Почти $C(\lambda)$-многообразия

С. В. ХАРИТОНОВА
Оренбургский государственный университет
e-mail: hcb@yandex.ru

УДК 514.76

Ключевые слова: почти контактные структуры, почти $C(\lambda)$-многообразия, тождества Грея, тензор кривизны, тензор Вейля.

Аннотация

В статье рассмотрены почти $C(\lambda)$-многообразия. Получено необходимое и достаточное условие того, что почти контактное метрическое многообразие является почти $C(\lambda)$-многообразием. Доказано, что на почти $C(\lambda)$-многообразиях выполняются контактные аналоги второго и третьего тождеств кривизны А. Грея, причём аналог первого тождества Грея выполняется тогда и только тогда, когда многообразие является косимплектическим. Доказано, что конформно плоское почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием постоянной кривизны λ.

Abstract

S. V. Kharitonova, Almost $C(\lambda)$-manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 139—146.

In this paper, we study almost $C(\lambda)$-manifolds. We obtain necessary and sufficient conditions for an almost contact metric manifold to be an almost $C(\lambda)$-manifold. We prove that contact analogs of A. Gray's second and third curvature identities on almost $C(\lambda)$-manifolds hold, while a contact analog of A. Gray's first identity holds if and only if the manifold is cosymplectic. It is proved that a conformally flat, almost $C(\lambda)$-manifold is a manifold of constant curvature λ.

1. Предварительные сведения

Пусть M^{2n+1} — гладкое нечётномерное многообразие размерности выше трёх, $C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций многообразия M^{2n+1}, $\mathsf{X}(M)$ — $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M^{2n+1}, d — оператор внешнего дифференцирования.

Почти контактной метрической структурой (короче, *$\mathcal{AC}$-структурой*) на многообразии M называется совокупность (η, ξ, Φ, g) тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, ξ — векторное поле, называемое характеристическим, Φ — поле тензора типа $(1;1)$, называемое структурным эндоморфизмом модуля $\mathsf{X}(M)$, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика. При этом

1) $\eta(\xi) = 1$;

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 139—146.

2) $\eta \circ \Phi = 0$;
3) $\Phi(\xi) = 0$;
4) $\Phi^2 = -\mathrm{id} + \eta \otimes \xi$;
5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in \mathsf{X}(M)$.

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием* (*$\mathcal{AC}$-многообразием*).

Напомним [3], что $\mathcal{AC}$-структура называется *почти косимплектической*, если

1) $d\eta = 0$;
2) $d\Omega = 0$,

где тензор $\Omega(X, Y) = g(X, \Phi Y)$ кососимметричен и называется фундаментальной формой $\mathcal{AC}$-структуры.

Нормальная почти косимплектическая структура называется *косимплектической* [3].

В $C^\infty(M)$-модуле $\mathsf{X}(M)$ гладких векторных полей на $\mathcal{AC}$-многообразии внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора

$$\mathfrak{l} = \mathrm{id} - \eta \otimes \xi = -\Phi^2, \quad \mathfrak{m} = \eta \otimes \xi = \mathrm{id} + \Phi^2$$

на распределения

$$\mathcal{L} = \operatorname{Im} \Phi = \ker \eta, \quad \mathcal{M} = \ker \Phi = L(\xi)$$

размерностей $2n$ и 1 соответственно, причём $\mathsf{X}(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$. Более того, комплексификация $\mathsf{X}^C(M) = \mathbf{C} \otimes \mathsf{X}(M)$ модуля $\mathsf{X}(M)$ распадается в прямую сумму собственных подмодулей эндоморфизма Φ^C:

$$\mathsf{X}^C(M) = D_\Phi^{\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^0,$$

где $D_\Phi^0 = \mathcal{M}^C$. Проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут соответственно эндоморфизмы

$$\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad \overline{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad \mathfrak{m} = \mathrm{id} + \Phi^2.$$

Доказано [3], что к $(2n+1)$-мерному $\mathcal{AC}$-многообразию как метрическому $\mathfrak{f}$-многообразию дефекта 1 внутренним образом присоединяется G-структура, структурной группой которой является группа Ли $\{e\} \times U(n)$. Тотальное пространство этой G-структуры состоит из модифицированных А-реперов, т. е. комплексных реперов вида

$$\big(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}\big),$$

где

$$\varepsilon_0 = \xi_p, \quad \varepsilon_a = \sqrt{2}\pi(e_a), \quad \varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\pi}(e_a),$$

$(e_1, \ldots, e_n)$ — комплексный ортонормированный базис пространства $\mathcal{L}_p$ как C-модуля, $p \in M$. Эти реперы характеризуются тем, что матрицы тензоров Φ и g в этих реперах принимают вид

$$(\Phi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Здесь и далее индексы i, j, k пробегают значения от 0 до $2n$, индексы a, b, c, d — значения от 1 до n, $\hat{a} = a + n$.

2. Почти $C(\lambda)$-многообразия

Д. Дженсен и Л. Ванхеке в [8] начали исследование почти $C(\lambda)$-многообразий, где λ — вещественное число. Впоследствии к этим многообразиям в своих работах обращались З. Олчек и Р. Роска [10] и др.

Определение 1 [8, 9]. Почти контактное метрическое многообразие называется *почти* $C(\lambda)$*-многообразием*, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(\Phi X,\Phi Y)Z,W\rangle - \lambda\{g(X,W)g(Y,Z) - \\ - g(X,Z)g(Y,W) - g(\Phi X,W)g(\Phi Y,Z) + g(\Phi X,Z)g(\Phi Y,W)\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $X, Y, Z, W \in \mathsf{X}(M)$, а λ — вещественное число.

Определение 2 [8, 9]. Нормальное почти $C(\lambda)$-многообразие называется $C(\lambda)$*-многообразием*.

Д. Дженсен и Л. Ванхеке показали, что косимплектическое многообразие, сасакиево многообразие и многообразие Кенмоцу являются соответственно $C(0)$-, $C(1)$- и $C(-1)$-многообразиями [8].

Для любого $X \in \mathsf{X}(M)$ в А-репере верно равенство

$$X = X^0\varepsilon_0 + X^a\varepsilon_a + X^{\hat{a}}\varepsilon_{\hat{a}}.$$

Напомним, что

$$\Phi(\varepsilon_a) = \sqrt{-1}\varepsilon_a, \quad \Phi(\varepsilon_{\hat{a}}) = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{a}}, \quad \Phi(\varepsilon_0) = 0.$$

С учётом данных сведений, свойств симметрии компонент тензора римановой кривизны [3] и (1), расписав (2) на пространстве присоединённой G-структуры покомпонентно, получим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *$\mathcal{AC}$-многообразие является почти $C(\lambda)$-многообразием тогда и только тогда, когда компоненты его тензора римановой кривизны на пространстве присоединённой G-структуры удовлетворяют соотношениям*

$$R_{\hat{a}\hat{b}cd} = \lambda\delta_{cd}^{ab}, \quad R_{\hat{a}0c0} = \lambda\delta_c^a,$$

$R_{\hat{a}bc\hat{d}}$ — любое число, в силу тождества Риччи удовлетворяющее условию

$$R_{\hat{a}bc\hat{d}} - R_{\hat{a}cb\hat{d}} = -\lambda\delta^{ad}_{bc},$$

где λ — вещественное число, а остальные компоненты равны нулю. □

Известно [4,7], что А. Грей выделил три класса почти эрмитовых структур по свойствам симметрии их тензора римановой кривизны. В контактной геометрии вводятся следующие их аналоги [2].

Назовём $\mathcal{AC}$-многообразие *многообразием класса CR_1*, если

$$\langle R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi Z,\Phi W\rangle = \langle R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi W\rangle,$$

где $X,Y,Z,W \in \mathsf{X}(M)$.

Назовём $\mathcal{AC}$-многообразие *многообразием класса CR_2*, если

$$\langle R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi W\rangle = \langle R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi Z,\Phi W\rangle + \\ + \langle R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi^2Z,\Phi W\rangle + \langle R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi^2W\rangle,$$

где $X,Y,Z,W \in \mathsf{X}(M)$.

Назовём $\mathcal{AC}$-многообразие *многообразием класса CR_3*, если

$$\langle R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z,\Phi^2W\rangle = \langle R(\Phi X,\Phi Y)\Phi Z,\Phi W\rangle,$$

где $X,Y,Z,W \in \mathsf{X}(M)$.

Замечание 1. В данной работе под CR_i $(i = 1,2,3)$ понимаются классы почти контактных многообразий, определённые свойствами симметрии тензора римановой кривизны, введённые Е. С. Волковой [2], а не классы почти эрмитовых многообразий, определённые свойствами тензора конформной кривизны с такими же обозначениями, введённые И. В. Третьяковой [5].

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 1 [2]. $\mathcal{AC}$-многообразие является многообразием класса CR_3 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединённой G-структуры $R_{abcd} = 0$.

Предложение 2 [2]. $\mathcal{AC}$-многообразие является многообразием класса CR_2 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединённой G-структуры $R_{abcd} = 0$ и $R_{\hat{a}bcd} = 0$.

Предложение 3 [2]. $\mathcal{AC}$-многообразие является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединённой G-структуры $R_{abcd} = 0$, $R_{\hat{a}bcd} = 0$ и $R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$.

С учётом предложений 1—3 и теоремы 1 получим следующее утверждение.

Предложение 4. *Почти $C(\lambda)$-многообразия являются многообразиями классов CR_3 и CR_2.*

Доказательство. Пусть M — почти $C(\lambda)$-многообразие. Из теоремы 1 следует, что $R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = 0$. Согласно предложениям 1 и 2 это означает, что почти $C(\lambda)$-многообразия являются многообразиями классов CR_3 и CR_2. □

Предложение 5. *Почти $C(\lambda)$-многообразие M является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда M — косимплектическое многообразие.*

Доказательство. Пусть M — почти $C(\lambda)$-многообразие. По предложению 3 получаем, что M — почти $C(\lambda)$-многообразие класса CR_1 тогда и только тогда, когда $R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$, что в силу теоремы 1 равносильно тому, что $\lambda = 0$, т. е. M — косимплектическое многообразие. □

Зная выражения для компонент тензора римановой кривизны на пространстве присоединённой G-структуры, по формуле $r_{ij} = -R^k_{ijk}$ получим выражения для компонент тензора Риччи почти $C(\lambda)$-многообразия на пространстве присоединённой G-структуры:

$$\begin{aligned} &r_{ab} = r_{\hat{a}\hat{b}} = r_{\hat{a}0} = r_{0\hat{a}} = r_{a0} = r_{0a} = 0, \\ &r_{00} = 2\lambda n, \quad r_{\hat{a}b} = r_{b\hat{a}} = R_{\hat{a}cb\hat{c}} + n\delta^a_b\lambda. \end{aligned} \tag{3}$$

Вычислим скалярную кривизну $\varkappa$ почти $C(\lambda)$-многообразия на пространстве присоединённой G-структуры по формуле $\varkappa = g^{ij}r_{ij}$, где g^{ij} — компоненты контравариантного метрического тензора. Используя соотношения (3) и матрицу (1) тензора g, получим

$$\varkappa = 2n\lambda + 2R_{\hat{e}fe\hat{f}} + 2n^2\lambda. \tag{4}$$

Рассмотрим тензор типа $(3,1)$, инвариантный относительно конформных преобразований метрики. Это *тензор Вейля* $\mathcal{W}$ конформной кривизны [1, 6]. Обращение в нуль в данном пространстве $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $\dim M > 3$, есть необходимый и достаточный признак того, что это пространство конформно плоско [1].

Напомним, что псевдориманово многообразие $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *конформно плоским*, если метрика g в некоторой окрестности каждой точки $m \in M$ допускает конформное преобразование в плоскую метрику.

Тензор Вейля конформной кривизны $\mathcal{AC}$-структуры вычисляется по формуле [1]:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{2n-1}(\langle X,Z\rangle \operatorname{ric} Y - \langle Y,Z\rangle \operatorname{ric} X + \\ + r(X,Z)Y - r(Y,Z)X) + \frac{\varkappa}{2n(2n-1)}(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y), \end{aligned}$$

где ric — эндоморфизм Риччи [3] модуля $\mathsf{X}(M)$. В терминах ковариантных компонент данная формула примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2n-1}(r_{il}g_{jk} + r_{jk}g_{il} - r_{ik}g_{jl} - r_{jl}g_{ik}) + \\ + \frac{\varkappa}{2n(2n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \end{aligned} \tag{5}$$

где R_{ijkl} — соответствующие компоненты тензора римановой кривизны, r_{ij} — компоненты тензора Риччи, g_{ij} — компоненты метрического тензора, $\varkappa$ — скалярная кривизна.

Как видно из (5), тензор Вейля обладает всеми классическими свойствами симметрии тензора римановой кривизны.

Расписывая (5) на пространстве присоединённой G-структуры, с учётом теоремы 1, (3), (4) и (1) получим выражения ненулевых компонент тензора Вейля почти $C(\lambda)$-многообразия:

$$\mathcal{W}_{\hat{a}\hat{b}cd} = \frac{1}{n(2n-1)}(n\delta_c^b R_{\hat{a}ed\hat{e}} + n\delta_d^a R_{\hat{b}ec\hat{e}} - n\delta_d^b R_{\hat{a}ec\hat{e}} - n\delta_c^a R_{\hat{b}ed\hat{e}} + \\ + R_{\hat{e}fe\hat{f}}\delta_{cd}^{ab} + n^2\lambda\delta_{cd}^{ab}), \tag{6}$$

$$\mathcal{W}_{\hat{a}bc\hat{d}} = \frac{1}{n(2n-1)}(nR_{\hat{a}bc\hat{d}}(2n-1) - n\delta_b^d R_{\hat{a}ec\hat{e}} - n\delta_c^a R_{\hat{d}eb\hat{e}} + \\ + \delta_c^a\delta_b^d R_{\hat{e}fe\hat{f}} - n(n-1)\lambda\delta_c^a\delta_b^d), \tag{7}$$

$$\mathcal{W}_{\hat{a}0b0} = \frac{1}{n(2n-1)}(-nR_{\hat{a}cb\hat{c}} + \delta_b^a R_{\hat{e}fe\hat{f}}). \tag{8}$$

Выясним условия обращения в нуль каждой компоненты.

Равенство $\mathcal{W}_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$ равносильно равенству

$$n\delta_c^b R_{\hat{a}ed\hat{e}} + n\delta_d^a R_{\hat{b}ec\hat{e}} - n\delta_d^b R_{\hat{a}ec\hat{e}} - n\delta_c^a R_{\hat{b}ed\hat{e}} + R_{\hat{e}fe\hat{f}}\delta_{cd}^{ab} + n^2\lambda\delta_{cd}^{ab} = 0.$$

Свернув это соотношение по a и c, получим

$$nR_{\hat{b}ed\hat{e}}(2-n) - R_{\hat{e}fe\hat{f}}\delta_d^b + n^2\lambda\delta_d^b(n-1) = 0. \tag{9}$$

Ещё раз свернём по b и d, получим

$$n(1-n)(R_{\hat{e}fe\hat{f}} - n^2\lambda) = 0.$$

Так как размерность многообразия M больше трёх, последнее равенство эквивалентно равенству

$$R_{\hat{e}fe\hat{f}} = n^2\lambda. \tag{10}$$

Подставив (10) в (9), получим

$$n(n-2)(R_{\hat{b}ed\hat{e}} - n\lambda\delta_d^b) = 0.$$

Отсюда для почти $C(\lambda)$-многообразия размерности больше пяти получим

$$R_{\hat{b}ed\hat{e}} = n\lambda\delta_d^b. \tag{11}$$

Подставляя выражения (10) и (11) в (6), получим $\mathcal{W}_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$. Итак, равенство $\mathcal{W}_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$ для почти $C(\lambda)$-многообразия размерности больше пяти равносильно (11).

Равенство $\mathcal{W}_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$ равносильно равенству

$$nR_{\hat{a}bc\hat{d}}(2n-1) - n\delta_b^d R_{\hat{a}ec\hat{e}} - n\delta_c^a R_{\hat{d}eb\hat{e}} + \delta_c^a\delta_b^d R_{\hat{e}fe\hat{f}} - n(n-1)\lambda\delta_c^a\delta_b^d = 0. \tag{12}$$

Свернём это соотношение сначала по a и c:

$$n(n-1)(R_{\hat{a}ba\hat{d}} - n\lambda\delta_b^d) = 0.$$

Отсюда выводится, что

$$R_{\hat{a}ba\hat{d}} = n\lambda\delta^d_b. \tag{13}$$

Свернув это соотношение по b и d, получим

$$R_{\hat{a}ba\hat{b}} = n^2\lambda. \tag{14}$$

Подставив (13) и (14) в (12), будем иметь

$$n(2n-1)(R_{\hat{a}bc\hat{d}} - \lambda\delta^a_c\delta^d_b) = 0.$$

Отсюда получим

$$R_{\hat{a}bc\hat{d}} = \lambda\delta^a_c\delta^d_b. \tag{15}$$

Подставляя (13)—(15) в (7), получаем $\mathcal{W}_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$. Таким образом, равенство $\mathcal{W}_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$ эквивалентно (15).

Заметим, что условие (15) влечёт (11). Таким образом, если $\mathcal{W}_{\hat{a}bc\hat{d}} = 0$, то $\mathcal{W}_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$ и для многообразия размерности 5.

Равенство $\mathcal{W}_{\hat{a}0b0} = 0$ эквивалентно равенству

$$-nR_{\hat{a}cb\hat{c}} + \delta^a_b R_{\hat{e}fe\hat{f}} = 0.$$

Свернув это соотношение по a и b, получим

$$-nR_{\hat{a}ca\hat{c}} + \delta^a_a R_{\hat{e}fe\hat{f}} = 0,$$

т. е. $0 = 0$.

Итак, с учётом теоремы 1 справедливо следующее утверждение.

Предложение 6. *Ненулевые компоненты тензора римановой кривизны конформно плоского почти $C(\lambda)$-многообразия на пространстве присоединённой G-структуры удовлетворяют соотношениям*

$$R_{\hat{a}\hat{b}cd} = \lambda\delta^{ab}_{cd}, \quad R_{\hat{a}bc\hat{d}} = \lambda\delta^a_c\delta^d_b, \quad R_{\hat{a}0c0} = \lambda\delta^a_c. \qquad \square$$

Пусть M — многообразие постоянной кривизны k. Тогда компоненты тензора римановой кривизны на пространстве присоединённой G-структуры удовлетворяют соотношениям (см. [6])

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Расписав их на пространстве присоединённой G-структуры, получим, что ненулевые компоненты тензора римановой кривизны $\mathcal{AC}$-многообразия постоянной кривизны имеют вид

$$R_{\hat{a}\hat{b}cd} = k\delta^{ab}_{cd}, \quad R_{\hat{a}bc\hat{d}} = k\delta^a_c\delta^d_b, \quad R_{\hat{a}0c0} = k\delta^a_c. \tag{16}$$

С учётом предложения 6 и (16) получаем следующий результат.

Теорема 2. *Конформно плоское почти $C(\lambda)$-многообразие является многообразием постоянной кривизны λ.* $\square$

Литература

[1] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М.: Мир, 1990.

[2] Волкова Е. С. Тождества кривизны нормальных многообразий киллингова типа // Мат. заметки. — 1997. — Т. 62, вып. 3. — С. 351—362.

[3] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003.

[4] Кириченко В. Ф. Обобщённые классы Грея—Хервеллы и голоморфно-проективные преобразования обобщённых почти эрмитовых структур // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 9, № 5. — С. 107—132.

[5] Кириченко В. Ф., Третьякова И. В. О постоянстве типа почти эрмитовых многообразий // Мат. заметки. — 2000. — Т. 68, вып. 5. — С. 668—676.

[6] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1964.

[7] Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. — 1976. — Vol. 28, no. 4. — P. 601—812.

[8] Janssen D., Vanhecke L. Almost contact structures and curvature tensors // Kodai Math. J. — 1981. — Vol. 4. — P. 1—27.

[9] Olszak Z. Locally conformal almost cosymplectic manifolds // Colloq. Math. — 1989. — Vol. 57, no. 1. — P. 73—87.

[10] Olszak Z., Rosca R. Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds // Publ. Math. Debrecen. — 1991. — Vol. 39, no. 3-4. — P. 315—323.