Внутренняя геометрия гиперповерхности в проективно-метрическом пространстве

А. В. СТОЛЯРОВ
Чувашский государственный педагогический университет
e-mail: StolyarovAV@chgpu.edu.ru

УДК 514.756

Ключевые слова: проективно-метрическое пространство, двойственность, оснащение гиперповерхности, аффинная и проективная связности, пространство постоянной кривизны.

Аннотация

В настоящей работе изучается внутренняя геометрия гиперповерхности V_{n-1}, вложенной в проективно-метрическое пространство K_n, $n \geqslant 3$, и оснащённой полями геометрических объектов $\{G_n^i, G_i\}$ и $\{H_n^i, G_i\}$ в смысле А. П. Нордена и полем геометрического объекта $\{H_n^i, H_n\}$ в смысле Э. Картана. Доказано, что пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n-1,n-1}$, индуцируемое оснащением в смысле Э. Картана гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$, $n \geqslant 3$, полем геометрического объекта $\{H_n^i, H_n\}$, является плоским тогда и только тогда, когда её нормализация полем объекта $\{H_n^i, G_i\}$ в касательном расслоении индуцирует риманово пространство R_{n-1} постоянной кривизны $\mathrm{K} = -1/c$.

Abstract

A. V. Stolyarov, Internal geometry of hypersurfaces in projectively metric space, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 103—114.

In this paper, we study the internal geometry of a hypersurface V_{n-1} embedded in a projectively metric space K_n, $n \geqslant 3$, and equipped with fields of geometric-objects $\{G_n^i, G_i\}$ and $\{H_n^i, G_i\}$ in the sense of Norden and with a field of a geometric object $\{H_n^i, H_n\}$ in the sense of Cartan. For example, we have proved that the projective-connection space $\mathrm{P}_{n-1,n-1}$ induced by the equipment of the hypersurface $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$, $n \geqslant 3$, in the sense of Cartan with the field of a geometrical object $\{H_n^i, H_n\}$ is flat if and only if its normalization by the field of the object $\{H_n^i, G_i\}$ in the tangent bundle induces a Riemannian space R_{n-1} of constant curvature $\mathrm{K} = -1/c$.

Известно [5, с. 81], что n-мерным пространством K_n с проективной метрикой называется проективное пространство P_n, в котором задана неподвижная гиперквадрика Q_{n-1} (абсолют). Уравнение Q_{n-1} в проективном репере R записывается в виде

$$g_{\bar{I}\bar{K}} x^{\bar{I}} x^{\bar{K}} = 0, \quad g_{\bar{I}\bar{K}} = g_{\bar{K}\bar{I}}. \tag{1}$$

Следуя [4, с. 339], пространство K_n ниже будем называть проективно-метрическим.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 103—114.

Фундаментальной группой пространства K_n является стационарная подгруппа абсолюта Q_{n-1}. Эта подгруппа сохраняет некоторый поляритет [5, с. 81], названный А. П. Норденом абсолютным поляритетом пространства K_n. В случае когда абсолют Q_{n-1} овального типа, поляритет называется гиперболическим [5, с. 86].

Гиперболическое пространство K_n имеет особое значение в геометрии, так как оно представляет собой проективную интерпретацию геометрии Лобачевского. С помощью этой интерпретации Ф. Клейн дал строгое доказательство её непротиворечивости.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0, n}, \quad I, J, K, L = \overline{1, n}, \quad i, j, k, l, s, t = \overline{1, n-1}.$$

Оператор ∇ действует закону

$$\nabla T^{\alpha}_{iu} = dT^{\alpha}_{iu} - T^{\alpha}_{i\nu}\omega^{\nu}_{u} - T^{\alpha}_{ju}\omega^{j}_{i} + T^{\beta}_{iu}\omega^{\alpha}_{\beta}.$$

Полученные результаты являются новыми, актуальными и достоверными. Работа выполнена с привлечением инвариантных методов дифференциально-геометрических исследований [4, 5, 9].

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n. Деривационные формулы проективного репера $R = \{\mathrm{B}_{\bar{I}}\}$ записываются в виде

$$d\mathrm{B}_{\bar{I}} = \omega^{\bar{K}}_{\bar{I}} \mathrm{B}_{\bar{K}},$$

где формы Пфаффа инфинитезимальных перемещений репера удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства P_n [9]

$$D\omega^{\bar{K}}_{\bar{I}} = \omega^{\bar{L}}_{\bar{I}} \wedge \omega^{\bar{K}}_{\bar{L}}, \quad \omega^{\bar{L}}_{\bar{L}} = 0. \tag{2}$$

Условием неподвижности гиперквадрики (1) является [4, с. 359] выполнение дифференциальных уравнений

$$dg_{\bar{I}\bar{K}} - g_{\bar{I}\bar{L}}\omega^{\bar{L}}_{\bar{K}} - g_{\bar{L}\bar{K}}\omega^{\bar{L}}_{\bar{I}} = \theta g_{\bar{I}\bar{K}}, \quad D\theta = \theta \wedge \theta^{0}_{0}. \tag{3}$$

В [7] доказано, что в предположении $g_{00} \neq 0$ (что равносильно тому, что $\mathrm{B}_0 \notin Q_{n-1}$) путём нормировки коэффициентов $g_{\bar{I}\bar{K}}$ и вершин репера R уравнение (1) абсолюта Q_{n-1} и условие (3) его неподвижности можно записать соответственно в виде

$$a_{IK}x^I x^K + \frac{1}{c}(g_{I0}x^I + cx^0)^2 = 0 \tag{4}$$

и

$$da_{IK} - a_{IL}\omega^{L}_{K} - a_{LK}\omega^{L}_{I} = -\frac{1}{c}(a_{IL}g_{K0} + a_{KL}g_{I0})\omega^{L}_{0}, \tag{5}$$

$$dg_{I0} - g_{L0}\omega^{L}_{I} - c\omega^{0}_{I} = a_{IL}\omega^{L}_{0}, \tag{6}$$

где

$$a_{IK} = g_{IK} - \frac{g_{I0}g_{K0}}{c}, \quad a_{IK} = a_{KI}, \quad c = g_{00} = \mathrm{const} \neq 0;$$

при этом форма ω_0^0 становится главной:

$$\omega_0^0 = -\frac{g_{L0}}{c}\omega_0^L. \tag{7}$$

2. В проективно-метрическом пространстве K_n рассмотрим гиперповерхность V_{n-1}, $n \geqslant 3$, текущая точка которой не принадлежит абсолюту Q_{n-1}. В репере R первого порядка ($\mathrm{B}_0 \in \mathrm{V}_{n-1}$, вершины B_i репера принадлежат касательной гиперплоскости $\mathrm{T}_{n-1}(\mathrm{B}_0)$ к гиперповерхности в её текущей точке B_0) дифференциальное уравнение V_{n-1} имеет вид [4, с. 359]

$$\omega_0^n = 0. \tag{8}$$

Трёхкратное продолжение уравнения (8) с использованием (2), (7) приводит к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}^n\omega_0^j, \quad \Lambda_{[ij]}^n = 0; \tag{9}$$

$$\nabla\Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijk}^n, \quad \Lambda_{i[jk]}^n = \frac{1}{c}\Lambda_{i[j}^n g_{k]0}; \tag{10}$$

$$\nabla\Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{(ij}^n\Lambda_{k)s}^n\omega_n^s + \Lambda_{k(i}^n\omega_{j)}^0 = \Lambda_{ijks}^n\omega_0^s, \quad \Lambda_{ij[ks]}^n = \frac{1}{c}\Lambda_{ij[k}^n g_{s]0}; \tag{11}$$

поля геометрических объектов $\{\Lambda_{ij}^n\}$, $\{\Lambda_{ijk}^n, \Lambda_{ij}^n\}$ относятся соответственно ко второй и третьей дифференциальным окрестностям точки $\mathrm{B}_0 \in \mathrm{V}_{n-1}$.

Предположим, что гиперповерхность $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$ является регулярной, т. е. симметричный тензор второго порядка Λ_{ij}^n невырожден: $\Lambda \overset{\mathrm{def}}{=} |\Lambda_{ij}^n| \neq 0$. Следовательно, существует взаимный тензор Λ_n^{kj} второго порядка:

$$\Lambda_{ik}^n\Lambda_n^{kj} = \delta_i^j, \quad \nabla\Lambda_n^{ij} = -\Lambda_n^{ik}\Lambda_n^{sj}\Lambda_{kst}^n\omega_0^t, \tag{12}$$

$$d\ln\Lambda + (n+1)\omega_n^n = A_k\omega_0^k, \quad A_k = \Lambda_n^{st}\Lambda_{tsk}^n + \frac{2}{c}g_{k0}. \tag{13}$$

Двукратное продолжение уравнения (13) приводит к дифференциальным уравнениям

$$\nabla\mathrm{A}_i - (n+1)\Lambda_{si}^n\omega_n^s = \mathrm{A}_{ik}\omega_0^k, \quad \mathrm{A}_{[ik]} = \frac{1}{c}\mathrm{A}_{[i}g_{k]0}, \tag{14}$$

$$\nabla\mathrm{A}_{ij} + \mathrm{A}_j\omega_i^0 - \Lambda_{ij}^n\mathrm{A}_k\omega_n^k - (n+1)(\Lambda_{kij}^n\omega_n^k + \Lambda_{ij}^n\omega_n^0) = \mathrm{A}_{ijk}\omega_0^k, \tag{15}$$

$$\mathrm{A}_{i[jk]} = \frac{1}{c}\mathrm{A}_{i[j}g_{k]0}; \tag{16}$$

поля геометрических объектов $\{\mathrm{A}_i, \Lambda_{ij}^n\}$, $\{\mathrm{A}_{ij}, \Lambda_{ijk}^n, \Lambda_{ij}^n\}$ относятся соответственно к третьей и четвёртой дифференциальным окрестностям текущей точки $\mathrm{B}_0 \in \mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$.

3. Рассмотрим новую систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\bar\omega_{\bar I}^{\bar K}$:

$$\begin{gathered}
\bar\omega_0^i = \omega_0^i, \quad \bar\omega_0^n = \omega_0^n = 0, \quad \bar\omega_0^0 = \omega_0^0 - \left(\frac{\mathrm{A}_s}{n+1} - \frac{g_{s0}}{c}\right)\omega_0^s, \\
\bar\omega_n^n = \omega_n^n - \left(\frac{\mathrm{A}_s}{n+1} - \frac{g_{s0}}{c}\right)\omega_0^s, \\
\bar\omega_i^j = \omega_i^j + \left(\Lambda_n^{jk}\Lambda_{kis}^n - \delta_i^j\frac{\mathrm{A}_s}{n+1}\right)\omega_0^s, \\
\bar\omega_i^n = -\Lambda_{ik}^n\omega_0^k, \quad \bar\omega_i^0 = \Lambda_{ik}^n\omega_n^k, \quad \bar\omega_n^i = -\Lambda_n^{ik}\omega_k^0, \quad \bar\omega_n^0 = \omega_n^0.
\end{gathered} \tag{17}$$

Согласно соотношениям (2), (6), (7), (9)—(12), (14)—(16) формы $\bar\omega_{\bar I}^{\bar K}$ системы (17) удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства $\bar{\mathrm{P}}_n$, т. е.

$$D\bar\omega_{\bar I}^{\bar K} = \bar\omega_{\bar I}^{\bar L}\wedge\bar\omega_{\bar L}^{\bar K}, \quad \bar\omega_{\bar L}^{\bar L} = 0, \tag{18}$$

причём эти формы являются формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\xi_{\bar K}\}$:

$$d\xi_{\bar K} = \bar\omega_{\bar K}^{\bar L}\xi_{\bar L},$$

где

$$\begin{gathered}
\xi_0 = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}[\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1\ldots\mathrm{B}_{n-1}], \quad \xi_n = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}[\mathrm{B}_n\mathrm{B}_1\ldots\mathrm{B}_{n-1}], \\
\xi_i = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda}}\sum_{k=1}^{n-1}\Lambda_{ki}^n[\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1\ldots\mathrm{B}_{k-1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{k+1}\ldots\mathrm{B}_{n-1}].
\end{gathered} \tag{19}$$

Согласно соотношениям (9), (17) имеем

$$\bar\omega_i^n = \bar\Lambda_{ik}^n\bar\omega_0^k, \tag{20}$$

где

$$\bar\Lambda_{ij}^n = -\Lambda_{ij}^n. \tag{21}$$

Дифференциальные уравнения (10) в силу (17), (21) можно переписать в виде

$$d\bar\Lambda_{ij}^n + \bar\Lambda_{ij}^n\bar\omega_n^n - \bar\Lambda_{ik}^n\bar\omega_j^k - \bar\Lambda_{kj}^n\bar\omega_i^k = \bar\Lambda_{ijk}^n\bar\omega_0^k,$$

где

$$\bar\Lambda_{ijk}^n = \Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{ij}^n\left(\frac{g_{k0}}{c} + \frac{\mathrm{A}_k}{n+1}\right). \tag{22}$$

Используя соотношения (7), (8), (17), получим

$$\bar\omega_0^0 = -\frac{\bar g_{k0}}{c}\bar\omega_0^k, \tag{23}$$

где

$$\bar g_{k0} = \frac{c}{n+1}\mathrm{A}_k. \tag{24}$$

Аналогично, используя равенства (21), (22), (24), находим, что функции

$$\bar{\mathrm{A}}_k \overset{\mathrm{def}}{=} \bar\Lambda_n^{st}\bar\Lambda_{tsk}^n + \frac{2}{c}\bar g_{k0}$$

(см. (13)) имеют строение

$$\bar{\mathrm{A}}_k = \frac{n+1}{c} g_{k0}. \tag{25}$$

В [8] доказано следующее:

1) преобразование

$$J\colon \omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} \to \bar{\omega}_{\bar{I}}^{\bar{K}}$$

структурных форм по закону (17) является инволютивным, т. е. $J \equiv J^{-1}$;

2) регулярная гиперповерхность V_{n-1}, погружённая в проективно-метрическое пространство K_n, $n \geqslant 3$, индуцирует

   а) в третьей дифференциальной окрестности проективное пространство $\bar{\mathrm{P}}_n$, двойственное K_n (см. [6]) относительно инволютивного преобразования структурных форм по закону (17), причём пространство $\bar{P}_n$ в четвёртой дифференциальной окрестности имеет внутренним образом определяемый тангенциальный абсолют $\bar{Q}_{n-1}$, двойственный Q_{n-1}; следовательно, регулярная гиперповерхность $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$ в четвёртой дифференциальной окрестности внутренним образом индуцирует проективно-метрическое пространство $\bar{\mathrm{K}}_n$, двойственное K_n;

   б) во второй дифференциальной окрестности подмногообразие $\bar{\mathrm{V}}_{n-1} \subset \bar{\mathrm{P}}_n$, двойственное исходной гиперповерхности V_{n-1}; его дифференциальное уравнение в тангенциальном репере (19) имеет вид $\bar{\omega}_0^n = 0$, причём тангенциальная гиперповерхность $\bar{\mathrm{V}}_{n-1}$ представляет собой $(n-1)$-параметрическое семейство касательных гиперплоскостей к V_{n-1}.

4. Уравнения (5), (6) согласно (8), (9) имеют вид

$$\nabla a_{ij} = -\frac{1}{c}(a_{ik}g_{j0} + a_{jk}g_{i0})\omega_0^k + a_{ni}\omega_j^n + a_{nj}\omega_i^n, \tag{26}$$

$$\nabla a_{ni} - a_{ik}\omega_n^k = -\frac{1}{c}(a_{ik}g_{n0} + a_{nk}g_{i0})\omega_0^k + a_{nn}\omega_i^n, \tag{27}$$

$$\nabla a_{nn} - 2a_{nk}\omega_n^k = -\frac{2}{c}a_{nk}g_{n0}\omega_0^k, \tag{28}$$

$$dg_{i0} - g_{k0}\omega_i^k - c\omega_i^0 = a_{ik}\omega_0^k + g_{n0}\omega_i^n, \tag{29}$$

$$dg_{n0} - g_{k0}\omega_n^k - g_{n0}\omega_n^n - c\omega_n^0 = a_{nk}\omega_0^k. \tag{30}$$

С учётом результатов Г. Ф. Лаптева [4] в [1] на регулярной гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$ в четвёртой дифференциальной окрестности найдено поле соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1}^2:

$$\Lambda_{ij}^n x^i x^j + 2\frac{\Lambda_i}{n+1}x^i x^n + S_n(x^n)^2 = 2x^0 x^n, \tag{31}$$

где

$$\Lambda_i = \mathrm{A}_i + (n+1)G_i, \quad G_i = -\frac{1}{c}g_{i0}, \tag{32}$$

$$\nabla\Lambda_i + (n+1)(\omega_i^0 - \Lambda_{is}^n\omega_n^s) = \Lambda_{ij}\omega_0^j,$$
$$S_n = \frac{1}{n^2-1}\Lambda_n^{st}\left(\Lambda_{st} - \frac{\Lambda_s\Lambda_t}{n+1} + \Lambda_s G_t\right). \tag{33}$$

Известно [1], что необходимым и достаточным условием вырождения гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$ в гиперквадрику (31) является обращение в нуль симметричного тензора Дарбу

$$D_{ijk}^n = (n+1)(\Lambda_{ijk}^n - G_i\Lambda_{jk}^n - G_j\Lambda_{ik}^n) - \Lambda_{(ij}^n\mathrm{A}_{k)}. \tag{34}$$

Пусть гиперповерхность $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$ нормализована [5] полями квазитензоров G_n^i и G_i третьего и первого порядков соответственно, где

$$G_n^i \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{n+1}\Lambda_n^{ij}\mathrm{A}_j, \quad \nabla G_n^i + \omega_n^i = G_{nk}^i\omega_0^k, \quad \nabla G_i + \omega_i^0 = G_{ik}\omega_0^k; \tag{35}$$

в силу (12), (14) и (29) имеют место соотношения

$$G_{nk}^i = \frac{1}{n+1}\Lambda_n^{is}(\Lambda_n^{lt}\Lambda_{slk}^n\mathrm{A}_t - \mathrm{A}_{sk}), \tag{36}$$

$$G_{ik} = -\frac{1}{c}(a_{ik} + g_{n0}\Lambda_{ik}^n). \tag{37}$$

Нетрудно заметить, что нормализация гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$ полями квазитензоров G_n^i, G_i является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (31).

Возьмём систему форм Пфаффа $\{\overset{1}{\theta}{}^i, \overset{1}{\theta}{}_j^i\}$, где

$$\overset{1}{\theta}{}^i = \omega_0^i, \quad \overset{1}{\theta}{}_j^i = \omega_j^i - G_n^i\omega_j^n + G_j\omega_0^i - \delta_j^i\underbrace{(\omega_0^0 - G_k\omega_0^k)}_{0}; \tag{38}$$

эта система согласно (1), (7), (9), (35) удовлетворяет структурным уравнениям Картана—Лаптева [2, 4]

$$D\overset{1}{\theta}{}^i = \overset{1}{\theta}{}^k \wedge \overset{1}{\theta}{}_k^i, \quad D\overset{1}{\theta}{}_j^i = \overset{1}{\theta}{}_j^k \wedge \overset{1}{\theta}{}_k^i + \frac{1}{2}\overset{1}{r}{}_{jst}^i\overset{1}{\theta}{}^s \wedge \overset{1}{\theta}{}^t, \tag{39}$$

где

$$\overset{1}{r}{}_{jst}^i = -2\Big[G_n^kG_n^i\Lambda_{j[s}^n\Lambda_{t]k}^n + \frac{1}{n+1}\Lambda_n^{ik}(\Lambda_n^{lp}\mathrm{A}_p\Lambda_{kl[s}^n\Lambda_{t]j}^n - \mathrm{A}_{k[s}\Lambda_{t]j}^n) -$$
$$- G_n^kG_k\Lambda_{j[s}^n\delta_{t]}^i + \frac{1}{c}(a_{j[s}\delta_{t]}^i + g_{n0}\Lambda_{j[s}^n\delta_{t]}^i)\Big]. \tag{40}$$

Следовательно, нормализация (G_n^i, G_i) гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$ индуцирует аффинную связность $\overset{1}{\nabla}$ без кручения; её тензор кривизны имеет строение (40). Так как $2\overset{1}{r}_{[js]} = -\overset{1}{r}{}^i_{ijs} = 0$ (при доказательстве этого следует использовать тождества Риччи $\overset{1}{r}{}^i_{(jst)} = 0$ и соотношения (10), (14)), где $\overset{1}{r}_{js} = \overset{1}{r}{}^i_{jsi}$ — тензор Риччи, то связность $\overset{1}{\nabla}$ является эквиаффинной [5]. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Нормализация регулярной гиперповерхности* $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$, $n \geqslant 3$, *определяемая внутренним образом в третьей дифференциальной окрестности полями квазитензоров* G_n^i *и* G_i (*см.* (32), (33), (35)), *является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик* (31) *и индуцирует эквиаффинную связность* $\overset{1}{\nabla}$ *со структурными формами* (38) (*эквиаффинную связность первого рода*).

5. Согласно [6] нормализация одной из регулярных гиперповерхностей $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$, $\bar{V}_{n-1} \subset \bar{\mathrm{K}}_n$ равносильна нормализации другой; при этом компоненты полей оснащающих объектов $\{G_n^i, G_i\}$, $\{\bar{G}_n^i, \bar{G}_i\}$ связаны соотношениями

$$\bar{G}_n^i = -\Lambda_n^{ij} G_j, \quad \bar{G}_i = \Lambda_{ij}^n C_n^j. \tag{41}$$

Эти функции в силу (10), (12), (17) удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (35)

$$d\bar{G}_n^i - \bar{G}_n^i \bar{\omega}_n^n + \bar{G}_n^j \bar{\omega}_j^i + \bar{\omega}_n^i = \bar{G}_{nj}^i \bar{\omega}_0^j, \quad d\bar{G}_i - \bar{G}_j \bar{\omega}_i^j + \bar{\omega}_i^0 = \bar{G}_{ij} \bar{\omega}_0^j, \tag{42}$$

где

$$\bar{G}_{nj}^i = \Lambda_n^{ik}\left(\frac{1}{c} a_{kj} - G_k G_j\right) + \frac{1}{c} g_{n0} \delta_j^i, \quad \bar{G}_{ij} = G_n^k \left(\Lambda_{ik}^n \frac{\mathrm{A}_j}{n+1} - \Lambda_{kij}^n\right). \tag{43}$$

По аналогии с (38) возьмём систему форм Пфаффа $\{\overset{2}{\theta}{}^i, \overset{2}{\theta}{}^i_j\}$, где

$$\overset{2}{\theta}{}^i = \bar{\omega}_0^i, \quad \overset{2}{\theta}{}^i_j = \bar{\omega}_j^i - \bar{G}_n^i \bar{\omega}_j^n + \bar{G}_j \bar{\omega}_0^i - \delta_j^i(\bar{\omega}_0^0 - \bar{G}_k \bar{\omega}_0^k). \tag{44}$$

Согласно (18), (42) система форм (44) удовлетворяет структурным уравнениям пространства аффинной связности без кручения, так как

$$D\overset{2}{\theta}{}^i = \overset{2}{\theta} 2^k \wedge \overset{2}{\theta}{}^i_k, \quad D\overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{2}{\theta}{}^k_j \wedge \overset{2}{\theta}{}^i_k + \frac{1}{2} \overset{2}{r}{}^i_{jst} \overset{2}{\theta}{}^s \wedge \overset{2}{\theta}{}^t. \tag{45}$$

Тензор кривизны $\overset{2}{r}{}^i_{jst}$ аффинной связности $\overset{2}{\nabla}$ имеет строение

$$\overset{2}{r}{}^i_{jst} = 2\Bigg[G_k G_n^k \Lambda_{j[s}^n \delta_{t]}^i + \frac{1}{c}(\Lambda_n^{ik} a_{k[s} \Lambda_{t]j}^n + g_{n0} \delta_{[s}^i \Lambda_{t]j}^n) - G_n^k \Lambda_{kj[s}^n \delta_{t]}^i -$$
$$- \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} \mathrm{A}_j \mathrm{A}_{[s} \delta_{t]}^i + \mathrm{A}_{j[s} \delta_{t]}^i\right)\Bigg]. \tag{46}$$

Согласно (10), (14), (46) справедливо равенство $\overset{2}{r}{}^i_{ist} = 0$, т. е. тензор Риччи $\overset{2}{r}_{st}$ связности $\overset{2}{\nabla}$ симметричен. Следовательно, аффинная связность $\overset{2}{\nabla}$ является эквиаффинной.

Из выражений (38), (44) для форм $\overset{1}{\theta}{}^i_j$ и $\overset{2}{\theta}{}^i_j$ с использованием (17), (41) выводим, что

$$\overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + G^i_n\omega^n_j - G_j\omega^i_0 + \Lambda^{ik}_n(\Lambda^n_{kjs}\omega^s_0 - G_k\omega^n_j) + \Lambda^n_{jk}G^k_n\omega^i_0 + \delta^i_jG^k_n\omega^n_k. \tag{47}$$

Теперь дифференциальные уравнения (10) с использованием (38), (47) можно записать в виде

$$d\Lambda^n_{ij} - \Lambda^n_{ik}\overset{2}{\theta}{}^k_j - \Lambda^n_{kj}\overset{1}{\theta}{}^k_i = -\Lambda^n_{ij}(\omega^n_n + G^k_n\omega^n_k). \tag{48}$$

Это соотношение показывает, что аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ сопряжены [5] относительно поля тензора Λ^n_{ij}.

Аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$, средняя [5] по отношению к связностям $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, определяется системой структурных форм

$$\left\{\omega^i_0,\ \overset{0}{\theta}{}^i_j = \frac{1}{2}(\overset{1}{\theta}{}^i_j + \overset{2}{\theta}{}^i_j)\right\}.$$

Для средней связности согласно уравнениям (48) получаем соотношение

$$d\Lambda^n_{ij} - \Lambda^n_{ik}\overset{0}{\theta}{}^k_j - \Lambda^n_{kj}\overset{0}{\theta}{}^k_i = -\Lambda^n_{ij}\underbrace{(\omega^n_n + G^k_n\omega^n_k)}_{\Theta}. \tag{49}$$

Последние уравнения говорят о том, что средняя аффинная связность является вейлевой [5] с полем метрического тензора Λ^n_{ij}. Отметим, что средняя связность $\overset{0}{\nabla}$, как и связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, является эквиаффинной; последнее подтверждается и тем, что дополнительная форма Θ (см. (49)) в силу (2), (8), (43) есть полный дифференциал некоторой функции: $D\Theta = 0$. Следовательно, средняя аффинная связность $\overset{0}{\nabla}$ является римановой с полем метрического тензора Λ^n_{ij}.

Таким образом, справедливы следующие предложения.

Теорема 2. *Нормализация регулярной гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$, $n \geqslant 3$, внутренним образом определяемая в третьей дифференциальной окрестности полями квазитензоров G^i_n и G_i, индуцирует, кроме эквиаффинной связности первого рода $\overset{1}{\nabla}$, эквиаффинную связность второго рода $\overset{2}{\nabla}$, двойственную первой.*

Теорема 3. *Эквиаффинные связности первого рода $\overset{1}{\nabla}$ и второго рода $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые на гиперповерхности V_{n-1} в проективно-метрическом пространстве K_n, нормализованной полями квазитензоров G^i_n и G_i, являются сопряжёнными относительно поля асимптотического тензора Λ^n_{ij}.*

Заметим, что тензоры кривизны (40) и (46) аффинных связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ связаны соотношениями

$$\overset{2}{r}{}^i_{jst} = -\Lambda^{il}_n \Lambda^n_{kj} \overset{1}{r}{}^k_{lst},$$

которые получаются в результате замыкания уравнений (48).

Теорема 4. *Аффинная связность* $\overset{0}{\nabla}$, *средняя по отношению к эквиаффинным связностям первого рода* $\overset{1}{\nabla}$ *и второго рода* $\overset{2}{\nabla}$, *является римановой с полем метрического тензора* Λ^n_{ij}.

Теорема 5. *Двойственные аффинные связности* $\overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{2}{\nabla}$, *индуцируемые нормализацией регулярной гиперповерхности* $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$, $n \geqslant 3$, *полями квазитензоров* G^i_n, G_i, *совпадают тогда и только тогда, когда гиперповерхность вырождается в гиперквадрику* (31).

Последнее предложение непосредственно следует из соотношений

$$\overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + \frac{1}{n+1} \Lambda^{ik}_n D^n_{kjs} \omega^s_0,$$

которые получаются из (47) с использованием выражения (34) для тензора Дарбу гиперповерхности.

6. Пусть гиперповерхность $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$ оснащена в смысле Э. Картана [10] полем геометрического объекта $\{\nu^i_n, \nu_n\}$:

$$\nabla \nu^i_n + \omega^i_n = \nu^i_{nk} \omega^k_0, \quad \nabla \nu_n + \nu^k_n \omega^0_k + \omega^0_n = \nu_{nk} \omega^k_0. \tag{50}$$

Система n^2 форм Пфаффа $\{\Theta^{\bar{i}}_{\bar{j}}\}$, где

$$\Theta^i_0 = \omega^i_0, \quad \Theta^0_0 = G_k \omega^k_0, \quad \Theta^i_j = \omega^i_j - \nu^i_n \omega^n_j, \quad \Theta^0_j = \omega^0_j - \nu_n \omega^n_j, \tag{51}$$

в силу (2), (50) удовлетворяет структурным уравнениям Картана—Лаптева [2,4]

$$D\Theta^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \Theta^{\bar{k}}_{\bar{j}} \wedge \Theta^{\bar{i}}_{\bar{k}} + \frac{1}{2} R^{\bar{i}}_{\bar{j}st} \omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \tag{52}$$

а следовательно, определяет пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n-1,n-1}$ без кручения ($R^i_{0st} \equiv 0$). Тензор кривизны-кручения $R^{\bar{i}}_{\bar{j}st}$ пространства $\mathrm{P}_{n-1,n-1}$ имеет следующее строение:

$$\begin{aligned} &R^i_{0st} = 0, \quad R^i_{jst} = 2(\nu_n \Lambda^n_{j[s} \delta^i_{t]} - \nu^k_n \nu^i_n \Lambda^n_{j[s} \Lambda^n_{t]k} - \nu^i_{n[s} \Lambda^n_{t]j}), \\ &R^0_{0st} = 0, \quad R^0_{jst} = 2(\nu_n \Lambda^n_{j[s} G_{t]} - \nu^k_n \nu_n \Lambda^n_{j[s} \Lambda^n_{t]k} - \nu_{n[s} \Lambda^n_{t]j}). \end{aligned} \tag{53}$$

Замыкая квадратичные уравнения

$$D\Theta^{\bar{i}}_0 = \Theta^{\bar{k}}_0 \wedge \Theta^{\bar{i}}_{\bar{k}}$$

(см. (52), (53)), получаем тождества $R^{\bar{i}}_{(kst)} \equiv 0$.

Предположим, что симметричный тензор a_{ij} (см. (26)—(30)) невырожден. Следовательно, существует обратный тензор a^{ij}, компоненты которого определяются из соотношений $a_{ik}a^{kj} = \delta_i^j$ и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$da^{ij} + a^{ik}\omega_k^j + a^{kj}\omega_k^i = a_k^{ij}\omega_0^k, \tag{54}$$

где

$$a_k^{ij} = \frac{1}{c}(a^{is}\delta_k^j + a^{sj}\delta_k^i)g_{s0} - (a^{is}a^{jt} + a^{js}a^{it})a_{ns}\Lambda_{ik}^n. \tag{55}$$

Согласно уравнениям (27), (30), (35), (54) поле геометрического объекта $\{H_n^i, H_n\}$, где

$$\begin{gathered} H_n^i = -a^{ik}a_{nk}, \quad H_n = G_k H_n^k - \frac{g_{n0}}{c}, \\ \nabla H_n^i + \omega_n^i = H_{nk}^i\omega_0^k, \quad \nabla H_n + H_n^k\omega_k^0 + \omega_n^0 = H_{nk}\omega_0^k, \end{gathered} \tag{56}$$

в первой дифференциальной окрестности внутренним образом определяет оснащение в смысле Э. Картана гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$. Оснащающая точка S_n имеет разложение

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{B}_n + H_n^k\mathrm{B}_k + H_n\mathrm{B}_0. \tag{57}$$

В уравнениях (56) строение функций H_{nk}^i и H_{nk} согласно (37) описывается следующими выражениями:

$$\begin{gathered} H_{nk}^i = -H_n\delta_k^i + (H_n^iH_n^s - T_{nn}a^{is})\Lambda_{sk}^n, \\ H_{nk} = H_n(H_n^s\Lambda_{sk}^n - G_k) - T_{nn}G_ia^{is}\Lambda_{sk}^n, \\ T_{nn} = a_{nn} - a^{ts}a_{nt}a_{ns}. \end{gathered} \tag{58}$$

Заметим, что в соотношениях (58) функция T_{nn} есть относительный инвариант. Так как

$$d\mathrm{S}_n = (\omega_n^n + H_n^k\omega_k^n)\mathrm{S}_n - T_{nn}a^{ks}(\omega_s^n\mathrm{B}_k + G_s\omega_k^n\mathrm{B}_0), \tag{59}$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Относительный инвариант T_{nn} обращается в нуль тогда и только тогда, когда гиперповерхность $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$, $n \geqslant 3$, есть проективная гиперсфера с центром в точке S_n (см. (57)).*

При оснащении в смысле Э. Картана гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$ полем геометрического объекта $\{H_n^i, H_n\}$ компоненты тензора кривизны-кручения пространства проективной связности $\mathrm{P}_{n-1,n-1}$ в силу (53), (56), (58) имеют следующее строение:

$$R_{0st}^0 = R_{0st}^i = 0, \quad R_{jst}^i = 2T_{nn}a^{il}\Lambda_{l[s}^n\Lambda_{t]j}^n, \quad R_{jst}^0 = G_lR_{jst}^l. \tag{60}$$

Из соотношений (60) с учётом теоремы 6 выводится следующее утверждение.

Теорема 7. *Пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n-1,n-1}$, индуцируемое оснащением в смысле Э. Картана гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$, $n \geqslant 3$, полем геометрического объекта $\{H_n^i, H_n\}$, является плоским тогда и только тогда, когда подмногообразие V_{n-1} есть проективная гиперсфера с центром в точке S_n.*

7. Предположим, что гиперповерхность V_{n-1} проективно-метрического пространства K_n нормализована полями квазитензоров H_n^i и G_i (см. (56) и (35)). Возьмём систему форм Пфаффа $\{\Omega^i, \Omega_j^i\}$, где

$$\Omega^i = \omega_0^i, \quad \Omega_j^i = \omega_j^i - H_n^i \omega_j^n + G_j \omega_0^i. \tag{61}$$

Эта система в силу уравнений (35), (56) удовлетворяет структурным уравнениям Картана—Лаптева [4, с. 315; 2, с. 82]

$$D\Omega^i = \Omega^k \wedge \Omega_k^i, \quad D\Omega_j^i = \Omega_j^k \wedge \Omega_k^i + \frac{1}{2}\mathfrak{R}_{jst}^i \Omega^s \wedge \Omega^t,$$

где

$$\mathfrak{R}_{jst}^i = 2\left[T_{nn} a^{ip} \Lambda_{p[s}^n \Lambda_{t]j}^n - \frac{1}{c} a_{j[s} \delta_{t]}^i\right]. \tag{62}$$

Следовательно, система форм (61) определяет пространство аффинной связности $\overset{0}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ без кручения. Тензор кривизны $\mathfrak{R}_{jst}^i$ этого пространства имеет строение (62).

Так как тензор Риччи $\mathfrak{R}_{js} = \mathfrak{R}_{jsi}^i$ удовлетворяет соотношениям $2\mathfrak{R}_{[js]} = - \mathfrak{R}_{ijs}^i$ (последнее непосредственно следует из тождеств Риччи $\mathfrak{R}_{(jst)}^i = 0$), то из (62) получаем, что $\mathfrak{R}_{[js]} = 0$, т. е. пространство $\overset{0}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ является эквиаффинным. Кроме того, пространство $\overset{0}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ является вейлевым с полем невырожденного тензора a_{ij}, так как уравнения (26) в силу (61) можно переписать в виде

$$da_{ij} - a_{ik}\Omega_j^k - a_{kj}\Omega_i^k = 0.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *В случае невырожденного симметричного тензора* a_{ij} (*см.* (26)) *поля квазитензоров* H_n^i *и* G_i *нормализуют гиперповерхность* V_{n-1} *проективно-метрического пространства* K_n *взаимно относительно его абсолюта* Q_{n-1} (*см.* (4)), *причём эта нормализация индуцирует риманову связность* ∇ *с полем метрического тензора* a_{ij}. *Структурные формы и тензор кривизны этой связности имеют соответственно строения* (61) *и* (62).

В условиях теоремы 8 из (62) следует, что тензор кривизны $\mathfrak{R}_{jst}^i$ риманова пространства R_{n-1} имеет строение

$$\mathfrak{R}_{jst}^i = -\frac{2}{c} a_{j[s}\delta_{t]}^i \tag{63}$$

тогда и только тогда, когда относительный инвариант T_{nn} (см. (58)) обращается в нуль. Известно [5], что риманово пространство R_{n-1} постоянной кривизны $\mathrm{K} = -\frac{1}{c}$ характеризуется строением (63) его тензора кривизны $\mathfrak{R}_{jst}^i$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 9. *Нормализация гиперповерхности* V_{n-1}, *вложенной в проективно-метрическое пространство* K_n $(n \geqslant 3)$, *полями квазитензоров* H_n^i, G_i *индуцирует риманово пространство* R_{n-1} *постоянной кривизны* K *тогда и только тогда, когда относительный инвариант* T_{nn} *обращается в нуль. При этом* $\mathrm{K} = -1/c$.

Замечание. Из (63) следует, что тензор Риччи $\mathfrak{R}_{js}$ пространства R_{n-1} постоянной кривизны пропорционален метрическому тензору a_{js} с постоянным коэффициентом пропорциональности:

$$\mathfrak{R}_{js} = -\frac{n-2}{c} a_{js}.$$

Следовательно, пространство R_{n-1} является эйнштейновым [3, с. 268].

Теорема 9 с учётом теорем 6, 7 эквивалентна следующему результату.

Теорема 10. *Пространство проективной связности* $\mathrm{P}_{n-1,n-1}$, *индуцируемое оснащением в смысле Э. Картана гиперповерхности* $\mathrm{V}_{n-1} \subset \mathrm{K}_n$, $n \geqslant 3$, *полем геометрического объекта* $\{H_n^i, H_n\}$, *является плоским тогда и только тогда, когда её нормализация полем объекта* $\{H_n^i, G_i\}$ *в касательном расслоении индуцирует риманово пространство* R_{n-1} *постоянной кривизны* $\mathrm{K} = -1/c$.

Литература

[1] Абруков Д. А. Внутренняя геометрия поверхностей и распределений в проективно-метрическом пространстве. — Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т им. И. Я. Яковлева, 2003.

[2] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1979. — Т. 9. — С. 5—246.

[3] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.

[4] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 275—382.

[5] Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.

[6] Столяров А. В. Двойственная теория оснащённых многообразий. — Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т им. И. Я. Яковлева, 1994.

[7] Столяров А. В. Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2001. — Т. 32. — С. 94—101.

[8] Столяров А. В. Двойственные проективно-метрические пространства, определяемые регулярной гиперповерхностью // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. — 2009. — Т. 1 (61). — С. 29—36.

[9] Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.

[10] Cartan E. Les éspaces a connexion projective // Труды семинара по векторному и тензорному анализу МГУ. — 1937. — Т. 4. — С. 147—159.