О фактор-ткани $\bar{W}(\rho, r, r)$ три-ткани $W(r, r, r)$

Г. А. ТОЛСТИХИНА
Тверской государственный университет
e-mail: science@tversu.ru

УДК 514.7

Ключевые слова: три-ткань, фактор-ткань, конгруэнция.

Аннотация

Для три-ткани $W(r,r,r)$, образованной на $2r$-мерном дифференцируемом многообразии тремя r-мерными гладкими слоениями, определено понятие фактор-ткани $\bar{W}(\rho,r,r)$ $(1 \leqslant \rho < r)$ и построено вложение последней в исходную ткань $W(r,r,r)$. Описанная конструкция представляет собой геометрический аналог обобщения известного в теории групп Ли канонического продолжения группы Ли преобразований до её параметрической группы.

Abstract

G. A. Tolstikhina, On the factor-web $\bar{W}(\rho,r,r)$ of the three-web $W(r,r,r)$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 115—128.

The notion of the factor-web $\bar{W}(\rho,r,r)$ $(1 \leqslant \rho < r)$ is defined for the three-web $W(r,r,r)$ formed on a $2r$-dimensional differentiable manifold by three r-dimensional smooth foliations. Embedding of the factor-web in the initial web $W(r,r,r)$ is constructed. This construction is a well-known geometric analog of the canonical extension of a Lie group of transformations to its parameter group.

1. Введение

Напомним некоторые определения. Пусть G — r-мерная группа Ли с единицей e и операцией

$$g\colon G \times G \to G, \quad c = g(a,b), \quad a,b,c \in G, \tag{1.1}$$

H — её подгруппа коразмерности ρ, G/H — ρ-мерное однородное пространство. Гладкая функция

$$\phi\colon G \times G/H \to G/H, \quad z = \phi(a,y), \quad a \in G, \quad y,z \in G/H, \tag{1.2}$$

удовлетворяющая условиям

$$\phi(e,y) = y, \quad \phi\bigl(a, \phi(b,y)\bigr) = \phi(g(a,b),y), \quad a,b \in G, \quad y \in G/H, \tag{1.3}$$

задаёт левое действие группы G на однородном пространстве G/H [5]. Группа G называется параметрической группой группы Ли преобразований (1.2).

Известно [4], что группу Ли преобразований (1.2) можно канонически продолжить до её параметрической группы (1.1). Это означает существование локальных координат в группе G, в которых её уравнение (1.1) записывается в виде

$$c^a = \phi^a(a^j, b^c), \quad c^u = g^u(a^j, b^k), \tag{1.4}$$

где $j, k = \overline{1, r}$, $a, c = \overline{1, \rho}$, $u = \overline{\rho + 1, r}$, причём первая серия уравнений (1.4) совпадает с уравнениями (1.2), если обозначить $c^a \to z^a$, $b^c \to y^c$. Величины b^c (или c^a) являются локальными координатами на базе B слоения G/H.

Геометрическим аналогом такого продолжения является каноническое вложение три-ткани $GW(\rho, r, r)$, определяемой функцией ϕ, в групповую три-ткань $W(r, r, r)$, порождаемую группой G (см. [9]). Напомним [1], что групповая ткань $W(r, r, r)$ (или ткань R) образована на $2r$-мерном многообразии $G \times G$ тремя слоениями r-мерных слоёв: $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$ и $c = g(a, b) = \mathrm{const}$ (см. (1.1)). С другой стороны, согласно [8] три-ткань $GW(\rho, r, r)$ образована на прямом произведении $G \times G/H$ размерности $r + \rho$ одним слоением ρ-мерных слоёв $a = \mathrm{const}$ и двумя слоениями r-мерных слоёв $y = \mathrm{const}$ и $z = \phi(a, y) = \mathrm{const}$ (см. (1.2)). В [9] показано, как найти структурные уравнения ткани $GW(\rho, r, r)$ по уравнениям Маурера—Картана группы G.

Допустим, что уравнения произвольной три-ткани $W(r, r, r)$ в некоторых локальных координатах приведены к виду (1.4), где $\phi = (\phi^a)$ — произвольная функция, для которой условия (1.3), вообще говоря, не выполняются. Тогда ϕ будет определять некоторую, вообще говоря произвольную, три-ткань $W(\rho, r, r)$. В настоящей работе такая ткань названа *фактор-тканью* три-ткани $W(r, r, r)$. Это понятие связано с понятием *конгруэнции* ткани, которая определена как геометрический аналог понятия конгруэнции в алгебре [6] и названа W_1^ρ-конгруэнцией. Найдены необходимые и достаточные условия существования на ткани $W(r, r, r)$ W_1^ρ-конгруэнции (предложение 1), которая по определению порождает фактор-ткань $\bar{W}(\rho, r, r)$.

Доказано, что для любой ткани $W(\rho, r, r)$ существует три-ткань $W(r, r, r)$, для которой ткань $W(\rho, r, r)$ является фактор-тканью (теорема 1). Это утверждение справедливо для *произвольной* ткани $W(\rho, r, r)$, или, как ещё говорят, ткани наиболее общего вида. Это ткань, для которой на функцию $\phi = (\phi^a)$ (см. (1.4)) не накладывается никаких ограничений, кроме условий

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \phi^a}{\partial a^j}\right) = \mathrm{rank}\left(\frac{\partial \phi^a}{\partial b^c}\right) = \rho.$$

В случае если функция ϕ обладает дополнительными свойствами, как, например, условия (1.3) для ткани $GW(\rho, r, r)$, произвол существования ткани $W(r, r, r)$, указанный в теореме 1, сужается. Так, для заданной ткани $GW(\rho, r, r)$, порождаемой группой Ли преобразований (1.2), однозначно определяется групповая ткань R, порождаемая параметрической группой G. При этом ткань $GW(\rho, r, r)$ будет фактор-тканью ткани R (теорема 2).

Условия, при которых ткань $W(r, r, r)$ допускает фактор-ткань $\bar{W}(\rho, r, r)$, записаны также в терминах структурных уравнений (предложение 2) и G_W-структуры (предложение 3).

2.

Пусть $W(r, r, r)$ — три-ткань, образованная тремя гладкими r-мерными слоениями λ_1, λ_2 и λ_3 r-мерных слоёв общего положения на $2r$-мерном дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$. Базы этих слоений обозначим X, Y и Z соответственно, $\dim X = \dim Y = \dim Z = r$. Следуя [2], слоения λ_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ зададим в некоторых локальных координатах на $\mathcal{M}$ уравнениями

$$\lambda_1\colon\ x^i = c_1^i, \quad \lambda_2\colon\ y^i = c_2^i, \quad \lambda_3\colon\ z^i = f^i(x^j, y^k) = c_3^i, \tag{2.1}$$

где $i, j, k, \ldots = \overline{1, r}$, $(x^i) = x \in X$, $(y^i) = y \in Y$, $(z^i) = z \in Z$, c_α^i — постоянные (параметры слоёв ткани), функции f^i принадлежат классу C^∞ и всюду в области определения ткани выполняются условия

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) \neq 0, \quad \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^k}\right) \neq 0. \tag{2.2}$$

Уравнения

$$z^i = f^i(x^j, y^k) \tag{2.3}$$

в силу (2.1) связывают параметры слоёв $\mathcal{F}_1 \in \lambda_1$, $\mathcal{F}_2 \in \lambda_2$ и $\mathcal{F}_3 \in \lambda_3$, проходящих через точку (x, y) многообразия $\mathcal{M}$. Они называются уравнениями ткани $W(r, r, r)$ [2]. Слои первого, второго и третьего слоений ткани $W(r, r, r)$ называются также вертикальными, горизонтальными и наклонными слоями соответственно.

С другой стороны, уравнения (2.3) определяют трёхбазисную бинарную операцию

$$f\colon X \times Y \to Z, \quad z = f(x, y), \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad z \in Z, \tag{2.4}$$

которая является гладкой локальной квазигруппой и называется локальной координатной квазигруппой три-ткани $W(r, r, r)$ [2].

Параметры x, y и z слоений ткани, входящие в уравнение (2.4), допускают изотопические преобразования вида

$$\tilde{x} = \alpha(x), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z), \tag{2.5}$$

где α, β, γ — локальные диффеоморфизмы. При этом уравнение (2.4) преобразуется к виду

$$\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \gamma\Big(f\big(\alpha^{-1}(\tilde{x}), \beta^{-1}(\tilde{y})\big)\Big). \tag{2.6}$$

Три-ткани $W(r, r, r)$ и $\tilde{W}(r, r, r)$, определяемые квазигруппами (2.4) и (2.6) соответственно, эквивалентны [10].

Определим для ткани $W(r,r,r)$ аналог алгебраического понятия *конгруэнции* [6]. Пусть на множестве X с операцией $(\cdot)\colon X\times X\to X$, $z=x\cdot y$, задано отношение эквивалентности φ, для которого выполняется условие

$$x_1\,\varphi\,x_2,\quad y_1\,\varphi\,y_2 \iff z_1\,\varphi\,z_2,$$

где $z_1=x_1\cdot y_1$, $z_2=x_2\cdot y_2$. Тогда говорят, что φ определяет на X конгруэнцию.

Пусть теперь λ_Y — ρ-мерное слоение $(r-\rho)$-мерных подмногообразий на базе Y слоения λ_2 три-ткани $W(r,r,r)$. Локальную базу этого слоения обозначим $\bar{Y}$, $\dim\bar{Y}=\rho$. Введём отношение эквивалентности φ_2 на λ_2 следующим образом. На многообразии $\mathcal{M}$ ткани $W(r,r,r)$ каждому слою Y' слоения λ_Y отвечает $(2r-\rho)$-мерное подмногообразие $K_2^{2r-\rho}$, образованное $(r-\rho)$-параметрическим семейством r-мерных горизонтальных слоёв ткани $W(r,r,r)$. Два слоя $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_2'$ из λ_2 будем называть эквивалентными ($\mathcal{F}_2\;\varphi_2\;\mathcal{F}_2'$), если они принадлежат одному и тому же подмногообразию $K_2^{2r-\rho}$ (рис. 1). Это означает, что точки y и y' на Y, соответствующие слоям $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_2'$, лежат на некотором слое Y' из λ_Y.

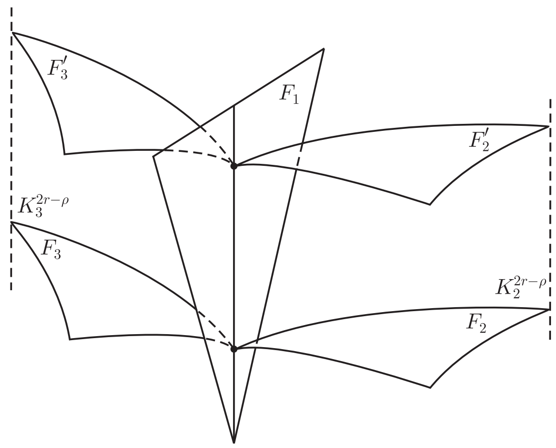

Рис. 1

Далее зафиксируем произвольный вертикальный слой $\mathcal{F}_1$ ткани $W(r,r,r)$ и с его помощью определим на слоении λ_3 некоторое отношение эквивалентности φ_3, индуцируемое отношением φ_2. А именно, два наклонных слоя $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_3'$ назовём эквивалентными ($\mathcal{F}_3\;\varphi_3\;\mathcal{F}_3'$), если $\mathcal{F}_2\;\varphi_2\;\mathcal{F}_2'$, где $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_2'$ — горизонтальные слои, проходящие соответственно через точки пересечения слоёв $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_3'$ с фиксированным слоем $\mathcal{F}_1$ (см. рис. 1). При этом слои $\mathcal{F}_3'$, эквивалентные одному и тому же слою $\mathcal{F}_3$, образуют на $\mathcal{M}$ $(2r-\rho)$-мерное подмногообразие $K_3^{2r-\rho}$. Так как каждому слою $\mathcal{F}_3'$ из $K_3^{2r-\rho}$ отвечает некоторая точка z' базы Z слоения λ_3, то на Z возникает $(r-\rho)$-мерное подмногообразие, обозначим его Z'. Последние образуют на Z ρ-мерное слоение, обозначим его λ_Z. Локальную базу этого слоения обозначим $\bar{Z}$, $\dim\bar{Z}=\rho$.

Таким образом, отношение эквивалентности φ_2 на λ_2 порождает отношение эквивалентности φ_3 на λ_3 с помощью фиксированного слоя $\mathcal{F}_1$ из λ_1, т. е. $\varphi_3 = \varphi_3(\mathcal{F}_1)$. Обратно, для заданного отношения φ_3 на λ_3 и фиксированного слоя $\mathcal{F}_1$ может быть определено аналогичным образом отношение эквивалентности $\varphi_2 = \varphi_2(\mathcal{F}_1)$ на λ_2.

Определение 1. Пусть φ_2 — отношение эквивалентности на слоении λ_2 три-ткани $W(r, r, r)$, определённое как указано выше, и φ_3 — соответствующее отношение эквивалентности на слоении λ_3. Будем говорить, что пара (φ_2, φ_3) задаёт на ткани $W(r, r, r)$ конгруэнцию типа 1 коразмерности ρ, если φ_3 не зависит от выбора вертикального слоя $\mathcal{F}_1$. Такую конгруэнцию назовём W_1^ρ-конгруэнцией.

Допустим, что на ткани $W(r, r, r)$ существует W_1^ρ-конгруэнция. Тогда отношения φ_2 и φ_3 однозначно определяют на слоениях λ_2 и λ_3 классы эквивалентности — подмногообразия $K_2^{2r-\rho}$ и $K_3^{2r-\rho}$ соответственно. На базах Y и Z второго и третьего слоений ткани им отвечают слои Y' и Z' слоений λ_Y и λ_Z соответственно. При этом ρ-мерные фактор-множества λ_2/φ_2 и λ_3/φ_3 локально диффеоморфны базам $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$ указанных слоений.

Положим $X \times \bar{Y} \equiv \bar{\mathcal{M}}$ $(\dim \bar{\mathcal{M}} = r + \rho)$, и пусть $\bar{f} \equiv f|_{\bar{\mathcal{M}}}$,

$$\bar{f}\colon X \times \bar{Y} \to \bar{Z}, \quad \bar{z} = \bar{f}(x, \bar{y}), \quad x \in X, \quad \bar{y} \in \bar{Y}, \quad \bar{z} \in \bar{Z}, \tag{2.7}$$

где f — локальная координатная квазигруппа три-ткани $W(r, r, r)$ (см. (2.4)). Согласно [7] группоид $\bar{f}$ определяет на многообразии $\bar{\mathcal{M}}$ три-ткань, образованную слоениями

$$\bar{\lambda}_1\colon x = \mathrm{const}, \quad \bar{\lambda}_2\colon \bar{y} = \mathrm{const}, \quad \bar{\lambda}_3\colon \bar{z} = \bar{f}(x, \bar{y}) = \mathrm{const}. \tag{2.8}$$

Слои из $\bar{\lambda}_1$ имеют на $\bar{\mathcal{M}}$ размерность ρ и локально диффеоморфны $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$. Слои из $\bar{\lambda}_2$ и $\bar{\lambda}_3$ являются r-мерными и локально диффеоморфны X. Эту ткань обозначим $\bar{W}(\rho, r, r)$.

Определение 2. Три-ткань $\bar{W}(\rho, r, r)$, образованную слоениями (2.8), назовём фактор-тканью ткани $W(r, r, r)$. Будем говорить, что фактор-ткань $\bar{W}(\rho, r, r)$ порождается W_1^ρ-конгруэнцией ткани $W(r, r, r)$, а ткань $W(r, r, r)$ допускает фактор-ткань $\bar{W}(\rho, r, r)$.

Заметим, что введённое понятие фактор-ткани $\bar{W}(\rho, r, r)$ аналогично понятию фактор-ткани $W(\rho, \rho, \rho)$, образованной слоениями *одинаковой* размерности ρ, которое связано с понятием *подткани* три-ткани $W(r, r, r)$, также образованной слоениями одинаковой размерности $r - \rho$ [10].

Покажем, что уравнения (2.3) ткани $W(r, r, r)$, допускающей фактор-ткань $\bar{W}(\rho, r, r)$, могут быть приведены к некоторому специальному виду. Так как фактор-ткань $\bar{W}(\rho, r, r)$ порождается W_1^ρ-конгруэнцией, то на втором и третьем слоениях ткани $W(r, r, r)$ должны быть заданы ρ-параметрические семейства $(2r - \rho)$-мерных подмногообразий $K_2^{2r-\rho}$ и $K_3^{2r-\rho}$ соответственно. Последние определяются на $\mathcal{M}$ соответственно уравнениями

$$\varphi_2^a(y^1, \ldots, y^r) = k_2^a, \quad \varphi_3^a(z^1, \ldots, z^r) = k_3^a, \tag{2.9}$$

где $a, b, \ldots = \overline{1, \rho}$, k_2^a и k_3^a — постоянные (параметры семейств), а функции φ_2^a и φ_3^a являются гладкими. С другой стороны, уравнения (2.9) задают на базах Y и Z второго и третьего слоений ткани $W(r,r,r)$ ρ-мерные слоения λ_Y и λ_Z. Положим

$$\begin{aligned} \bar{y}^a &= \varphi_2^a(y^1, \ldots, y^r), \quad \bar{y}^u = \varphi_2^u(y^1, \ldots, y^r), \\ \bar{z}^b &= \varphi_3^b(z^1, \ldots, z^r), \quad \bar{z}^v = \varphi_3^v(z^1, \ldots, z^r), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $u, v, \ldots = \overline{\rho+1, r}$, φ_2^u и φ_3^v — произвольные гладкие функции, такие что $|\partial\varphi_2^i/\partial y^j| \neq 0$, $|\partial\varphi_3^i/\partial z^j| \neq 0$. Уравнения (2.10) определяют изотопическое преобразование (см. (2.5)), при котором уравнения (2.3) преобразуются к виду

$$\bar{z}^a = \bar{f}^a(x^j, \bar{y}^k), \quad \bar{z}^u = \bar{f}^u(x^j, \bar{y}^k). \tag{2.11}$$

Покажем, что в первой серии уравнений (2.11) будут отсутствовать переменные $\bar{y}^u$. В самом деле, в силу (2.9) и (2.10) подмногообразия $K_2^{2r-\rho}$ и $K_3^{2r-\rho}$ задаются в новых локальных координатах соответственно уравнениями $\bar{y}^a = k_2^a$ и $\bar{z}^b = k_3^b$. Эти же уравнения определяют на базах Y и Z слои из λ_Y и λ_Z соответственно. Из определения 1 следует, что для каждого фиксированного вертикального слоя $\mathcal{F}_1$ ($x^i = \mathrm{const}$) и фиксированного подмногообразия $K_2^{2r-\rho}$ ($\bar{y}^a = \mathrm{const}$) определяется единственное подмногообразие $K_3^{2r-\rho}$ ($\bar{z}^a = \mathrm{const}$). Обратно, фиксируя $\mathcal{F}_1$ и подмногообразие $K_3^{2r-\rho}$, получим единственное подмногообразие $K_2^{2r-\rho}$. Таким образом, при $x^i = \mathrm{const}$ получаем

$$\bar{y}^a = \mathrm{const} \iff \bar{z}^a = \mathrm{const}.$$

Следовательно, уравнения (2.11) должны иметь следующий вид:

$$\bar{z}^a = \bar{f}^a(x^j, \bar{y}^b), \quad \bar{z}^u = \bar{f}^u(x^j, \bar{y}^k). \tag{2.12}$$

Доказано следующее утверждение.

Предложение 1. *Три-ткань $W(r,r,r)$ имеет W_1^ρ-конгруэнцию в том и только в том случае, если на многообразии $\mathcal{M}$ существуют локальные координаты, в которых уравнения* (2.3) *ткани $W(r,r,r)$ приводятся к виду* (2.12). *В этих локальных координатах фактор-ткань $\bar{W}(\rho,r,r)$, порождаемая W_1^ρ-конгруэнцией, определяется первой серией уравнений* (2.12), *а её слоения задаются уравнениями*

$$\bar{\lambda}_1\colon x^i = k_1^i, \quad \bar{\lambda}_2\colon \bar{y}^a = k_2^a, \quad \bar{\lambda}_3\colon \bar{z}^a = \bar{f}^a(x^j, \bar{y}^b) = k_3^a. \tag{2.13}$$

Замечание 1. В новых локальных координатах согласно (2.2) получаем

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\bar{f}^a}{\partial x^j} \\ \frac{\partial\bar{f}^u}{\partial x^j} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\bar{f}^a}{\partial\bar{y}^b} & 0 \\ \frac{\partial\bar{f}^u}{\partial\bar{y}^b} & \frac{\partial\bar{f}^u}{\partial\bar{y}^v} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2.14}$$

Отсюда следует условие

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\bar{f}^a}{\partial x^j}\right) = \operatorname{rank}\left(\frac{\partial\bar{f}^a}{\partial\bar{y}^b}\right) = \rho, \tag{2.15}$$

которое выполняется для локального координатного группоида произвольной ткани $W(\rho,r,r)$ (см. [7]).

Замечание 2. Изотопические преобразования (α, β, γ) общего вида (2.5), сохраняющие слоения три-ткани $W(r, r, r)$, не сохраняют, вообще говоря, структуру фактор-ткани $\bar{W}(\rho, r, r)$. Далее мы будем рассматривать ткань $W(r, r, r)$ с точностью до таких преобразований (2.5), при которых сохраняются слоения (2.8) фактор-ткани $\bar{W}(\rho, r, r)$, т. е.

$$\beta|_{\bar{Y}} = \bar{\beta}, \quad \bar{\beta}\colon \bar{Y} \to \tilde{\bar{Y}}, \quad \dim \tilde{\bar{Y}} = \rho, \quad \gamma|_{\bar{Z}} = \bar{\gamma}, \quad \bar{\gamma}\colon \bar{Z} \to \tilde{\bar{Z}}, \quad \dim \tilde{\bar{Z}} = \rho$$

(см. [7]). Такие преобразования ткани $W(r, r, r)$ образуют некоторое подсемейство преобразований общего вида (2.5). Более подробно об этом см. раздел 4.

Теорема 1. *Для любой ткани $W(\rho, r, r)$ существует три-ткань $W(r, r, r)$, для которой ткань $W(\rho, r, r)$ является фактор-тканью. Для ткани $W(\rho, r, r)$ общего вида три-ткань $W(r, r, r)$ определяется с произволом $r - \rho$ гладких функций от $l_1 + l_2$ переменных, где $r - \rho \leqslant l_1 \leqslant r$, $r - \rho \leqslant l_2 \leqslant r$.*

Доказательство. Согласно [7] произвольная три-ткань $W(\rho, r, r)$ задаётся первой серией уравнений (2.12), где функции $\bar{f}^a$ удовлетворяют условиям (2.15). Дополним их второй серией системы (2.12), состоящей из $r - \rho$ уравнений, в которых $\bar{f}^u$ — гладкие, вообще говоря произвольные, функции, удовлетворяющие условиям (2.14). Из этих уравнений следует, что

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \bar{f}^u}{\partial x^j}\right) = \operatorname{rank}\left(\frac{\partial \bar{f}^u}{\partial \bar{y}^k}\right) = r - \rho. \tag{2.16}$$

Пусть l_1 — число переменных из набора (x^j) и l_2 — число переменных из набора $(\bar{y}^k)$, от которых зависят функции $\bar{f}^u$. Из (2.16) вытекает, что каждое из чисел l_1 и l_2 должно быть не меньше $r - \rho$. Согласно (2.14) функция $\bar{f} = (\bar{f}^a, \bar{f}^u)$ определяет ткань $W(r, r, r)$, допускающую согласно предложению 1 W_1^ρ-конгруэнцию. При этом ткань $W(\rho, r, r)$ будет фактор-тканью, порождаемой этой конгруэнцией. □

Как было отмечено во введении, произвол выбора функций $\bar{f}^u$ может быть ограничен условиями, которым должна удовлетворять ткань $W(r, r, r)$ и, соответственно, функция $\bar{f} = (\bar{f}^a, \bar{f}^u)$, определяющая эту ткань.

Например, для ткани $GW(\rho, r, r)$, порождаемой некоторой группой Ли преобразований (1.2), согласно условиям (1.3) однозначно определяется групповая три-ткань $R \equiv W(r, r, r)$, порождаемая параметрической группой (1.1) группы Ли преобразований (1.2). При этом уравнения групповой ткани R приводятся в некоторых локальных координатах к виду (1.4), их первая серия определяет три-ткань $GW(\rho, r, r)$. С другой стороны, уравнения (1.4) совпадают с (2.12), поэтому в силу предложения 1 ткань R допускает W_1^ρ-конгруэнцию, которая порождает фактор-ткань $\bar{W}(\rho, r, r)$, также определяемую первой серией уравнений (1.4), т. е. $\bar{W}(\rho, r, r) \equiv GW(\rho, r, r)$.

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Три-ткань $GW(\rho, r, r)$, порождаемая группой Ли преобразований, является фактор-тканью групповой ткани $R \equiv W(r, r, r)$, порождаемой её параметрической группой G.*

3.

Найдём структурные уравнения три-ткани $W(r,r,r)$, допускающей фактор-ткань $\bar{W}(\rho,r,r)$. Дифференцируя уравнения (2.3) и обозначая

$$\bar{f}^i_j=\frac{\partial f^i}{\partial x^j},\quad \tilde{f}^i_j=\frac{\partial f^i}{\partial y^j},$$

получим уравнения

$$dz^i=\bar{f}^i_j dx^j+\tilde{f}^i_j dy^j. \tag{3.1}$$

В соответствии с [2] положим

$$\underset{1}{\omega}^i=\bar{f}^i_j dx^j,\quad \underset{2}{\omega}^i=\tilde{f}^i_j dy^j. \tag{3.2}$$

Тогда согласно (2.1) слоения ткани $W(r,r,r)$ будут определяться уравнениями

$$\lambda_1\colon\ \underset{1}{\omega}^i=0,\quad \lambda_2\colon\ \underset{2}{\omega}^i=0,\quad \lambda_3\colon\ \underset{3}{\omega}^i\overset{\text{def}}{=}\underset{1}{\omega}^i+\underset{2}{\omega}^i=0. \tag{3.3}$$

Формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ образуют на $\mathcal{M}$ кобазис и удовлетворяют следующим структурным уравнениям [1]:

$$d\underset{1}{\omega}^i=\underset{1}{\omega}^j\wedge\omega^i_j+a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j\wedge\underset{1}{\omega}^k,\quad d\underset{2}{\omega}^i=\underset{2}{\omega}^j\wedge\omega^i_j-a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j\wedge\underset{2}{\omega}^k, \tag{3.4}$$

$$d\omega^i_j=\omega^k_j\wedge\omega^i_k+b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^l. \tag{3.5}$$

Величины a^i_{jk} и b^i_{jkl} являются тензорами и называются соответственно тензорами кручения и кривизны три-ткани $W(r,r,r)$. Из (3.4) следует, что

$$\omega^i_j=-\Gamma^i_{kj}\underset{1}{\omega}^k-\Gamma^i_{jk}\underset{2}{\omega}^k, \tag{3.6}$$

где

$$\Gamma^i_{jk}=-\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^l\partial y^m}\bar{g}^l_j\tilde{g}^m_k, \tag{3.7}$$

$(\bar{g}^i_j)$ и $(\tilde{g}^i_j)$ — матрицы, обратные матрицам $(\bar{f}^i_j)$ и $(\tilde{f}^i_j)$ соответственно, причём

$$\Gamma^i_{[jk]}=-a^i_{jk}. \tag{3.8}$$

Допустим, что ткань $W(r,r,r)$ допускает фактор-ткань $\bar{W}(\rho,r,r)$. Тогда согласно предложению 1 уравнения (2.1) могут быть приведены к виду (2.12). Опуская в последних черту, дифференцируя их и сравнивая с (3.1), получаем

$$\tilde{f}^a_u=0, \tag{3.9}$$

поэтому $\tilde{g}^a_u=0$. С учётом этих равенств из (3.7) выводим, что

$$\Gamma^a_{ju}=0. \tag{3.10}$$

Учитывая последние соотношения, из (3.8) и (3.6) находим, что

$$a^a_{uv}=0,\quad \Gamma^a_{ub}=-2a^a_{ub},\quad \omega^a_u=-\Gamma^a_{ub}\underset{2}{\omega}^b.$$

Таким образом, получаем условия

$$a^a_{uv} = 0, \quad \omega^a_u = 2a^a_{ub}\underset{2}{\omega}^b. \tag{3.11}$$

С учётом (3.11) запишем структурные уравнения (3.4) ткани $W(r, r, r)$ в виде

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^a &= \underset{1}{\omega}^b \wedge \omega^a_b + a^a_{bc}\underset{1}{\omega}^b \wedge \underset{1}{\omega}^c + 2a^a_{ub}\underset{1}{\omega}^u \wedge \big(\underset{1}{\omega}^b + \underset{2}{\omega}^b\big), \\ d\underset{1}{\omega}^u &= \underset{1}{\omega}^a \wedge \big(\omega^u_a + a^u_{ak}\underset{1}{\omega}^k\big) + \underset{1}{\omega}^v \wedge \big(\omega^u_v + a^u_{vk}\underset{1}{\omega}^k\big), \\ d\underset{2}{\omega}^a &= \underset{2}{\omega}^b \wedge \omega^a_b - a^a_{bc}\underset{2}{\omega}^b \wedge \underset{2}{\omega}^c, \\ d\underset{2}{\omega}^u &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^u_j - a^u_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь формы $\underset{1}{\omega}^i = \big\{\underset{1}{\omega}^a, \underset{1}{\omega}^u\big\}$ по (3.2) образуют кобазис на X, а формы $\underset{2}{\omega}^a$ и $\underset{3}{\omega}^a \equiv \underset{1}{\omega}^a + \underset{2}{\omega}^a$ по (3.1), (3.2) и (3.9) образуют кобазис на $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$ соответственно (см. раздел 2). При этом формы $\underset{1}{\omega}^a$, $\underset{1}{\omega}^u$ и $\underset{2}{\omega}^a$ образуют кобазис на многообразии $\bar{\mathcal{M}} \equiv X \times \bar{Y}$ размерности $r + \rho$, несущем фактор-ткань $\bar{W}(\rho, r, r)$. Эти формы удовлетворяют первым трём сериям уравнений (3.12), которые имеют тот же вид, что и структурные уравнения произвольной три-ткани $W(\rho, r, r)$ [7].

Согласно (2.13) слоения фактор-ткани $\bar{W}(\rho, r, r)$ будут задаваться уравнениями

$$\bar{\lambda}_1\colon\ \underset{1}{\omega}^a = 0,\ \ \underset{1}{\omega}^u = 0, \quad \bar{\lambda}_2\colon\ \underset{2}{\omega}^a = 0, \quad \bar{\lambda}_3\colon\ \underset{3}{\omega}^a = \underset{1}{\omega}^a + \underset{2}{\omega}^a = 0. \tag{3.13}$$

Доказано следующее утверждение.

Предложение 2. *Три-ткань $W(r, r, r)$ допускает фактор-ткань $\bar{W}(\rho, r, r)$ в том и только в том случае, если в некотором кобазисе на многообразии $\mathcal{M}$ структурные уравнения* (3.4) *ткани $W(r, r, r)$ приводятся к виду* (3.12). *В этом кобазисе слоения фактор-ткани $\bar{W}(\rho, r, r)$ задаются уравнениями* (3.13), *а её структурными уравнениями являются первые три серии уравнений* (3.12).

Пример. Покажем, что четырёхмерная групповая ткань $R \equiv W(2, 2, 2)$, порождаемая двумерной некоммутативной группой Ли G, допускает фактор-ткань $\bar{W}(1, 2, 2)$. Согласно [4] структурный тензор такой группы приводится к виду $c^1_{12} = 1$, $c^2_{12} = 0$, поэтому структурные уравнения соответствующей ткани R могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered} d\underset{1}{\omega}^1 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^2, \quad d\underset{2}{\omega}^1 = -\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^2, \\ d\underset{1}{\omega}^2 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^2 = 0 \end{gathered} \tag{3.14}$$

(см. [1]). Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\underset{1}{\omega}^1 = e^{-u^2}du^1, \quad \underset{1}{\omega}^2 = du^2, \quad \underset{2}{\omega}^1 = e^{v^2}dv^1, \quad \underset{2}{\omega}^2 = dv^2, \tag{3.15}$$

где u^1, u^2, v^1, v^2 — локальные координаты на $\mathcal{M}$. Подставляя (3.15) в (3.3), находим дифференциальные уравнения слоений три-ткани R:

$$\lambda_1\colon du^1=0,\ du^2=0,\quad \lambda_2\colon dv^1=0,\ dv^2=0,$$
$$\lambda_3\colon e^{-u^2}du^1+e^{v^2}dv^1=0,\ du^2+dv^2=0.$$

Интегрируя последние, получаем

$$\begin{gathered}\lambda_1\colon u^1=x^1,\ u^2=x^2,\quad \lambda_2\colon v^1=y^1,\ v^2=y^2,\\ \lambda_3\colon u^1+e^{z^2}v^1=z^1,\ u^2+v^2=z^2,\end{gathered}\tag{3.16}$$

где (x^1,x^2), (y^1,y^2) и (z^1,z^2) — постоянные интегрирования, параметры слоёв ткани. Исключая из уравнений (3.16) локальные координаты u^1, u^2, v^1, v^2 и полагая

$$e^{y^2}y^1=\bar y^1,\quad e^{x^2}=\bar x^2,\quad e^{y^2}=\bar y^2,\quad e^{z^2}=\bar z^2,$$

получаем уравнения три-ткани R в виде (2.12):

$$z^1=x^1+\bar x^2\bar y^1,\quad \bar z^2=\bar x^2\bar y^2.\tag{3.17}$$

Согласно предложению 1 первое из уравнений (3.17) задаёт фактор-ткань $\bar W(1,2,2)$ ткани R. С другой стороны, это уравнение определяет аффинную группу на прямой, а уравнения (3.17) задают параметрическую группу этой группы преобразований. Таким образом, фактор-ткань $\bar W(1,2,2)$ является тканью $GW(1,2,2)$ (см. [9]).

Найдём структурные уравнения рассматриваемой ткани R в виде (3.12). Продифференцируем (3.17) и положим

$$\underset{1}{\bar\omega}^1=dx^1+\bar y^1d\bar x^2,\quad \underset{1}{\bar\omega}^2=\bar y^2d\bar x^2,\quad \underset{2}{\bar\omega}^1=\bar x^2d\bar y^1,\quad \underset{2}{\bar\omega}^2=\bar x^2d\bar y^2.\tag{3.18}$$

Дифференцируя (3.18) внешним образом, получим

$$\begin{gathered}d\underset{1}{\bar\omega}^1=\underset{1}{\bar\omega}^1\wedge(-d\ln\bar x^2)-\frac{1}{\bar x^2\bar y^2}\underset{1}{\bar\omega}^2\wedge(\underset{1}{\bar\omega}^1+\underset{2}{\bar\omega}^1),\\ d\underset{1}{\bar\omega}^2=\underset{1}{\bar\omega}^2\wedge\bigl(-d\ln(\bar x^2\bar y^2)\bigr),\\ d\underset{2}{\bar\omega}^1=\underset{2}{\bar\omega}^1\wedge(-d\ln\bar x^2),\quad d\underset{2}{\bar\omega}^2=\underset{2}{\bar\omega}^2\wedge\bigl(-d\ln(\bar x^2\bar y^2)\bigr).\end{gathered}\tag{3.19}$$

Сравнивая с (3.12), получаем

$$\omega_1^1=-d\ln\bar x^2,\quad \omega_2^2=-d\ln(\bar x^2\bar y^2),\quad \omega_2^1=\omega_1^2=0,\quad a_{12}^1=\frac{1}{2\bar x^2\bar y^2},$$

поэтому

$$d\omega_j^i=0\ \ (i,j=1,2),\quad \nabla a_{12}^1=da_{12}^1-a_{12}^1\omega_2^2=0,$$

как и должно быть для групповой ткани R [1].

Итак, в адаптированном корепере, определяемом формами (3.18), структурные уравнения рассматриваемой четырёхмерной групповой ткани R имеют вид (3.19), который показывает, что ткань R допускает фактор-ткань $\bar W(1,2,2)\equiv GW(1,2,2)$. Структурными уравнениями фактор-ткани $\bar W(1,2,2)$ являются первые три уравнения системы (3.19).

4.

Согласно [10] допустимые преобразования (α,β,γ) общего вида (2.5) произвольной ткани $W(r,r,r)$ задают на многообразии $\mathcal{M}$, несущем эту ткань, некоторую G-структуру. При этом, как было сказано выше (см. замечание 2), слоения фактор-ткани $\bar{W}(\rho,r,r)$, вообще говоря, не сохраняются. Укажем G-структуру, определяемую на $\mathcal{M}$ семейством таких преобразований, при которых сохраняется структура фактор-ткани $\bar{W}(\rho,r,r)$.

Напомним определение G-структуры три-ткани $W(r,r,r)$. Следуя [10], обозначим через T касательное пространство к многообразию $\mathcal{M}$ в точке p, а через T_1, T_2 и T_3 — касательные пространства к слоям $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$, проходящим через точку p, $\mathcal{F}_\alpha \in \lambda_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$. Пусть векторы $\{\underset{1}{e}_i, \underset{2}{e}_i\}$, $i=\overline{1,r}$, образуют базис касательного пространства T, дуальный кобазису форм $\{\underset{1}{\omega}^i, \underset{2}{\omega}^i\}$, т. е. $\underset{\alpha}{\omega}^i(\underset{\alpha}{e}_j) = 0$, причём

$$\underset{\alpha}{\omega}^i(\underset{\beta}{e}_j) = -\underset{\beta}{\omega}^i(\underset{\alpha}{e}_j) = \delta^i_j$$

при $(\alpha,\beta) = (1,2)$, $(3,2)$, $(1,3)$, так что

$$\underset{1}{e}_i \in T_1, \quad \underset{2}{e}_i \in T_2, \quad \underset{1}{e}_i + \underset{2}{e}_i = \underset{3}{e}_i \in T_3.$$

Произвольный вектор ξ из T записывается в одной из следующих форм:

$$\xi = \underset{1}{\omega}^i(\xi)\underset{2}{e}_i - \underset{2}{\omega}^i(\xi)\underset{1}{e}_i = \underset{3}{\omega}^i(\xi)\underset{2}{e}_i - \underset{2}{\omega}^i(\xi)\underset{3}{e}_i = \underset{1}{\omega}^i(\xi)\underset{3}{e}_i - \underset{3}{\omega}^i(\xi)\underset{1}{e}_i. \tag{4.1}$$

Базисные формы $\underset{\alpha}{\omega}^i$ определены с точностью до преобразований вида

$$\underset{\alpha}{\bar{\omega}}^i = A^i_j \underset{\alpha}{\omega}^j, \quad \det(A^i_j) \neq 0, \tag{4.2}$$

при этом базисные векторы $\underset{\alpha}{e}_i$ в каждом из касательных пространств T_α преобразуются также согласованно:

$$\underset{\alpha}{e}_i = A^j_i \underset{\alpha}{\bar{e}}_j. \tag{4.3}$$

Матрицы $A = (A^j_i)$ образуют группу допустимых преобразований репера $\underset{\alpha}{e}_i$ пространства T_α, изоморфную полной линейной группе $\mathrm{GL}(r)$. Допустимые преобразования репера $\{\underset{1}{e}_i, \underset{2}{e}_j\}$ пространства T задаются матрицами вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

и образуют группу $G \equiv \mathrm{GL}(r) \times \mathrm{GL}(r)$. Эта группа определяет на многообразии $\mathcal{M}$, несущем три-ткань $W(r,r,r)$, G-структуру, которая называется *G_W-структурой* [10].

Согласно [10] структурные уравнения группы $\mathrm{GL}(r)$ получаются из уравнений (3.5) при фиксированных главных параметрах, определяющих положение точки p на $\mathcal{M}$, т. е. при $\underset{1}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^i = 0$:

$$\delta\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k. \tag{4.4}$$

Здесь формы
$$\pi^i_j \equiv \omega^i_j|_{\underset{1}{\omega}^i=\underset{2}{\omega}^i=0}$$
зависят только от вторичных параметров, определяющих положение репера $\{\underset{1}{e}_i, \underset{2}{e}_i\}$ в касательном пространстве T. Они являются инвариантными формами группы $\mathrm{GL}(r)$ и определяют согласованные инфинитезимальные преобразования реперов $\underset{\alpha}{e}_i$: $\delta \underset{\alpha}{e}_i = \pi^j_i \underset{\alpha}{e}_j$. Символ δ означает дифференцирование по вторичным параметрам. Отметим, что формы π^i_j можно выразить через величины A^i_j и их дифференциалы dA^i_j.

Допустим, что ткань $W(r,r,r)$ допускает фактор-ткань $\bar{W}(\rho,r,r)$. Запишем первое из разложений (4.1) вектора $\xi \in T$ в виде
$$\xi = \underset{1}{\omega}^a \underset{2}{e}_a + \underset{1}{\omega}^u \underset{2}{e}_u - \underset{2}{\omega}^a \underset{1}{e}_a - \underset{2}{\omega}^u \underset{1}{e}_u. \tag{4.5}$$
Как и выше, зададим слоения фактор-ткани $\bar{W}(\rho,r,r)$ уравнениями (3.13), где формы $\underset{1}{\omega}^a$, $\underset{1}{\omega}^u$ и $\underset{2}{\omega}^a$ образуют кобазис на многообразии $\bar{\mathcal{M}}$. Согласно [7] (см. также [3]) эти формы преобразуются следующим образом:
$$\underset{1}{\bar{\omega}}^a = A^a_b \underset{1}{\omega}^b, \quad \underset{1}{\bar{\omega}}^u = A^u_b \underset{1}{\omega}^b + A^u_v \underset{1}{\omega}^v, \quad \underset{2}{\bar{\omega}}^a = A^a_b \underset{2}{\omega}^b. \tag{4.6}$$
Сравнивая (4.6) с (4.2), находим, что $A^a_u = 0$. Поэтому допустимые преобразования репера $\underset{\alpha}{e}_i = \left(\underset{\alpha}{e}_a, \underset{\alpha}{e}_u\right)$ пространства T_α, при которых сохраняется структура фактор-ткани $\bar{W}(\rho,r,r)$, задаются матрицами вида
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A^b_a & 0 \\ A^u_a & A^u_v \end{pmatrix}.$$
Они образуют некоторую группу, обозначим её $\overline{\mathrm{GL}}(r)$. При этом допустимые преобразования репера $\{\underset{1}{e}_i, \underset{2}{e}_j\}$ касательного пространства T ткани $W(r,r,r)$ будут задаваться матрицами вида
$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$$
и образуют группу $\bar{G} \equiv \overline{\mathrm{GL}}(r) \times \overline{\mathrm{GL}}(r)$. Эта группа и определяет искомую G_W-структуру ткани $W(r,r,r)$, допускающей фактор-ткань $\bar{W}(\rho,r,r)$.

Найдём структурные уравнения группы $\overline{\mathrm{GL}}(r)$. Ткань $W(r,r,r)$, допускающая фактор-ткань $\bar{W}(\rho,r,r)$, характеризуется условиями (3.11). Из них при фиксированных главных параметрах получаем
$$\pi^a_u \equiv \omega^a_u|_{\underset{1}{\omega}^i=\underset{2}{\omega}^i=0} = 0. \tag{4.7}$$
Из уравнений (4.4) имеем $\delta\pi^a_u = \pi^c_u \wedge \pi^a_c + \pi^v_u \wedge \pi^a_v$. Отсюда следует, что уравнения (4.7) являются вполне интегрируемыми. Подставляя (4.7) в (4.4), находим структурные уравнения группы $\overline{\mathrm{GL}}(r)$:
$$\delta\pi^a_b = \pi^c_b \wedge \pi^a_c, \quad \delta\pi^u_b = \pi^c_b \wedge \pi^u_c + \pi^v_b \wedge \pi^u_v, \quad \delta\pi^u_v = \pi^w_v \wedge \pi^u_w. \tag{4.8}$$

Инвариантные формы π_b^a, π_b^u и π_v^u группы $\overline{\mathrm{GL}}(r)$ определяют инфинитезимальные преобразования репера $\underset{\alpha}{e}_i = \bigl(\underset{\alpha}{e}_a, \underset{\alpha}{e}_u\bigr)$ в пространстве T_α, которые задаются уравнениями

$$\delta \underset{\alpha}{e}_a = \pi_a^b \underset{\alpha}{e}_b + \pi_a^u \underset{\alpha}{e}_u, \quad \delta \underset{\alpha}{e}_u = \pi_u^v \underset{\alpha}{e}_v. \tag{4.9}$$

Теперь укажем G-структуру, определяемую на многообразии $\bar{\mathcal{M}}$ размерности $r+\rho$ фактор-тканью $\bar{W}(\rho, r, r)$. Из (4.6) следует, что допустимые преобразования корепера $\underset{1}{\omega}^a$, $\underset{1}{\omega}^u$ и $\underset{2}{\omega}^a$ задаются на $\bar{\mathcal{M}}$ матрицами вида

$$\bar{\mathcal{A}}_1 = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

где $A_1 = (A_a^b)$. Матрицы A_1 образуют группу, изоморфную полной линейной группе $\mathrm{GL}(\rho)$, структурными уравнениями которой является первая серия уравнений (4.8). Группа $\bar{G}_1 \equiv \overline{\mathrm{GL}}(r) \times \mathrm{GL}(\rho)$ определяет на многообразии $\bar{\mathcal{M}}$ $G_{\bar{W}}$-структуру фактор-ткани $\bar{W}(\rho, r, r)$.

Доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Допустимые преобразования ткани $W(r, r, r)$, при которых сохраняется структура её фактор-ткани $\bar{W}(\rho, r, r)$, образуют группу*

$$\bar{G} \equiv \overline{\mathrm{GL}}(r) \times \overline{\mathrm{GL}}(r),$$

которая определяет на многообразии $\mathcal{M}$ G_W-структуру ткани $W(r, r, r)$. $G_{\bar{W}}$-структура фактор-ткани $\bar{W}(\rho, r, r)$ задаётся группой

$$\bar{G}_1 \equiv \overline{\mathrm{GL}}(r) \times \mathrm{GL}(\rho).$$

Структурными уравнениями группы $\overline{\mathrm{GL}}(r)$ являются уравнения (4.8), *первая серия которых — это структурные уравнения группы* $\mathrm{GL}(\rho)$.

Литература

[1] Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1969. — Т. 2. — С. 7—31.

[2] Акивис М. А. Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей // Исследования по теории квазигрупп и луп. — Кишинёв: Штиинца, 1973. — С. 3—12.

[3] Акивис М. А., Гольдберг В. В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей // ДАН СССР. — 1972. — Т. 203, № 2. — С. 263—266.

[4] Васильева М. В. Группы Ли преобразований. — М.: Моск. гос. пед. ин-т, 1969.

[5] Горбацевич В. В., Онищик А. Л. Группы Ли преобразований // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1988. — Т. 20. — С. 103—240.

[6] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.

[7] Толстихина Г. А. Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2005. — Т. 32. — С. 29—116.

[8] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. Три-ткани, определяемые группами преобразований // Докл. РАН. — 2002. — Т. 385, № 4. — С. 1—3.

[9] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. Вложение три-ткани, определяемой группой преобразований, в групповую три-ткань. — Деп. в ВИНИТИ 2003; № 880–В2003.

[10] Akivis M. A., Shelekhov A. M. Algebra and Geometry of Multidimensional Three-Webs. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.