# Геодезическая однозначная определённость в целом некоторых обобщённо-рекуррентных римановых пространств

**Е. Н. СИНЮКОВА**
*Южноукраинский национальный педагогический университет им. К. Д. Ушинского*
e-mail: Marbel@ukr.net

УДК 514.75

**Ключевые слова:** геодезическая однозначная определённость, теорема Хопфа.

**Аннотация**

В статье приведены подробные доказательства двух теорем о геодезической однозначной определённости в целом компактных, в определённом смысле обобщённо-рекуррентных римановых пространств с положительно определённой метрикой. В основу исследований положена теорема Э. Хопфа.

**Abstract**

*H. N. Sinyukova, Geodesic uniqueness in the whole of some generally recurrent Riemannian spaces*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 93—101.

In this paper, we present a detailed proofs of two theorems of geodesic uniqueness in the whole of compact, in some sense generally recurrent, Riemannian spaces with a positive defined metric. Our studies are based on the H. Hopf theorem.

Под $C^r$-многообразием $M^n$ $(n \in \mathbb{N},\ r > 1)$ в работе понимается хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, у каждой точки которого существует окрестность, гомеоморфная некоторой области пространства $\mathbb{R}^n$, любые две такие окрестности $C^r$-согласованны между собой. На подобном многообразии существует риманова $C^{r-1}$-метрика (задаваемая бесконечным числом способов, не обязательно положительно определённая), превращающая его в риманово $C^r$-пространство $V^n$ [1].

Пусть $J$ — непустой интервал прямой. Дифференцируемым путём класса $C^k$ в $C^r$-многообразии $M^n$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ называют $C^k$-отображение $l\colon J \to M^n$. $C^k$-пути $l_1\colon J_1 \to M^n$ и $l_2\colon J_2 \to M^n$ считают $C^k$-эквивалентными, если существует такой $C^k$-диффеоморфизм $\gamma\colon J_1 \to J_2$, что $l_1 = l_2 \circ \gamma$ на $J_1$. Класс $C^k$-эквивалентных $C^k$-путей называют $C^k$-кривой в $M^n$, каждый путь этого класса — параметризацией данной кривой. $C^k$-кривая $L$ однозначно определяется любым своим путём $l$. В каждой локальной системе координат $C^k$-путь $l$

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2010, том 16, № 2, с. 93—101.

задаётся уравнениями

$$x^h = x^h(t), \quad t \in J, \quad x^h(t) \in C^k.$$

Точка $M(t)$ называется геодезической точкой $C^2$-кривой $L$ риманова $C^r$-пространства $V^n$ ($r \geqslant 2$), если касательный к $L$ вектор

$$\eta^h(t) = \frac{dx^h}{dt}$$

удовлетворяет в этой точке условию

$$\eta^h_{,\alpha}\eta^\alpha \equiv \frac{d\eta^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\eta^\alpha\eta^\beta = \rho\eta^h, \tag{1}$$

где инвариант $\rho$ зависит только от $t$. Если $C^2$-кривая $L$ риманова $C^r$-пространства $V^n$ ($r \geqslant 2$) состоит лишь из геодезических точек, то она называется геодезической линией этого пространства. В любом римановом пространстве $V^n$ класса $C^r$ ($r > 1$) через каждую точку $M_0$ в каждом направлении $\eta^h_0$ проходит геодезическая линия, и притом только одна (см., например, [2]).

Пусть между римановыми $C^r$-пространствами $V^n$ и $\bar{V}^n$ ($n \geqslant 1$, $r > 1$) установлен $C^r$-диффеоморфизм. Если при этом все геодезические линии пространства $V^n$ переходят в геодезические линии пространства $\bar{V}^n$, то говорят, что данный $C^r$-диффеоморфизм является геодезическим отображением (глобально, в целом) риманова пространства $V^n$ на риманово пространство $\bar{V}^n$.

Чаще, однако, рассматривают локальные геодезические отображения римановых пространств. Пусть отображение $f$, определённое в некоторой окрестности $U$ точки $M_0$ риманова $C^r$-пространства $V^n$ ($n \geqslant 1$, $r > 1$), $C^r$-диффеоморфно переводит эту окрестность в окрестность $\bar{U}$ некоторого $C^r$-пространства $\bar{V}^n$ так, что при этом все геодезические линии, содержащиеся в окрестности $U$, переходят в геодезические линии окрестности $\bar{U}$. Тогда $f$ есть отображение, геодезическое в окрестности точки $M_0$. Если такие отображения можно определить для некоторой окрестности каждой точки пространства $V^n$, то говорят, что $V^n$ локально допускает геодезические отображения.

Очевидно, всякое глобальное геодезическое отображение пространства $V^n$ на пространство $\bar{V}^n$ является и локальным геодезическим отображением. Существуют, однако, широкие классы римановых пространств, локально допускающих нетривиальные (отличные от аффинных) геодезические отображения, но не допускающие таких отображений в целом [4].

Пусть координатная окрестность $U$ $C^r$-пространства $V^n$ ($n > 1$, $r > 1$) $C^r$-диффеоморфна некоторой координатной окрестности $\bar{U}$ $C^r$-пространства $\bar{V}^n$. Доказано (см., например, [5]), что этот $C^r$-диффеоморфизм тогда и только тогда будет геодезическим отображением $U$ на $\bar{U}$, когда в общей по отображению системе координат выполняются условия

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k\bar{g}_{ij} + \psi_i\bar{g}_{kj} + \psi_j\bar{g}_{ki}. \tag{2}$$

Здесь $\bar{g}_{ij}$ — метрический тензор пространства $\bar{V}^n$, $\psi_i$ — некоторый ковектор, ковариантное дифференцирование производится в пространстве $V^n$.

В соответствии с приведёнными выше определениями соотношения (2), очевидно, можно использовать и для изучения геодезических отображений римановых пространств в целом. Для того чтобы $C^r$-диффеоморфизм между $C^r$-пространствами $V^n$ и $\bar{V}^n$ ($n \geqslant 2$, $r > 1$) был геодезическим отображением $V^n$ на $\bar{V}^n$, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждой точки пространства $V^n$ в общей по отображению системе координат выполнялись условия (2).

Фигурирующий в (2) ковектор $\psi_i$ определяет рассматриваемое геодезическое отображение. Так как в каждом римановом пространстве $V^n$

$$\Gamma^{\alpha}_{i\alpha} = \frac{1}{2}\partial_i \ln|g|,$$

где $g = \det\|g_{ij}\|$ ($\neq 0$), то

$$\psi_i = \frac{1}{2(n+1)}\partial_i \ln\left|\frac{\bar{g}}{g}\right|, \tag{3}$$

где $\bar{g} = \det\|\bar{g}_{ij}\|$ ($\neq 0$). В силу того что $\bar{g}/g$ при преобразовании координат представляет собой инвариант, ковектор $\psi_i$ градиентен: $\psi_i = \partial_i\psi$. При $\psi_i \equiv 0$ геодезическое отображение вырождается в аффинное и, как уже говорилось, считается тривиальным, при $\psi_i$, не совпадающем тождественно с нулём, — нетривиальным.

Если пространство $V^n$ не допускает (локально или глобально) нетривиальных геодезических отображений, то говорят, что оно (локально или глобально) геодезически однозначно определено в том смысле, что его объект аффинной связности единственным образом определяется совокупностью его геодезических линий.

Очевидно, что вопрос о том, допускает ли данное $V^n$ локально или глобально нетривиальные геодезические отображения, сводится к вопросу существования в некоторой окрестности каждой точки $V^n$ или на всём $V^n$ симметричного неособенного $C^{r-1}$-тензора $\bar{g}_{ij}$ и не равного тождественно нулю $C^{r-2}$-ковектора $\psi_i$, удовлетворяющих уравнениям (2), (3). Следовательно, в заданном римановом пространстве $V^n$ уравнения (2) и (3) образуют основную систему уравнений теории геодезических отображений (в форме Леви—Чивита). Это система нелинейных дифференциальных уравнений в ковариантных производных первого порядка относительно компонент тензора $\bar{g}_{ij}$, не являющаяся системой типа Коши. В общем случае такие системы не допускают эффективного исследования регулярными методами на предмет существования и единственности их решений.

Положив

$$a_{ij} = e^{2\psi}\bar{g}^{\alpha\beta}g_{\alpha i}g_{\beta j}, \tag{4}$$

$$\lambda_i = -e^{2\psi}\psi_\alpha\bar{g}^{\alpha\beta}g_{\beta i}, \tag{5}$$

$$\mu = e^{2\psi}[(n+1)\psi_\alpha\psi_\beta - \psi_{\alpha,\beta}]\bar{g}^{\alpha\beta}, \tag{6}$$

Н. С. Синюков перешёл к эквивалентной системе дифференциальных уравнений, допускающей регулярные методы исследования (см. [2]). Точнее, им была доказана следующая основная теорема.

**Теорема.** *Для того чтобы риманово $C^r$-пространство $V^n$ ($n \geqslant 2$, $r > 3$) допускало нетривиальные геодезические отображения, необходимо и достаточно, чтобы система дифференциальных уравнений*

$$a_{ij,\,k} = \lambda_{(i}g_{j)k}, \tag{7}$$

$$n\lambda_{i,\,k} = \mu g_{ik} + a_{\alpha i}R^{\alpha}_{.k} - a_{\alpha\beta}R^{\alpha\ \beta}_{ik.}, \tag{8}$$

$$(n-1)\mu_{,\,k} = 2(n-1)\lambda_\alpha R^{\alpha}_{.k} + a_{\alpha\beta}(2R^{\alpha\ \ \beta}_{.k\,,.} - R^{\alpha\beta}_{..,\,k}) \tag{9}$$

*имела в этом пространстве решение относительно симметричного неособенного дважды ковариантного $C^{r-1}$-тензора $a_{ij}$, ковариантного $C^{r-2}$-вектора $\lambda_i$, который не равен тождественно нулю, и $C^{r-3}$-инварианта $\mu$.*

Система (7)—(9) является линейной системой первого порядка типа Коши с однозначно определёнными пространством $V^n$ коэффициентами. Ковектор $\lambda_i$, удовлетворяющий уравнениям системы (7)—(9), градиентен:

$$\lambda_i = \partial_i\lambda, \tag{10}$$

где с точностью до постоянной

$$\lambda = \frac{1}{2}a^{\gamma}_{.\gamma},$$

$$\mu \equiv \lambda^{\alpha}_{.,\alpha} \equiv g^{ij}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_i\partial x^j} - \lambda_\alpha\Gamma^{\alpha}_{ij}\right). \tag{11}$$

По известному решению системы (7)—(9) метрический тензор $\bar g_{ij}$ пространства $\bar V^n$, на которое в силу наличия этого решения рассматриваемое пространство $V^n$ допускает нетривиальное геодезическое отображение, находится из соотношений, обратных к (4)—(6). Именно, из (4) и (5) вытекает, что

$$\psi_i = -\lambda_\alpha a^{\alpha\beta}g_{\beta i} = \frac{1}{2}\partial_i\ln\left|\frac{\tilde g}{g}\right|, \tag{12}$$

где $a^{\alpha\beta}$ — элементы матрицы, обратной к $\|a_{ij}\|$, $\tilde g = \det\|a^{ij}_{..}\|$. Значит, с точностью до постоянной

$$\psi = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tilde g}{g}\right|$$

и в силу (4)

$$\bar g_{ij} = e^{2\psi}a^{\alpha\beta}g_{\alpha i}g_{\beta j}. \tag{13}$$

Соотношения перехода (4)—(6) и (12), (13) показывают, что система (7)—(9), подобно системе основных уравнений в форме Леви-Чивита, характеризует как локальные геодезические отображения, так и геодезические отображения в целом. Её решения носят тогда соответственно локальный или глобальный характер.

Система (7)—(9) не всегда совместна. Для того чтобы она имела решения, необходимо, чтобы выполнялись условия её интегрируемости и их последовательные дифференциальные продолжения, представляющие собой, в силу линейного характера данной системы, совокупность линейных однородных алгебраических уравнений относительно $a_{ij}$ $(\equiv a_{ji})$, $\lambda_i$, тождественно не равного нулю, и $\mu$. Приведём лишь используемые в дальнейшем условия интегрируемости первой группы уравнений данной системы. В соответствии с (7) и (8) они имеют вид

$$a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{ijkl} = 0, \tag{14}$$

где

$$T^{\alpha\beta}_{ijkl} = n(\delta^\beta_j R^\alpha_{ikl} - \delta^\beta_k R^\alpha_{lji}) - g_{ik}(\delta^\beta_j R^\alpha_{.l} - R^{\alpha\ \beta}_{jl.}) + g_{jl}(\delta^\beta_k R^\alpha_{.i} - R^{\alpha\ \beta}_{ki.}). \tag{15}$$

В то же время американский математик Э. Хопф, исследовав линейный дифференциальный оператор второго порядка эллиптического типа

$$L(f) = u^{jk}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{16}$$

где $u^{jk}(x)$ и $v^i(x)$ — непрерывные функции точки $n$-мерного многообразия, доказал следующую теорему, названную впоследствии его именем.

**Теорема Хопфа [6].** *Если всюду в компактном $C^2$-многообразии $M^n$ $(n \geqslant 1)$ $C^2$-функция $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$L(f) \geqslant 0$$

*или*

$$L(f) \leqslant 0,$$

*где $L(f)$ — дифференциальный оператор вида* (16), *$u^{jk}(x)$ — коэффициенты квадратичной формы, положительно определённой в любой точке $M^n$, а $v^i(x)$ — произвольные непрерывные функции, то*

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv 0$$

*всюду в $M^n$.*

Допустим, что компактное, с положительно определённой метрикой пространство $V^n$ класса $C^r$ $(n > 2,\ r > 4)$ в целом можно нетривиальным образом геодезически отобразить на некоторое пространство $\bar{V}^n$, а $a_{ij}$, $\lambda_i$ (не равный тождественно нулю), $\mu$ — соответствующее этому отображению глобальное решение системы (7)—(9).

Последовательно ковариантно продифференцировав соотношения (14) в $V^n$, найдём их первые и вторые дифференциальные продолжения. Возникающие при этом производные тензора $a_{ij}$ и ковектора $\lambda_i$ будем в соответствии с первой и второй группами уравнений системы (7)—(9) заменять на линейные комбинации тензора $a_{ij}$, ковектора $\lambda_i$ и инварианта $\mu$. В результате получим

$$\lambda_\alpha g_{\beta m} T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} + a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{ijkl,m} = 0 \tag{17}$$

и

$$\lambda_{\alpha,h} g_{\beta m} T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} + \lambda_\alpha \bigl(g_{\beta m} T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,h} + g_{\beta h} T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m}\bigr) + a_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}_{ijkl,mh} = 0,$$

или

$$\frac{1}{n} \mu g_{\alpha h} g_{\beta m} T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} + \lambda_\alpha U^\alpha_{ijklmh} + a_{\alpha\beta} V^{\alpha\beta}_{ijklmh} = 0, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned} U^\alpha_{ijklmh} &= g_{\beta m} T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,h} + g_{\beta h} T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m}, \\ V^{\alpha\beta}_{ijklmh} &= T^{\alpha\beta}_{ijkl,mh} + \frac{1}{n}\bigl(g_{\sigma m} T^{(\alpha\sigma)}_{ijkl} R^{\beta}_{.h} - g_{\sigma m} R^{\alpha\ \ \beta}_{\gamma h.} T^{(\gamma\sigma)}_{ijkl}\bigr). \end{aligned} \tag{19}$$

Свернув (18) с $g^{mj} g^{hl} E^{ik}$, будем иметь

$$(n+2) E_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta}_{..} \mu + \lambda_\alpha U^\alpha_{ijklmh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} + a_{\alpha\beta} V^{\alpha\beta}_{ijklmh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} = 0. \tag{20}$$

Если в рассматриваемом пространстве $V^n$

$$V^{(\alpha\beta)}_{ijklmh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} = T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} W^{ijkl} + T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m} W^{ijklm}, \tag{21}$$

где $W^{ijkl}$, $W^{ijklm}$ — произвольные тензоры четвёртой и пятой валентности соответственно, то согласно (14) и (17) равенство (20) можно переписать как

$$(n+2) E_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta}_{..} \mu + \lambda_\alpha \left( U^\alpha_{ijklmh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} - T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} W^{ijkl} g_{\beta m} \right) = 0. \tag{22}$$

По (19) соотношения (21) можно представить как следующие условия обобщённой рекуррентности второго порядка для тензора $T^{\alpha\beta}_{ijkl}$:

$$\begin{aligned} T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,mh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} = T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} W^{ijkl} + \frac{1}{n} T^{(\gamma j)}_{ijkl} R^{(\alpha|l|\beta)}_{\gamma\,..} E^{ik}_{..} - \frac{1}{n} T^{(\alpha j)}_{ijkl} R^{\beta l}_{..} E^{ik}_{..} - \\ - \frac{1}{n} T^{(\beta j)}_{ijkl} R^{\alpha l}_{..} E^{ik}_{..} + T^{(\alpha\beta)}_{ijkl,m} W^{ijklm}. \end{aligned} \tag{23}$$

Предположим, что в пространстве $V^n$ $E_{ij} \neq 0$. Тогда вследствие положительной определённости метрической формы $V^n$ $E_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta}_{..} \neq 0$ $(> 0)$. Обозначим

$$P^\alpha = \frac{1}{(n+2) E_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta}_{..}} \bigl( U^\alpha_{ijklmh} g^{mj} g^{hl} E^{ik}_{..} - T^{(\alpha\beta)}_{ijkl} W^{ijkl} g_{\beta m} \bigr) - \Gamma^\alpha_{ij} g^{ij}.$$

Теперь нетрудно убедиться, что на основании (11) соотношения (22) приводятся к виду

$$g^{ij} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^i \partial x^j} + \lambda_\alpha P^\alpha = 0. \tag{24}$$

Так как пространство $V^n$ компактно, форма $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ в нём является положительно определённой и все содержащиеся в (23) функции имеют достаточно высокий класс гладкости, по теореме Хопфа имеем, что в $V^n$ $\lambda_i \equiv 0$ и рассматриваемое геодезическое отображение тривиально. Полученное противоречие показывает, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Компактные, с положительно определённой метрикой и ненулевым тензором Эйнштейна ($E_{ij} \neq 0$) римановы $C^r$-пространства $V^n$ ($n > 2$, $r > 4$), удовлетворяющие рекуррентным соотношениям (23), в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений.*

Соотношения (23) весьма громоздки. В то же время, исходя из (14), подобным образом можно выделить и несколько более «простой» класс уже обобщённо-рекуррентных пространств с тензором Риччи, в целом не допускающих нетривиальных геодезических отображений. Свернув (14) с $g^{il}$, например, получим

$$a_{\alpha\beta} P_{ij}^{\alpha\beta} = 0, \tag{25}$$

где

$$P_{ij}^{\alpha\beta} = \delta_i^\beta R_{.j}^\alpha - \delta_j^\beta R_{.i}^\alpha. \tag{26}$$

Основываясь на (25), покажем, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Компактные, с положительно определённой метрической формой, римановы $C^r$-пространства $V^n$ ($n > 2$, $r > 4$), в которых $E_{ij} \neq 0$ и выполнены рекуррентные соотношения*

$$P_{ij,kh}^{(\alpha\beta)} g^{hi} E_{..}^{kj} = P_{ij,k}^{(\alpha\beta)} W^{ijk} + P_{ij}^{(\alpha\beta)} W^{ij}, \tag{27}$$

*где $W^{ij}$, $W^{ijk}$ — некоторые тензоры второй и третьей валентности, в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений.*

**Доказательство.** Если удовлетворяющее условиям теоремы 2 риманово пространство $V^n$ допускает нетривиальное геодезическое отображение, то, как было показано выше, для тензора $a_{ij}$, входящего в соответствующее данному отображению решение системы (7)—(9), справедливо равенство (25). Первые и вторые дифференциальные продолжения (25) с учётом первой группы уравнений системы (7)—(9) соответственно имеют вид

$$\lambda_\alpha g_{\beta k} P_{ij}^{(\alpha\beta)} + a_{\alpha\beta} P_{ij,k}^{\alpha\beta} = 0, \tag{28}$$

$$\lambda_{\alpha,h} g_{\beta k} P_{ij}^{(\alpha\beta)} + \lambda\big(g_{\beta k} P_{ij,h}^{(\alpha\beta)} + g_{\beta h} P_{ij,k}^{(\alpha\beta)}\big) + a_{\alpha\beta} P_{ij,kh}^{\alpha\beta} = 0, \tag{29}$$

где, как обычно, $\lambda_i$ — не равный тождественно нулю ковектор из соответствующего рассматриваемому отображению решения системы (7)—(9). Свернув (29) с $g^{ih} E_{..}^{jk}$, воспользовавшись для устранения ковариантной производной ковектора $\lambda_i$ второй группой уравнений системы (7)—(9), принимая во внимание (11), придём к следующему дифференциальному уравнению относительно $\lambda$:

$$E_{\alpha\beta} E_{..}^{\alpha\beta} \left( g^{ij} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^i \partial x^j} - \lambda_\gamma \Gamma_{ij}^\gamma g^{ij} \right) + \lambda_\alpha v^\alpha + a_{\alpha\beta} P_{ij,kh}^{(\alpha\beta)} g^{ih} E_{..}^{jk} = 0, \tag{30}$$

где

$$v^\alpha = E_{.\beta}^j P_{ij,h}^{(\alpha\beta)} g^{ih} + P_{\beta j,k}^{(\alpha\beta)} E_{..}^{jk}.$$

Но в силу (27), (28) и (25)

$$a_{\alpha\beta} P_{ij,kh}^{\alpha\beta} g^{ih} E_{..}^{jk} = a_{\alpha\beta} P_{ij,k}^{\alpha\beta} W^{ijk} = -\lambda_\alpha g_{\beta k} P_{ij}^{(\alpha\beta)} W^{ijk}.$$

Поэтому (30) принимает вид

$$E_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot}g^{ij}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^i\partial x^j}+\lambda_\alpha q^\alpha=0, \tag{31}$$

где

$$q^\alpha=v^\alpha-E_{\gamma\beta}E^{\gamma\beta}_{\cdot\cdot}\Gamma^\alpha_{ij}g^{ij}-g_{\beta k}P^{(\alpha\beta)}_{ij}W^{ijk}.$$

Так как метрика рассматриваемого пространства положительно определённая, $E_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot}>0$ и уравнение (31) эквивалентно уравнению вида (24), где

$$P^\alpha=\frac{1}{E_{\beta\gamma}E^{\beta\gamma}}q^\alpha.$$

Следовательно, как и при доказательстве теоремы 1, отсюда вытекает, что $\lambda_i\equiv 0$ и рассматриваемое отображение тривиально. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы 2. □

В [7] Г. Врэнчану изучал свойства римановых пространств с метрикой

$$ds^2=e^{2a_kx^k}c_{ij}dx^idx^j,$$

где $a_k$, $c_{ij}$ — постоянные. Он показал, в частности, что когда ковектор $a_k$ не имеет нулевой длины, такие пространства в целом вполне определяются своими геодезическими, и построил пример пространства с такой метрикой на торе.

Нетрудно убедиться, что данные пространства Врэнчану удовлетворяют соотношениям (27) при

$$W^{ijk}=-3A(n-2)e^{-6a_\gamma x^\gamma}a_\sigma c^{\sigma i}c^{jk},\quad W^{ij}\equiv 0,$$

где $A=c^{\alpha\beta}a_\alpha a_\beta$, $c^{ij}$ — компоненты матрицы, обратной к $\|c_{ij}\|$, и не являются пространствами Эйнштейна при $a_i\neq 0$. С другой стороны, локально пространства Врэнчану допускают нетривиальные геодезические отображения: уравнения (7)—(9) удовлетворяются при

$$a_{ij.}=e^{4a_\alpha x^\alpha}a_ia_j,\quad \lambda_i=Ae^{2a_\alpha x^\alpha}a_i.$$

Заключения, подобные содержащимся в теоремах 1 и 2, можно получить и в результате анализа дифференциальных продолжений более высокого порядка условий интегрируемости первой группы уравнений системы (7)—(9). Возникающие при этом рекуррентные ограничения на пространство будут содержать производные тензоров Римана и Риччи более высоких порядков.

## Литература

[1] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.

[2] Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.

[3] Синюкова Е. Н. О геодезических отображениях некоторых специальных римановых пространств // Мат. заметки. — 1981. — Т. 30, вып. 6. — С. 889—894.

[4] Степанов С. Е. Теоремы исчезновения в аффинной, римановой и лоренцевой геометриях // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 1. — С. 35—84.

[5] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.

[6] Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. — М.: ИЛ, 1957.

[7] Vránceanu G. Proprietáti globale ale spaliilor bui Riemann cu conexiane abina constanta // Stud. Cerc. Mat. — 1963. — Vol. 14, no. 1. — P. 7—22.