Об одном классе три-тканей с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения

Л. М. ПИДЖАКОВА
Тверской государственный технический университет
e-mail: lpidjhacova@mail.ru

УДК 514.763

Ключевые слова: три-ткань, тензоры кривизны и кручения ткани, однородное пространство.

Аннотация

Рассматривается специальный класс многомерных три-тканей W^∇ с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения, причём тензор кривизны имеет минимальный ранг. В настоящей работе доказывается, что существует такое подсемейство адаптированных реперов ткани W^∇, в которых компоненты тензора кручения постоянны, а тензор кривизны имеет единственную ненулевую компоненту. Найдены структурные уравнения тканей этого класса и описаны некоторые их свойства.

Abstract

L. M. Pidzhakova, On one class of three-webs with covariantly constant curvature and torsion tensors, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 85—91.

A special class of multidimensional three-webs W^∇ with covariantly constant curvature and torsion tensors is considered, the curvature tensor having the minimal rank. It is proved that there is a subfamily of adapted frames of the web W^∇ whose torsion tensor components are constant and the curvature tensor has a unique nonzero component. The structure equations of the webs of this class are found and some of their properties are described.

Три-тканью W на гладком многообразии M размерности $2r$ называется совокупность трёх гладких слоений λ_1, λ_2 и λ_3 размерности r, каждые два из которых находятся в общем положении, т. е. их слои трансверсальны в каждой точке многообразия M [2].

Теория многомерных три-тканей — сравнительно молодой раздел современной дифференциальной геометрии. Первые работы по теории тканей появились в начале прошлого века (см. [3, 7]). Затем своё развитие теория тканей получила в [1, 8]. Уже в то время обнаружилась связь между теорией многомерных три-тканей и различными алгебраическими структурами, в частности с квазигруппами. В пятидесятые годы прошлого века появилась работа [4], с которой началось исследование аналитических квазигрупп и луп, близких в том

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 85—91.

или ином смысле к группам Ли. В связи с этим возрос интерес и к теории три-тканей, поскольку последние являются геометрическим аналогом гладких локальных квазигрупп.

Одной из основных проблем теории тканей является проблема классификации. Каждый класс тканей характеризуется особым типом канонически присоединённой к ткани аффинной связности (связности Черна) [2]. В терминах связности Черна были даны тензорные характеристики известных тканей: трансверсально-геодезических, изоклинных, Томсена (T), Рейдемейстера (R), Бола (B), Муфанг (M), шестиугольных (H) и других.

В настоящей работе рассматривается специальный класс многомерных три-тканей (ткани W^∇), тензоры кривизны и кручения которых ковариантно постоянны относительно канонической аффинной связности Черна: $\nabla a^i_{jk} = 0$, $\nabla b^i_{jkl} = 0$. Таким образом, рассматриваемые три-ткани в каком-то смысле близки к групповым.

Ткани W^∇ рассматривались в [9], где были получены тензорные соотношения на компоненты тензоров кривизны и кручения и найден пример негрупповой четырёхмерной три-ткани W^∇. Последнее, в частности, доказывает, что рассматриваемые ткани образуют более широкий класс, чем класс тканей R.

Так как тензоры кручения и кривизны связности Черна, присоединённой к три-ткани W^∇, являются ковариантно постоянными, то многообразие M этой ткани относительно связности Черна является локальным редуктивным пространством [6], $M = G/H$. В [5] была описана структура этого редуктивного пространства и доказано существование подсемейства адаптированных реперов, в которых компоненты тензоров кривизны и кручения ткани являются постоянными. Были найдены структурные уравнения групп G и H и описаны соответствующие им алгебры Ли в терминах основных тензоров ткани.

В [5] были рассмотрены специальные три-ткани W^∇, а именно ткани с тензором кривизны минимального ранга. Тензор кривизны таких тканей имеет следующее строение: $b^i_{jkl} = \mu^i b_j b_k b_l$. Там же были получены структурные и конечные уравнения специальных тканей W^∇ с тензором кривизны минимального ранга.

В настоящей работе мы возвращаемся к рассмотрению таких три-тканей и описываем их строение.

Как известно (см. [2]), корепер на многообразии M, $\dim M = 2r$, можно выбрать так, что слоения ткани W будут задаваться уравнениями

$$\underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0.$$

Базисные формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ многообразия M удовлетворяют структурным уравнениям [2]

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\ d\underset{2}{\omega}^i &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k &= b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a = (a^i_{jk})$ и $b = (b^i_{jkl})$ — тензоры кручения и кривизны ткани соответственно. Их компоненты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &b^i_{[jkl]} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|l]}, \quad \nabla a^i_{jk} = b^i_{[j|l|k]}\underset{1}{\omega}^l + b^i_{[jk]l}\underset{2}{\omega}^l, \\ &\nabla b^i_{jkl} = \underset{1}{c}^i_{jklm}\underset{1}{\omega}^m + \underset{2}{c}^i_{jklm}\underset{2}{\omega}^m, \\ &\underset{1}{c}^i_{j[k|l|m]} = b^i_{jpl}a^p_{km}, \quad \underset{2}{c}^i_{jk[lm]} = -b^i_{jkp}a^p_{lm}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в связности Черна, определяемый формулой

$$\nabla a^i_{jk} \overset{\text{def}}{=} da^i_{jk} + a^m_{jk}\omega^i_m - a^i_{mk}\omega^m_j - a^i_{jm}\omega^m_k.$$

Мы рассматриваем ткани W^∇, для которых

$$\nabla a^i_{jk} = 0, \quad \nabla b^i_{jkl} = 0. \tag{3}$$

Из уравнений (2) по (3) следует, что $\underset{1}{c}^i_{jklm} = \underset{2}{c}^i_{jklm} = 0$, тензор кривизны симметричен по нижним индексам $b^i_{jkl} = b^i_{(jkl)}$, а тензор кручения удовлетворяет тождеству Якоби

$$a^m_{[jk}a^i_{|m|l]} = 0. \tag{4}$$

Кроме того, компоненты этих тензоров связаны соотношениями [9]

$$a^i_{mk}b^m_{jpq} + a^i_{jm}b^m_{kpq} = 0, \tag{5}$$

$$b^i_{jkp}a^p_{lm} = 0, \tag{6}$$

$$b^m_{jkl}b^i_{mpq} - b^i_{mkl}b^m_{jpq} - b^i_{jml}b^m_{kpq} - b^i_{jkm}b^m_{lpq} = 0. \tag{7}$$

Уравнения (1) являются также структурными уравнениями соответствующей связности Черна.

Рассмотрим ткани W^∇, у которых компоненты тензора кривизны имеют специальный вид

$$b^i_{jkl} = \mu^i b_j c_k d_l.$$

Так как тензор b^i_{jkl} симметричен по нижним индексам, имеем

$$b^i_{jkl} = \mu^i b_j b_k b_l. \tag{8}$$

При этом соотношения (5)—(7) примут следующий вид [5]:

$$\mu^m b_m = 0, \tag{9}$$

$$b_p a^p_{lm} = 0, \tag{10}$$

$$-a^i_{km}\mu^m b_j + a^i_{jm}\mu^m b_k = 0. \tag{11}$$

Эти соотношения можно интерпретировать в терминах касательной алгебры ткани, которая называется W-алгеброй или алгеброй Акивиса [2]. В этой алгебре две операции, бинарная A и тернарная B, определяющиеся тензорами кручения и кривизны ткани:

$$[\xi\eta]^i = a^i_{jk}(x,y)\xi^j\eta^k, \quad (\xi\eta\zeta)^i = b^i_{jkl}(x,y)\xi^j\eta^k\zeta^l.$$

Эти операции определены в касательном пространстве T единицы координатной лупы $l(x, y)$ ткани W, $(x, y) \in M$.

Для рассматриваемой ткани W^∇ в силу (4) бинарная алгебра A является алгеброй Ли.

Как показано в [5], величины $\bar{\mu} = (\mu^m)$ и $\bar{b} = (b_m)$ являются тензорами. Соотношения (9) означают, что вектор $\bar{\mu}$ находится в инвариантном подпространстве π: $b_m x^m = 0$, определяемом ковектором $\bar{b}$.

Соотношения (10) означают, что производный идеал A' алгебры A также лежит в π.

Уравнения (11) можно переписать в виде

$$\frac{a^i_{km}\mu^m}{b_k} = \frac{a^i_{jm}\mu^m}{b_j} \equiv \lambda^i,$$

откуда получаем соотношения

$$a^i_{km}\mu^m = \lambda^i b_k. \tag{12}$$

Сворачивая последнее равенство с b_i и учитывая (10), получаем

$$\lambda^i b_i = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) означает, что вектор λ^i также лежит в π.

Поместим векторы $e_2, \dots, e_r$ касательного пространства T в подпространство π. Тогда уравнение плоскости π примет вид $x^1 = 0$, т. е.

$$b_{\hat{\imath}} = 0, \quad b_1 \neq 0 \quad (\hat{\imath} = \overline{2, r}). \tag{14}$$

Из (9) в этом случае следует, что $\mu^1 = 0$.

Из уравнений (10) согласно (14) получаем, что

$$a^1_{lm} = 0, \tag{15}$$

а из соотношений (11) следуют соотношения

$$a^{\hat{\imath}}_{\hat{m}\hat{k}}\mu^{\hat{m}} = 0. \tag{16}$$

При этом из (4) получаем, что величины $a^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}\hat{k}}$ удовлетворяют тождеству Якоби.

Соотношения (15) означают, что подпространство π образует подалгебру в алгебре A, обозначим её $\bar{A}'$. Как было сказано выше, $A' \subset \bar{A}'$.

Согласно условиям (15) структурный тензор a^i_{jk} алгебры A разбивается на две компоненты: $(a^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}\hat{k}}, a^{\hat{\imath}}_{1\hat{k}})$. Первая является структурным тензором производной подалгебры $\bar{A}'$.

Соотношения (16) означают, что вектор μ входит в центр алгебры $\bar{A}'$. Поскольку соотношения (16) получены из соотношений (11) в результате канонизации репера, то соотношения (11) (или (12)) имеют тот же геометрический смысл: они означают, что инвариантный вектор $\bar{\mu}$ входит в центр алгебры $\bar{A}'$.

Если алгебра $\bar{A}'$ имеет нулевой центр, то $\mu^{\hat{\imath}} = 0$ и из (8) получаем, что $b^i_{jkl} = 0$. Следовательно, в этом случае рассматриваемая три-ткань W^∇ является групповой (см. [2]).

Рассмотрим случай, когда $\mu^{\hat{\imath}} \neq 0$ (центр алгебры $\bar{A}'$ ненулевой). Положим $\bar{\mu} = e_2$. Тогда $\mu^2 = 1$, $\mu^{\tilde{\imath}} = 0$, $\tilde{\imath} = \overline{3, r}$. Тогда по (8) будут равны нулю все компоненты тензора кривизны, кроме $b^2_{111} = 1$. Из соотношений (16) при этом получаем

$$a^{\hat{\imath}}_{2\hat{k}} = 0. \tag{17}$$

Последняя группа структурных уравнений (1) рассматриваемой три-ткани W^{∇} с учётом проведённой канонизации примет вид

$$d\omega^1_i = \omega^k_i \wedge \omega^1_k, \quad d\omega^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}} = \omega^{\hat{k}}_{\hat{\jmath}} \wedge \omega^{\hat{\imath}}_{\hat{k}}, \quad d\omega^{\tilde{\imath}}_1 = 0, \quad d\omega^2_1 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1.$$

Отсюда видно, что система уравнений

$$\omega^1_i = 0, \quad \omega^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}} = 0, \quad \omega^{\tilde{\imath}}_1 = 0$$

является вполне интегрируемой, следовательно, она определяет некоторое подрасслоение адаптированных реперов ткани W^{∇}. Сузим семейство адаптированных реперов рассматриваемой ткани, положив

$$\omega^1_i = 0, \quad \omega^{\hat{\imath}}_{\hat{\jmath}} = 0, \quad \omega^{\tilde{\imath}}_1 = 0. \tag{18}$$

Тогда из форм ω^i_j ненулевой останется только одна форма: ω^2_1.

Из условия ковариантного постоянства тензора кручения (см. (3)) для его ненулевых компонент $a^{\hat{\imath}}_{jk}$ (см. (15)) имеем

$$da^{\hat{\imath}}_{jk} - a^{\hat{\imath}}_{mk}\omega^m_j - a^{\hat{\imath}}_{jm}\omega^m_k = 0.$$

Согласно (17) и (18) $da^{\hat{\imath}}_{jk} = 0$, т. е. все компоненты тензора кручения становятся постоянными, $a^{\hat{\imath}}_{jk} = \mathrm{const}$.

После проведённой канонизации структурные уравнения три-ткани W^{∇} принимают следующий вид:

$$d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \tag{19}$$

$$d\underset{1}{\omega}^2 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega^2_1 + a^2_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{1}{\omega}^{\tilde{\imath}} = a^{\tilde{\imath}}_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \tag{20}$$

$$d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega^2_1 - a^2_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^{\tilde{\imath}} = -a^{\tilde{\imath}}_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \tag{21}$$

$$d\omega^2_1 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1. \tag{22}$$

Теорема 1. *Пусть W^{∇} — $2r$-мерная три-ткань, тензоры кривизны и кручения которой ковариантно постоянны и тензор кривизны имеет специальное строение $b^i_{jkl} = \mu^i b_j b_k b_l$. Этот класс тканей допускает такое семейство адаптированных реперов, в которых компоненты тензора кручения постоянны, а тензор кривизны имеет единственную ненулевую компоненту $b^2_{111} = 1$. Структурные уравнения три-ткани W^{∇} имеют вид* (19)—(22).

Рассмотрим систему (19)—(22). Это замкнутая система с постоянными коэффициентами, следовательно, она определяет некоторую группу Ли размерности $2r + 1$ с инвариантными формами $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$ и ω^2_1 (обозначим её G).

Вполне интегрируемая система $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$ выделяет в группе G одномерную подгруппу H, структурное уравнение которой имеет вид $d\omega_1^2 = 0$. Следовательно, H — абелева подгруппа. Таким образом, многообразие ткани M есть однородное пространство, $M = G/H$.

Положим в уравнениях (19)—(22)

$$\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad \underset{2}{\omega}^1 = 0. \tag{23}$$

Уравнения (23) определяют подгруппу G' группы G, $\dim G' = 2r - 1$, а значит, и однородное пространство $M' = G'/H$ — подпространство пространства M. Структурные уравнения группы G' имеют вид

$$d\underset{1}{\omega}^{\hat\imath} = a^{\hat\imath}_{\hat\jmath\hat k}\underset{1}{\omega}^{\hat\jmath} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat k}, \quad d\underset{2}{\omega}^{\hat\imath} = -a^{\hat\imath}_{\hat\jmath\hat k}\underset{2}{\omega}^{\hat\jmath} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat k}, \tag{24}$$

$$d\omega_1^2 = 0. \tag{25}$$

Как видно из уравнений (24), (25), группа G' представляет собой прямое произведение одномерной группы H и группы G'' со структурными уравнениями (24), $G' = G'' \times H$. Как видно из (24), касательной алгеброй группы G'' является алгебра $\bar{A}'$. Так как структурные постоянные $a^{\hat\imath}_{\hat\jmath\hat k}$ не связаны никакими соотношениями (кроме тождества Якоби), то $\bar{A}'$ — произвольная алгебра Ли, а G'' — произвольная группа Ли.

Система (24) определяет групповую три-ткань, порождённую группой G''.

Как известно (см. [2]), слоения ткани выделяются системами вполне интегрируемых уравнений

$$\lambda_1\colon\ \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_2\colon\ \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_3\colon\ \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0.$$

Уравнения первого слоения ткани W^∇ выделяют в группе G подгруппу G_1, структурные уравнения которой имеют вид

$$d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega_1^2 - a^2_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^{\tilde\imath} = -a^{\tilde\imath}_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \quad d\omega_1^2 = 0.$$

Вполне интегрируемое уравнение $\omega_1^2 = 0$ выделяет в группе G_1 подгруппу G_1'. Как видно из структурных уравнений группы G_1, она представляет собой полупрямое произведение одномерной подгруппы H и подгруппы G_1'.

Аналогичное строение имеют подгруппы G_2 и G_3, которые выделяют в группе G уравнения второго и третьего слоений. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Многообразие ткани W^∇ является однородным пространством $M = G/H$, где G — группа Ли, $\dim G = 2r + 1$, H — подгруппа группы G, $\dim H = 1$. Многообразие M расслаивается на ∞^2 многообразий $M' = G'/H$, где G' представляет собой прямое произведение произвольной группы Ли G'', $\dim G'' = 2r - 2$, и одномерной абелевой группы H, $G' = G'' \times H$. Соответственно, ткань W^∇ расслаивается на ∞^2 групповых подтканей, определённых группой G''.*

Литература

[1] Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1969. — Т. 2. — С. 7—31.

[2] Акивис М. А., Шелехов А. М. Многомерные три-ткани и их приложения. — Тверь, 2010.

[3] Бляшке В. Введение в геометрию тканей. — М.: ГИФМЛ, 1959.

[4] Мальцев А. И. Аналитические лупы // Мат. сб. — 1955. — Т. 36, № 3. — С. 569—575.

[5] Пиджакова Л. М. Три-ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. — 2010. — Т. 124. — С. 176—190.

[6] Трофимов В. В. Введение в геометрию многообразий с симметриями. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

[7] Bol G. Über zwei Kurvenscharen und eine Flachenschar // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1932. — P. 93—94.

[8] Chern S. S. Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in $\mathbf{R}_{2r}$ // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — Vol. 11, No. 1, 2. — 1936. — P. 333—358.

[9] Shelekhov A. M., Pidzhakova L. M. On three-webs with covariantly constant torsion and curvature tensors // Webs and Quasigroups. — Tver: Tver State Univ., 1998—1999. — P. 92—103.