 3$ — гравитационному.) Это показывает, что существует внутренняя связь между теориями поля, описывающими физические поля разного типа. Параметром, объединяющим теории поля в единую теорию поля, является степень замкнутых внешних форм [13, гл. 5, с. 73—79].

Балансные законы сохранения

Балансные законы сохранения — это законы сохранения, которые устанавливают баланс между изменением физических величин и внешними воздействиями. Эти законы сохранения для материальных систем (для материальных сред). Материальная система — это (бесконечная) совокупность элементов, имеющих внутреннее строение и взаимодействующих между собой. Примерами элементов материальных систем являются электроны, протоны, нейтроны, атомы, частицы жидкости и т. д. Физический вакуум по своим свойствам может быть аналогом такой материальной системы.

Балансными законами сохранения являются законы сохранения энергии, количества движения, момента количества движения и массы. В интегральном виде балансные законы сохранения выражают следующее: изменение физической величины в некотором элементарном объёме за интервал времени уравновешивается потоком некоторой величины через границу и действием источников. При переходе к дифференциальному виду потоки заменяются дивергенциями. Уравнения балансных законов сохранения — это дифференциальные (или интегральные) уравнения, описывающие изменение функций, соответствующих физическим величинам.

Понятие закона сохранения в дифференциальной геометрии

Согласно [4], *интегралом* или *законом сохранения системы дифференциальных уравнений* называется внешняя форма Θ степени p в многообразии зависимых и независимых переменных, интеграл от которой равен нулю для всякого p-мерного цикла, лежащего на интегральном многообразии системы и гомологичного на нём нулю. В силу теоремы Стокса Θ будет интегралом тогда и только тогда, когда её внешний дифференциал $d\Theta$ обращается в нуль вследствие уравнений системы. Если известен нетривиальный интеграл системы (т. е. внешний дифференциал которого не тождественный нуль), то условия, выражающие, что $d\Theta = 0$ на интегральном многообразии, составляют часть уравнений системы. Если у системы имеется достаточно много интегралов, всем её уравнениям можно приписать аналогичный смысл. В этом случае говорят, что система «представима в дивергентной форме». К системам, представимым в дивергентной форме, относятся все системы, для которых можно ввести понятие обобщённого решения. Именно, *обобщённым решением* называется подмногообразие, на котором все интегралы системы, взятые по циклам, гомологичным нулю, обращаются в нуль. Известно, что для изучения системы полезно знать хотя бы один закон сохранения, допускаемый системой.

Вычисление законов сохранения

Изучаемая система эквивалентна системе внешних дифференциальных уравнений (31):

$$\begin{cases} \omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0, \quad [(\omega_1^3 - \Omega)\omega^1] = 0, \\ [(\omega_2^4 - \Omega)\omega^2] = 0, \quad [\Omega(\omega^1 + \omega^2)] = 0. \end{cases} \tag{34}$$

В пространстве зависимых и независимых переменных мы ищем дифференциальные формы π степени $p+1$, замкнутые ($d\pi = 0$) и обращающиеся в нуль на интегральном многообразии. Каждая 2-мерная форма π, удовлетворяющая условию $d\pi = 0$, и в пространстве зависимых и независимых переменных определяется дифференциальными формами κ, замкнутыми ($d\kappa = \pi$) и обращающимися в нуль на интегральном многообразии:

$$\pi = A[(\varpi_1^3 - \Omega)\varpi^1] + B[(\varpi_2^4 - \Omega)\varpi^2] + C[\Omega(\varpi^1 + \varpi^2)] + D[(\varpi_1^3 - \Omega)\varpi^3] + \\ + E[(\varpi_1^3 - \Omega)\varpi^4] + F[(\varpi_2^4 - \Omega)\varpi^3] + G[(\varpi_2^4 - \Omega)\varpi^4] + H[\Omega\varpi^3] + S[\Omega\varpi^4] + \\ + J[(\varpi^1 + \varpi^2)(\omega^3 + \omega^4)].$$

В этой формуле буквы $A, B, C, D, E, F, \ldots$ обозначают неизвестные функции. Каждая 3-мерная форма μ, удовлетворяющая условию $d\mu = 0$, и в пространстве зависимых и независимых переменных определяется дифференциальными формами τ, замкнутыми ($d\tau = \mu$) и обращающимися в нуль на интегральном многообразии:

$$\mu = L[(\varpi_1^3 - \Omega)\varpi^1\varpi^3] + P[(\varpi_1^3 - \Omega)\varpi^1\varpi^4] + Q[(\varpi_2^4 - \Omega)\varpi^2\varpi^3] + \\ + R[(\varpi_2^4 - \Omega)\varpi^2\varpi^4] + T[\Omega(\varpi^1 + \varpi^2)\varpi^3] + W[\Omega(\varpi^1 + \varpi^2)\varpi^4].$$

В этой формуле буквы $L, P, Q, R, \ldots$ обозначают неизвестные функции. По теореме Стокса форма μ является интегралом, если и только если её внешний дифференциал $d\mu$ обращается в нуль вследствие уравнений системы. Задача состоит в отыскании форм $d\mu$ указанного выше типа. Приравнивая нулю внешний дифференциал этой формы, полученный с помощью уравнений (25) и (29), мы получаем условие $d\mu = 0$.

Автор выражает глубокую благодарность всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и её приложений Московского государственного университета, особенно академику А. Т. Фоменко, профессору А. О. Иванову, доценту Е. А. Кудрявцевой за предоставленную мне возможность создать эту статью и за их ценные советы. Автор выражает глубокую благодарность за помощь в работе над статьёй всему коллективу кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ, особенно профессору Т. П. Лукашенко, профессору Л. Е. Евтушику, доценту Т. В. Родионову. Автор выражает глубокую благодарность профессору Астраханского государственного университета А. Г. Кушнеру за предоставленную мне возможность познакомиться с книгой [15].

Литература

[1] Акрамов Т. А. Дифференциальные уравнения и их приложения к моделированию физико-химических процессов. — Уфа: Башкирский гос. ун-т, 2000.

[2] Ачкинадзе А. Ш., Бесядовский А. Р., Корнев Н. В., Фаддеев Ю. И. Гидромеханика. — 2007.

[3] Бляшке В. Введение в геометрию тканей. — М.: Физматгиз, 1959.

[4] Васильев А. М. Системы трёх дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трёх неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория) // Мат. сб. — 1966. — Т. 70 (112), вып. 4. — С. 457—480.

[5] Васильев А. М. Дифференциально-геометрические структуры. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

[6] Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.

[7] Картан Э. Избранные труды. — М.: МЦНМО, 1998.

[8] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 275—382.

[9] Орлова Л. Н. Система двух дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка при двух неизвестных функциях и двух независимых переменных // Учёные записки Московск. гос. ин-та им. В. И. Ленина. — 1967. — № 271. — С. 103—112.

[10] Орлова Л. Н. Геометрия квазилинейной системы двух дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка при двух неизвестных функциях и двух независимых переменных // Геометрия однородных пространств. — М.: Московск. гос. ин-т им. В. И. Ленина, 1976. — С. 94—101.

[11] Орлова Л. Н. Геометрия квазилинейной системы двух дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка при двух неизвестных функциях и двух независимых переменных // Тр. междунар. конф. «Геометрия в Одессе — 2007». — 2007. — С. 87—88.

[12] Орлова Л. Н. Геометрия квазилинейной системы двух дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка при двух неизвестных функциях и двух независимых переменных // Мат. заметки. — 2009. — Т. 85, вып. 3. — С. 416—427.

[13] Петрова Л. И. Кососимметричные дифференциальные формы: законы сохранения. Основы теории поля. — М.: ЛЕНАНД, 2006.

[14] Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

[15] Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V. Contact Geometry and Non-Linear Differential Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.