Об инфинитезимальных автоморфизмах почти контактных метрических структур

Н. А. ТЯПИН
Пензенский государственный
педагогический университет
e-mail: tyapin_nikita@mail.ru

УДК 514.76

Ключевые слова: почти контактные многообразия, структурные объекты.

Аннотация

В статье рассматриваются трёхмерные максимально подвижные почти контактные многообразия. В специальной системе координат получен вид структурных объектов для случая постоянной φ-аналитической кривизны $H = -3$ первого класса, а также второго и третьего классов теоремы Танно. Найдены базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов для каждой из рассмотренных структур и их коммутаторы.

Abstract

N. A. Tyapin, On infinitesimal automorphisms of almost contact metric lattices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 129—137.

In this paper, three-dimensional maximum mobile almost contact manifolds are considered. In a special frame, we have obtained the form of structural objects for the case of constant φ-analytic curvature $H = -3$ of the first and also second and third classes of the Tanno theorem. Basis vector field of the Lie algebra of infinitesimal automorphisms for each of the considered structures and their commutators are found.

1. Введение

Пусть M — гладкое многообразие размерности $2n+1$, η — дифференциальная 1-форма. Форма η определяет на M контактную структуру, если выполняется условие [1] $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, т. е. $\Omega = \eta \wedge (d\eta)^n$ является формой объёма. Многообразие с фиксированной на нём контактной структурой называется контактным многообразием.

Из классической теоремы Дарбу вытекает, что контактное многообразие M допускает атлас, в каждой карте (U, φ) которого с координатами $\{x^1, \ldots, x^{2n}, x^{2n+1}\}$ форма η имеет вид

$$\eta = x^1\, dx^{n+1} + \ldots + x^n\, dx^{2n} + dx^{2n+1}.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 129—137.

Эти атлас и карты называются атласом Дарбу и картами Дарбу. В рассмотрение вводятся также распределения $\mathfrak{L} = \ker\eta$ и $\mathfrak{M} = \ker d\eta$, называемые первым и вторым фундаментальными распределениями.

Почти контактную структуру на многообразии M^{2n+1} определяет тройка тензорных полей: ξ — векторное поле, называемое также характеристическим, η — дифференциальная 1-форма, Φ — поле тензора типа $(1,1)$, структурный эндоморфизм. Эти объекты должны удовлетворять условиям

$$\eta(\xi) = 1, \quad \Phi\xi = 0, \quad \eta(\Phi X) = 0, \quad \Phi\Phi X = -X + \eta(X)\xi \tag{1}$$

для любого векторного поля X на M (см. [1]).

Если, кроме того, на M задана риманова метрика g, такая что

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2}$$

для любых векторных полей X, Y, то говорят, что на многообразии M задана почти контактная метрическая структура (η, ξ, Φ, g).

Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется условие

$$(d\eta)_{ij} = 2g_{ik}\Phi^k_j.$$

Такие структуры нередко называют также почти сасакиевыми структурами. Форма η на контактном метрическом многообразии является контактной структурой, чем и объясняется термин «контактная метрическая структура». Такие структуры естественно возникают на расширенном фазовом пространстве механических систем.

Тензор Нейенхейса для аффиннора почти контактной структуры имеет вид

$$N^k_{ij} = \Phi^s_j(\partial_s\Phi^k_i - \partial_i\Phi^k_s) - \Phi^s_i(\partial_s\Phi^k_j - \partial_j\Phi^k_s) + \eta_j\partial_i\xi^k - \eta_i\partial_j\xi^k.$$

Этот тензор также называется тензором кручения почти контактной структуры.

Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если тензор Нейенхейса её структурного эндоморфизма удовлетворяет условию

$$N_\Phi + 2d\eta \otimes \xi = 0.$$

Понятие нормальности тесно связано с понятием интегрируемости структуры.

Сасакиевой структурой называется нормальная контактная метрическая структура. Этот класс почти контактных метрических структур является одним из наиболее хорошо изученных. Сасакиевы структуры внутренним образом индуцируются на вещественных вполне омбилических подмногообразиях кэлеровых многообразий. В частности, классическим примером многообразия Сасаки является вещественная гиперсфера пространства $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, снабжённого канонической кэлеровой структурой.

Почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Сасаки тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(y)X.$$

Сасакиева структура называется сасакиевой формой, если она имеет постоянную φ-секционную кривизну, т. е. для любого $X \in \ker\eta$ кривизна в направлении двумерных площадок $\{X, \varphi X\}$ ($\varphi = \Phi|_{\ker\eta}$) постоянна.

Тензор кривизны сасакиевой формы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} R(XY)Z = \frac{c+3}{4}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) + \frac{c-1}{4}(\eta(X)\eta(Z)Y - \\ - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi + \\ + \Omega(Z,Y)\Phi X - \Omega(Z,X)\Phi Y + 2\Omega(X,Y)\Phi Z, \end{aligned}$$

где c — φ-секционная кривизна.

Инфинитезимальным автоморфизмом является векторное поле, производные Ли вдоль которого от всех объектов некоторой тензорной структуры равны нулю. Для почти контактной метрической структуры условия того, что вектор v будет инфинитезимальным автоморфизмом, выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} L_v\eta \equiv v^k \dfrac{\partial \eta_i}{\partial x^k} + \eta_k \dfrac{\partial v^k}{\partial x^i} = 0, \\ L_v\xi \equiv v^k \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \xi^k \dfrac{\partial v^i}{\partial x^k} = 0, \\ L_v\Phi \equiv v^k \dfrac{\partial \Phi^i_j}{\partial x^k} - \Phi^k_j \dfrac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Phi^i_k \dfrac{\partial v^k}{\partial x^j} = 0, \\ L_v g \equiv v^k \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \dfrac{\partial v^k}{\partial x^i} + g_{ik} \dfrac{\partial v^k}{\partial x^j} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Вопрос о максимальной размерности группы автоморфизмов почти контактных метрических структур был решён С. Танно [3].

Теорема. *Пусть M^{2n+1} — связное почти контактное риманово многообразие со структурными объектами (η, ξ, ϕ, g). Тогда максимальная размерность его группы автоморфизмов равна $(n+1)^2$. Максимум будет достигаться, если и только если секционная кривизна в направлении двумерных площадок, содержащих вектор ξ, будет постоянной C и M будет одним из следующих пространств*:

1) *при $C > 0$ однородным сасакиевым многообразием (или его ε-деформацией) постоянной φ-аналитической кривизны H*;
2) *при $C = 0$ одним из шести глобальных римановых произведений*: $T \times CP^n$, $T \times CE^n$, $T \times CD^n$, $L \times CP^n$, $L \times CE^n$, $L \times CD^n$;
3) *при $C < 0$ прямым произведением $L \times_{ct} CE^n$ с метрикой вида $g_{(t,x)} = (dt)^2_{(t)} + e^{2ct} G_{(x)}$.*

В принятых обозначениях L — прямая, T — окружность, CP^n — комплексное проективное пространство с метрикой Фубини—Штуди, CE^n — унитарное пространство, CD^n — открытый шар с однородной кэлеровой структурой отрицательной постоянной голоморфной секционной кривизны.

ε-деформация определяется следующим образом. Пусть мы имеем сасакиеву структуру (η, ξ, ϕ, g). Получим новые структурные объекты

$$\xi^* = \xi, \quad \eta^* = \eta, \quad \Phi^* = \varepsilon\Phi, \quad g^* = \frac{1}{\varepsilon\tilde{C}}g + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\tilde{C}}\right)\eta \otimes \eta,$$

где $\tilde{C}$ — действительное, не равное нулю число, а ε — знак $\tilde{C}$. Структура $(\eta^*, \xi^*, \phi^*, g^*)$ также является почти контактной метрической. Говорят, что она получена с помощью ε-деформации.

Рассмотрим трёхмерные максимально подвижные почти контактные многообразия. В специальной системе координат получим вид структурных объектов для случая постоянной φ-аналитической кривизны $H = -3$ первого класса, а также второго и третьего классов теоремы Танно. Найдём базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов для каждой из этих структур.

2. Первый класс теоремы Танно

Рассмотрим сасакиевы формы постоянной ϕ-аналитической кривизны -3. Компоненты такой структуры в специальной системе координат в явном виде указал Блэр [2]. В случае трёхмерного многообразия они имеют следующий вид:

$$\eta = -x^2 dx^1 + dx^3, \quad \xi = \partial_3,$$
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + {x^2}^2 & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Систему (3) для структуры (4) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \partial_3 v^1 = 0, \quad \partial_3 v^2 = 0, \quad \partial_3 v^3 = 0, \\ x^2\partial_2 v^1 = \partial_2 v^3, \quad \partial_2 v^2 = 0, \quad \partial_1 v^1 = 0, \\ v^2 = \partial_1 v^3, \quad \partial_2 v^1 + \partial_1 v^2 = 0, \quad \partial_2 v^3 + x^2\partial_1 v^2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (5), находим её общее решение:

$$\begin{cases} v^1 = C_1 - 2C_4 x^2, \\ v^2 = C_2 + 2C_4 x^1, \\ v^3 = C_3 + C_2 x^1 + C_4 {x^1}^2 - C_4 {x^2}^2. \end{cases} \tag{6}$$

Из (6) следует, что базисные операторы группы имеют вид

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2 + x^1\partial_3, \\ X_3 = \partial_3, \quad X_4 = -2x^2\partial_1 + 2x^1\partial_2 + ({x^1}^2 - {x^2}^2)\partial_3. \end{gathered} \tag{7}$$

Нетрудно найти коммутаторы базисных векторных полей (7):

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_1, X_4] = 2X_2,$$
$$[X_2, X_3] = 0, \quad [X_2, X_4] = -2X_1, \quad [X_3, X_4] = 0.$$

Теорема. *Для трёхмерной сасакиевой формы постоянной φ-аналитической кривизны $H = -3$ существует локальная система координат, в которой структурные объекты имеют вид* (4). *Базисные операторы алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов этой структуры можно записать в виде* (7).

3. Второй класс теоремы Танно

Так как наше исследование носит локальный характер, в силу локальной изометричности пространств L и T достаточно исследовать лишь три пространства $L\times CP^n$, $L\times CE^n$ и $L\times CD^n$ из тех шести, которые указаны в качестве второго класса максимально подвижных структур в теореме Танно. Каждое из указанных пространств является прямым произведением одномерного вещественного и одномерного комплексного многообразий. Пусть $x^3 \in \mathbb{R}$ — координата вещественного многообразия, а $z = x^1 + \mathrm{i}x^2 \in \mathbb{C}$ — координата комплексного многообразия. На прямом произведении введём естественным образом координаты $\{x^1, x^2, x^3\}$, где x^1, x^2 — координаты овеществлённого комплексного многообразия.

Рассмотрим пространство $L \times CP^n$. Для любого положительного числа c пространство CP^n несёт кэлерову метрику постоянной голоморфной секционной кривизны c. По отношению к специальной системе координат $z^1, \dots, z^n$ она задаётся выражением [1]

$$ds^2 = \frac{4}{c}\,\frac{(1 + \sum z^a \bar{z}^a)(\sum dz^a d\bar{z}^a) - (\sum \bar{z}^a dz^a)(\sum z^a d\bar{z}^a)}{(1 + \sum z^a \bar{z}^a)^2}. \tag{8}$$

В вещественных координатах метрический тензор, определяемый равенством (8), и оператор комплексной структуры пространства CP^1 будут иметь вид

$$\left(g|_{CP^1}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{4}{c}\frac{1}{(1+x^{1\,2}+x^{2\,2})^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{c}\frac{1}{(1+x^{1\,2}+x^{2\,2})^2} \end{pmatrix}, \quad \left(\Phi|_{CP^1}\right)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

На $L \times CP^1$ объекты почти контактной метрической структуры с учётом (9) можно записать следующим образом:

$$\eta = dx^3, \quad \xi = \partial_3,$$
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{4}{c}\frac{1}{(1+x^{1\,2}+x^{2\,2})^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{c}\frac{1}{(1+x^{1\,2}+x^{2\,2})^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Систему (3) для структуры (10) приведём к следующему виду:

$$\begin{cases} \partial_3 v^1 = 0, \quad \partial_3 v^2 = 0, \quad \partial_3 v^3 = 0, \quad \partial_1 v^3 = 0, \\ \partial_1 v^1 = \partial_2 v^2, \quad \partial_2 v^1 + \partial_1 v^2 = 0, \quad \partial_2 v^3 = 0, \\ \dfrac{-2x^1 v^1 - 2x^2 v^2 + (1 + {x^1}^2 + {x^2}^2)\partial_1 v^1}{c(1 + {x^1}^2 + {x^2}^2)^3} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Найдём общее решение системы дифференциальных уравнений (11):

$$\begin{cases} v^1 = C_4 + C_4 {x^1}^2 - C_3 x^2 + 2C_2 x^1 x^2 - C_4 {x^2}^2, \\ v^2 = C_2 - C_2 {x^1}^2 + C_3 x^1 + 2C_4 x^1 x^2 + C_2 {x^2}^2, \\ v^3 = C_1. \end{cases} \tag{12}$$

Из (12) следует, что базисные операторы группы имеют вид

$$\begin{gathered} X_1 = 2x^1 x^2 \partial_1 + (1 - {x^1}^2 + {x^2}^2)\partial_2, \quad X_3 = -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2, \\ X_2 = (1 + {x^1}^2 - {x^2}^2)\partial_1 + 2x^1 x^2 \partial_2, \quad X_4 = \partial_3. \end{gathered} \tag{13}$$

Найдём коммутаторы базисных векторных полей (13):

$$\begin{gathered} [X_1, X_2] = 4X_3, \quad [X_1, X_3] = -X_2, \quad [X_1, X_4] = 0, \\ [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_2, X_4] = 0, \quad [X_3, X_4] = 0. \end{gathered}$$

Теорема. *В пространстве $L \times CP^n$ существует локальная система координат, в которой структурные объекты имеют вид* (10). *Базисные операторы алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов этой структуры можно записать в виде* (13).

Рассмотрим пространство $L \times CE^n$. Пространство CE^n несёт кэлерову метрику постоянной голоморфной секционной кривизны 0. По отношению к специальной системе координат $z^1, \dots, z^n$ она задаётся выражением [1]

$$ds^2 = \sum_{a=1}^{n} dz^a d\bar{z}^a. \tag{14}$$

В вещественных координатах метрический тензор, определяемый равенством (14), и оператор комплексной структуры пространства CE^1 будут иметь вид

$$\left(g|_{CE^1}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(\Phi|_{CE^1}\right)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

На $L \times CE^1$ объекты почти контактной метрической структуры, учитывая (15), запишем следующим образом:

$$\begin{gathered} \eta = dx^3, \quad \xi = \partial_3, \\ g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{16}$$

Систему (3) для структуры (16) можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} \partial_3 v^1 = 0, \quad \partial_3 v^2 = 0, \quad \partial_3 v^3 = 0, \quad \partial_1 v^3 = 0, \\ \partial_1 v^1 = \partial_2 v^2, \quad \partial_2 v^1 + \partial_1 v^2 = 0, \quad \partial_2 v^3 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (17), находим следующее общее решение:

$$\begin{cases} v^1 = C_3 - C_4 x^2, \\ v^2 = C_2 + C_4 x^1, \\ v^3 = C_1. \end{cases} \tag{18}$$

Из (18) легко получить базисные операторы:

$$X_1 = -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2, \quad X_2 = \partial_1, \quad X_3 = \partial_2, \quad X_4 = \partial_3. \tag{19}$$

Алгебра Ли (18) имеет следующую структуру:

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_1, X_3] = X_2, \quad [X_1, X_4] = 0,$$
$$[X_2, X_3] = 0, \quad [X_2, X_4] = 0, \quad [X_3, X_4] = 0.$$

Теорема. *В пространстве $L \times CE^n$ существует локальная система координат, в которой структурные объекты имеют вид* (16). *Базисные операторы алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов этой структуры можно записать в виде* (19).

Рассмотрим пространство $L \times CD^n$. Для любого отрицательного числа c пространство CD^n несёт кэлерову метрику постоянной голоморфной секционной кривизны c. По отношению к специальной системе координат $z^1, \dots, z^n$ она задаётся выражением [1]

$$ds^2 = -\frac{4}{c} \, \frac{(1 - \sum z^a \bar{z}^a)(\sum dz^a d\bar{z}^a) + (\sum \bar{z}^a dz^a)(\sum z^a d\bar{z}^a)}{(1 - \sum z^a \bar{z}^a)^2}. \tag{20}$$

Запишем метрический тензор, определяемый равенством (20), и оператор комплексной структуры пространства CD^1 в вещественных координатах:

$$\left(g|_{CD^1}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{c}\frac{1}{(1-x^{1\,2}-x^{2\,2})^2} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{c}\frac{1}{(1-x^{1\,2}-x^{2\,2})^2} \end{pmatrix}, \quad \left(\Phi|_{CD^1}\right)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Учитывая (21), получаем, что на $L \times CD^1$ объекты почти контактной метрической структуры имеют следующий вид:

$$\eta = dx^3, \quad \xi = \partial_3,$$
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{c}\frac{1}{(1-x^{1\,2}-x^{2\,2})^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{c}\frac{1}{(1-x^{1\,2}-x^{2\,2})^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Система (3) для структуры (22) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \partial_3 v^1 = 0, \quad \partial_3 v^2 = 0, \quad \partial_3 v^3 = 0, \quad \partial_1 v^3 = 0, \\ \partial_1 v^1 = \partial_2 v^2, \quad \partial_2 v^1 + \partial_1 v^2 = 0, \quad \partial_2 v^3 = 0, \\ \dfrac{2x^1 v^1 + 2x^2 v^2 + (1 - {x^1}^2 - {x^2}^2)\partial_1 v^1}{c(1 - {x^1}^2 - {x^2}^2)^3} = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Найдём общее решение (23), интегрируя систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} v^1 = C_2 - C_2 {x^1}^2 - C_4 x^2 - 2C_3 x^1 x^2 + C_2 {x^2}^2, \\ v^2 = C_3 + C_3 {x^1}^2 + C_4 x^1 - 2C_2 x^1 x^2 - C_3 {x^2}^2, \\ v^3 = C_1. \end{cases} \tag{24}$$

Базисные операторы алгебры Ли (24) можно записать в виде

$$\begin{gathered} X_1 = -2x^1 x^2 \partial_1 + (1 + {x^1}^2 - {x^2}^2)\partial_2, \quad X_2 = (1 - {x^1}^2 + {x^2}^2)\partial_1 - 2x^1 x^2 \partial_2, \\ X_3 = -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2, \quad X_4 = \partial_3. \end{gathered} \tag{25}$$

Найдём коммутаторы базисных векторных полей (25):

$$\begin{gathered} [X_1, X_2] = -4X_3, \quad [X_1, X_3] = -X_2, \quad [X_1, X_4] = 0, \\ [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_2, X_4] = 0, \quad [X_3, X_4] = 0. \end{gathered}$$

Теорема. *В пространстве $L \times CD^n$ существует локальная система координат, в которой структурные объекты имеют вид* (22). *Базисные операторы алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов этой структуры можно записать в виде* (25).

4. Третий класс теоремы Танно

В теореме Танно не только указано пространство, но и явно выписан метрический тензор соответствующей почти контактной метрической структуры:

$$g_{(t,x)} = (dt)^2_{(t)} + e^{2ct} G_{(x)}.$$

На многообразии $L \times_{ct} CE^1$ введём локальные координаты $x = \{x^1, x^2\}$, $t = x^3$. Координаты $\{x^1, x^2\}$ выберем естественным образом, $z = x^1 + \mathrm{i}x^2$. Тогда

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(\Phi|_{CE^1}\right)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Пусть $\mathbb{L}$ и $\mathbb{M}$ — распределения, соответствующие слоям CE^1 и L. Из доказательства теоремы Танно [3] следует, что они являются соответственно первым и вторым фундаментальными распределениями почти контактной метрической структуры. Получаем, что распределение $\mathbb{M}$ натянуто на векторные поля ∂_1, ∂_2, а $\mathbb{L}$ натянуто на векторное поле ∂_3. Так как $\mathbb{L} = \ker(\eta)$ и $\mathbb{M}$ — линейная оболочка ξ, учитывая условие (1), получаем, что $\eta = \lambda\, dx^3$, $\xi = \frac{1}{\lambda}\partial_3$. Учитывая вид g и используя условие (2), находим, что $\lambda = 1$. Учитывая (26), получаем, что в выбранной нами локальной системе координат $\{x^1, x^2, x^3\}$ структурные объекты имеют следующий вид:

$$\xi = \partial_3, \quad \eta = dx^3,$$
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2cx^3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2cx^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Запишем систему (3) для структуры (27):

$$\begin{cases} \partial_3 v^1 = 0, \quad \partial_3 v^2 = 0, \quad \partial_3 v^3 = 0, \\ \partial_1 v^3 = 0, \quad \partial_2 v^3 = 0, \quad \partial_1 v^1 = \partial_2 v^2, \\ e^{2cx^3}(\partial_2 v^1 + \partial_1 v^2) = 0, \quad e^{2cx^3}(cv^3 + \partial_1 v^1) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (28), получаем следующее общее решение:

$$\begin{cases} v^1 = -cC_1 x^1 - C_2 x^2 + C_3, \\ v^2 = C_2 x^1 - cC_1 x^2 + C_4, \\ v^3 = C_1. \end{cases} \tag{29}$$

Учитывая (29), находим базисные операторы группы:

$$X_1 = cx^1\partial_1 + cx^2\partial_2 - \partial_3, \quad X_2 = -x^2\partial_1 + x^1\partial_2, \quad X_3 = \partial_1, \quad X_4 = \partial_2. \tag{30}$$

Нетрудно найти коммутаторы базисных векторных полей (30):

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = -cX_3, \quad [X_1, X_4] = -cX_4,$$
$$[X_2, X_3] = -X_4, \quad [X_2, X_4] = X_3, \quad [X_3, X_4] = 0.$$

Теорема. *Для третьего класса теоремы Танно существует локальная система координат, в которой структурные объекты имеют вид* (27)*. Базисные операторы алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов этих структур можно записать в виде* (30)*.*

Литература

[1] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003.

[2] Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. — Berlin: Springer, 1976. — (Lect. Notes Math.; Vol. 509).

[3] Tanno S. The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J. — 1969. — Vol. 21, no. 1. — P. 21—38.