О двойственной геометрии распределения гиперплоскостных элементов в пространстве аффинной связности

А. В. ХРИСТОФОРОВА
Чувашский государственный
педагогический университет им. И. Я. Яковлева
e-mail: dlya.nastenki@mail.ru

УДК 514.764.3

Ключевые слова: распределение гиперплоскостных элементов, пространство аффинной связности.

Аннотация

В настоящей работе находится условие, допускающее существование двойственного пространства аффинной связности при задании регулярного распределения гиперплоскостных элементов, погружённого в пространство аффинной связности $A_{n,n}$. Рассмотрены двойственные аффинные связности, возникающие при задании регулярного распределения.

Abstract

A. V. Khristoforova, On dual geometry of distributions of hyperplane elements in a space with affine connection, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 147—153.

In this work, we found the condition of the existence of the dual space of affine connection if the regular distribution of hyperplane elements is immersed in a space of affine connection $A_{n,n}$. We consider dual affine connections induced by a regular distribution.

1. Индексы в работе принимают следующие значения:

$$I, J, L, K = \overline{1, n}, \quad \bar{I}, \bar{L}, \bar{K} = \overline{0, n}, \quad i, j, k, l = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, заданное системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_J\}$. Согласно [8] с пространством $A_{n,n}$ ассоциируется пространство проективной связности $P_{n,n}$, определяемое системой форм Пфаффа $\omega^{\bar{I}}_{\bar{L}}$:

$$\omega^I_0 = \theta^I, \quad \omega^0_0 = -\frac{1}{n+1}\theta^K_K, \quad \omega^0_I = 0, \quad \omega^I_J = \theta^I_J - \frac{1}{n+1}\delta^I_J\theta^K_K. \tag{1}$$

Пространство $P_{n,n}$ вырождается в проективное пространство P_n тогда и только тогда, когда исходное пространство аффинной связности $A_{n,n}$ является аффинным A_n.

Геометрически переход от пространства аффинной связности $A_{n,n}$ к пространству проективной связности $P_{n,n}$ означает, что каждый слой A_n пространства $A_{n,n}$ расширяется до проективного пространства P_n, являющегося слоем пространства $P_{n,n}$, причём пространства $A_{n,n}$ и $P_{n,n}$ имеют общую базу B_n и их слоевые формы связаны зависимостями (1). Слой P_n пространства $P_{n,n}$ при этом оказывается отнесённым к проективному реперу $\{A_0, A_I\}$, где

$$\delta A_{\bar{I}} = \pi_{\bar{I}}^{\bar{K}} A_{\bar{K}}, \quad \pi_{\bar{I}}^{\bar{K}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}\big|_{\omega_0^L=0}, \quad \delta = d|_{\omega_0^L=0}.$$

Так как $\delta A_{\bar{I}} = \pi_{\bar{I}}^{\bar{K}} A_{\bar{K}}$, то «несобственная» гиперплоскость $\Pi_{n-1} \equiv [A_K]$ слоя $P_n(A_0)$ является инвариантной. Это пространство проективной связности назовём расширенным пространством аффинной связности и обозначим $A^*_{n,n}$.

Будем говорить, что в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$ задано распределение M (первого рода [4]) гиперплоскостных элементов (A, Π_{n-1}), $A \in \Pi_{n-1}$, если это подмногообразие задано в расширенном пространстве аффинной связности $A^*_{n,n}$.

В пространстве аффинной связности $A_{n,n}$ рассмотрим распределение гиперплоскостных элементов первого рода M. В пространстве $A^*_{n,n}$ распределение M в репере нулевого порядка $\{A_0, A_I\}$ $(A_0 \equiv A,\ A_i \in \Pi_{n-1})$ задаётся дифференциальными уравнениями (см. [4])

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K.$$

Двукратное продолжение уравнений этой системы приводит к следующим дифференциальным уравнениям компонент полей фундаментальных объектов первого $\{\Lambda_{iK}^n\}$ и второго $\{\Lambda_{iK}^n, \Lambda_{iKL}^n\}$ порядков распределения M в $A_{n,n}$. Система функций $\{\Lambda_{ij}^n\}$ образует тензор первого порядка (вообще говоря, несимметричный по нижним индексам). Будем считать распределение M в $A_{n,n}$ регулярным (т. е. $\Lambda = |\Lambda_{ij}^n| \neq 0$). Функция Λ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$d \ln \Lambda = \Lambda_L \omega_0^L - (n+1)(\omega_0^0 + \omega_n^n), \quad \Lambda_L = \Lambda_n^{ji} \Lambda_{ijL}^n.$$

Теорема 1. *Регулярное распределение гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцирует во второй дифференциальной окрестности пространство проективной связности $\bar{P}_{n,n}$, двойственное $P_{n,n}$ относительно инволютивного преобразования форм связности по закону*

$$\begin{gathered}
\bar{\omega}_0^n = 0, \quad \bar{\omega}_0^i = \omega_0^i, \quad \bar{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \frac{\Lambda_K}{n+1}\omega_0^K, \quad \bar{\omega}_n^n = \omega_n^n - \frac{\Lambda_K}{n+1}\omega_0^K, \\
\bar{\omega}_n^0 = 0, \quad \bar{\omega}_n^i = 0, \quad \bar{\omega}_i^n = -\Lambda_{ki}^n \omega_0^k, \quad \bar{\omega}_i^0 = \Lambda_{ki}^n \omega_n^k, \\
\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i + \left(\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kjS}^n - \delta_j^i \frac{\Lambda_S}{n+1}\right)\omega_0^S,
\end{gathered} \tag{2}$$

причём пространства $P_{n,n}$ и $\bar{P}_{n,n}$ могут быть проективными лишь одновременно.

Если пространство проективной связности $\bar{P}_{n,n}$, индуцируемое регулярным распределением гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$, ассоциировано с некоторым пространством аффинной связности $\bar{A}_{n,n}$ по схеме (1), то пространства аффинной связности $A_{n,n}$ и $\bar{A}_{n,n}$ назовём двойственными.

Предположим, что формы $\{\bar{\theta}^I, \bar{\theta}^I_J\}$ являются формами связности пространства $\bar{A}_{n,n}$, двойственного пространству $A_{n,n}$. Тогда формы связности пространства $\bar{P}_{n,n}$ должны удовлетворять соотношениям, аналогичным (1):

$$\bar{\omega}^I_0 = \bar{\theta}^I, \quad \bar{\omega}^0_0 = -\frac{1}{n+1}\bar{\theta}^K_K, \quad \bar{\omega}^0_I = 0, \quad \bar{\omega}^I_J = \bar{\theta}^I_J - \frac{1}{n+1}\delta^I_J\bar{\theta}^K_K. \tag{3}$$

Заменяя в (3) формы $\bar{\omega}^{\bar{J}}_{\bar{I}}$ по формулам (2), получаем, что формы связности двойственных пространств $A_{n,n}$ и $\bar{A}_{n,n}$ связаны соотношениями

$$\begin{gathered}\bar{\theta}^i = \theta^i + \Lambda^n_{jn}\Lambda^{ij}_n\theta^n, \quad \bar{\theta}^n = \theta^n, \quad \bar{\theta}^i_n = 0, \quad \bar{\theta}^n_i = -\Lambda^n_{ki}\theta^k, \\ \bar{\theta}^i_j = \theta^i_j + \Lambda^{ik}_n\Lambda_{kjL}\theta^l, \quad \bar{\theta}^n_n = \theta^n_n.\end{gathered} \tag{4}$$

Из соотношений (2), (3) непосредственно следует, что

$$\omega^i_n = 0,$$

что согласно (1) равносильно соотношениям

$$\theta^i_n = 0. \tag{5}$$

Итак, если пространства аффинной связности $A_{n,n}$ и $\bar{A}_{n,n}$ двойственны, то на слоевые формы исходного пространства накладываются соотношения (5). Справедливо и обратное.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы при задании регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцировалось пространство аффинной связности $\bar{A}_{n,n}$, двойственное исходному, необходимо и достаточно, чтобы слоевые формы θ^i_n пространства $A_{n,n}$ обращались в нуль.*

Найдём геометрическое истолкование условия (5). Известно, что условие параллельного перенесения направления A_0K, $K = u^L A_L$, вдоль некоторой кривой l в связности пространства имеет вид

$$du^J + u^L\theta^J_L = \Omega u^J \,(\mathrm{mod}\ l),$$

откуда применительно к направлению A_0A_n (т. е. $u^n = 1$, $u^i = 0$) получим (5). Отсюда непосредственно следует, что равенства (5) являются достаточным условием параллельного перенесения направления A_0A_n в связности пространства $A_{n,n}$ вдоль любой кривой l пространства $A_{n,n}$.

Теорема 3. *Для того чтобы при задании регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцировалось пространство аффинной связности $\bar{A}_{n,n}$, двойственное исходному, достаточно, чтобы направление A_0A_n в связности пространства $A_{n,n}$ переносилось параллельно вдоль любой кривой пространства $A_{n,n}$.*

Формы Пфаффа θ^i_j системы $\{\theta^I, \theta^I_J\}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана—Лаптева [1], следовательно, система форм $\{\theta^I, \theta^i_j\}$ в пространстве $A_{n,n}$ устанавливает фундаментально-групповую линейную связность (подсвязность) аффинного типа. Аналогичное утверждение справедливо и для системы форм $\{\bar\theta^I, \bar\theta^i_j\}$, задающей аффинную подсвязность в двойственном пространстве $\bar A_{n,n}$.

Теорема 4. *Если при задании регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве $A_{n,n}$ индуцируется пространство аффинной связности $\bar A_{n,n}$, двойственное исходному пространству $A_{n,n}$, то двойственные аффинные связности, определяемые соответственно системами форм $\{\theta^I, \theta^i_j\}$ и $\{\bar\theta^I, \bar\theta^i_j\}$, являются обобщённо сопряжёнными [5] относительно поля тензора Λ^n_{ij} вдоль любой кривой пространства аффинной связности $A_{n,n}$ тогда и только тогда, когда тензор*

$$a^n_{ijL} = \Lambda^n_{ijL} - \Lambda^n_{ij}\Lambda^{ik}_n\Lambda^n_{kiL}$$

обращается в нуль.

2. Предположим, что регулярное распределение гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ нормализовано [5] полями квазитензора ν^i_n и тензора ν^0_i:

$$d\nu^i_n - \nu^i_n\omega^n_n + \nu^j_n\omega^i_j + \omega^i_n = \nu^i_{nK}\omega^K_0, \quad d\nu^0_i + \nu^0_i\omega^0_0 - \nu^0_j\omega^j_i + \omega^0_i (= 0) = \nu^0_{iK}\omega^K_0.$$

Рассмотрим две системы форм Пфаффа $\{\omega^J_0, \overset{1}{\theta}{}^i_j\}$ и $\{\bar\omega^J_0, \overset{2}{\theta}{}^i_j\}$:

$$\begin{aligned} \overset{1}{\theta}{}^i_0 &= \omega^i_0 - \nu^i_n\omega^n_0, \\ \overset{1}{\theta}{}^i_j &= \omega^i_j - \nu^i_n\omega^n_j - \delta^i_j\big(\omega^0_0 - \overset{1}{\theta}{}^k_0\nu^0_k\big) + \nu^0_j\overset{1}{\theta}{}^i_0 - (\nu^i_{nj} - \Lambda^n_{kj}\nu^k_n\nu^i_n)\omega^n_0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{\theta}{}^i_0 &= \bar\omega^i_0 - \bar\nu^i_n\bar\omega^n_0, \\ \overset{2}{\theta}{}^i_j &= \bar\omega^i_j - \bar\nu^i_n\bar\omega^n_j - \delta^i_j\big(\bar\omega^0_0 - \overset{2}{\theta}{}^k_0\bar\nu^0_k\big) + \bar\nu^0_j\overset{2}{\theta}{}^i_0 - \big(\bar\nu^i_{nj} - \bar\Lambda^n_{kj}\bar\nu^k_n\bar\nu^i_n\big)\bar\omega^n_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что формы $\bar\omega$ имеют строение (2) и

$$\bar\Lambda^n_{ij} = -\Lambda^n_{ji}, \quad \bar\nu^i_n = -\Lambda^{ik}_n\nu^0_k, \quad \bar\nu^0_i = \Lambda^n_{ki}\nu^k_n, \quad \bar\nu^i_{ns} = -\nu^0_{ks}\Lambda^{ik}_n.$$

Формы (6) и (7) удовлетворяют структурным уравнениям Картана—Лаптева [1, 3] и определяют две аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, двойственные относительно инволютивного преобразования форм связности по закону (2).

Справедливы следующие предложения.

Теорема 5. *На нормализованном регулярном распределении гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцируются две двойственные аффинные связности, определяемые соответственно системами форм* (6) *и* (7). *Связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ обобщённо сопряжены относительно поля тензора Λ^n_{ij} вдоль любой кривой, принадлежащей распределению M в $A_{n,n}$.*

Теорема 6. *В случае пространств $A_{n,n}$ и $\bar{P}_{n,n}$ с нулевым кручением для распределения M в $A_{n,n}$ с полем симметричного тензора Λ^n_{ij} аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда нормализация распределения M в $A_{n,n}$ есть нормализация Михэйлеску* [6] *и соприкасающиеся гиперквадрики поля* [7] *имеют касание третьего порядка с многообразием M в $A_{n,n}$* [3].

3. Предположим, что распределение гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ оснащено в смысле Э. Картана [9], т. е. на M в $A_{n,n}$ задано поле геометрического объекта $\{\nu^i_n, \nu^0_n\}$ [4]

$$d\nu^i_n - \nu^i_n\omega^n_n + \nu^j_n\omega^i_j + \omega^i_n = \nu^i_{nK}\omega^K_0,$$
$$d\nu^0_n + \nu^0_n\omega^0_0 - \nu^0_n\omega^n_n + \nu^s_n\omega^0_s(\equiv 0) + \omega^0_n(\equiv 0) = \nu^0_{nK}\omega^K_0,$$

определяющего поле оснащающих точек

$$K_n = A_n + \nu^i_n A_i + \nu^0_n A_0.$$

Заметим, что поле подобъекта $\{\nu^i_n\}$ определяет поле инвариантных нормалей первого рода на распределении M в $A_{n,n}$.

Известно [6], что обобщённая точка Кёнигса нормали первого рода ν^i_n определяется геометрическим объектом $\{\nu^i_n, \nu^0_n\}$, где

$$\nu^0_n = -\frac{1}{n-1}(\nu^s_{ns} - \Lambda^n_{st}\nu^s_n\nu^t_n). \tag{8}$$

Заметим, что точка Кёнигса есть гармонический полюс [10] нормали ν^i_n относительно её $n-1$ фокусов $\Phi = A_n + \nu^i_n A_i + x^0 A_0$, определяемых уравнением (см. [4])

$$|x^0\delta^i_j + \nu^i_{nj} - \Lambda^n_{kj}\nu^k_n\nu^i_n| = 0.$$

Нормализация $\{\nu^i_n, \nu^0_i\}$ распределения M в $A_{n,n}$ определяет поле тензора c^0_J:

$$c^0_J = \begin{cases} \nu^0_s, & J = s, \\ \nu^0_n - \nu^0_k\nu^k_n, & J = n, \end{cases}$$
$$dc^0_J - c^0_K\omega^K_J + c^0_J\omega^0_0 = c^0_{JK}\omega^K_0,$$

где в качестве функций ν^0_n можно взять, например, функции строения (8). Поле тензора c^0_J задаёт оснащение в смысле А. П. Нордена [5] пространства $\bar{A}^*_{n,n}$, а следовательно, и оснащение пространства аффинной связности $A_{n,n}$.

Введём в рассмотрение систему форм $\{\overset{1}{\Omega}{}^J_K\}$:

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{\Omega}{}^i_0 = \omega^i_0 - \nu^i_n\omega^n_0, \quad \overset{1}{\Omega}{}^n_0 = \omega^n_0,\\
&\overset{1}{\Omega}{}^j_i = \omega^j_i - \nu^j_n\omega^n_i - \delta^j_i(\omega^0_0 - \nu^0_s\omega^s_0 - c^0_n\omega^n_0) + \nu^0_i\overset{1}{\Omega}{}^j_0, \quad \overset{1}{\Omega}{}^n_i = \omega^n_i + \nu^0_i\omega^n_0,\\
&\overset{1}{\Omega}{}^i_n = (\nu^i_{nK} - \nu^i_n\nu^s_n\Lambda^n_{sK})\omega^K_0 + \nu^0_n\overset{1}{\Omega}{}^i_0, \quad \overset{1}{\Omega}{}^n_n = \omega^n_n + \nu^s_n\omega^n_s - \omega^0_0 + \nu^0_s\omega^s_0 + (\nu^0_n + c^0_n)\omega^n_0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Система форм (9) удовлетворяет структурным уравнениям Картана—Лаптева [1, 3], а следовательно, определяет пространство аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,n}$.

Доказано, что нормализация регулярного распределения M в $A_{n,n}$ индуцирует пространство аффинной связности $\overset{2}{A}_{n,n}$, двойственное пространству $\overset{1}{A}_{n,n}$. Формы связности пространства $\overset{2}{A}_{n,n}$ имеют строение, аналогичное (9) (входящие формы и функции пишутся с чёрточками сверху с последующей заменой их по соответствующим формулам).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 7. *Нормализация регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцирует две двойственные аффинные связности, при этом соответствующее пространство аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,n}$ $(\overset{2}{A}_{n,n})$ имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда исходное пространство аффинной связности $A_{n,n}$ (проективной связности $\bar{P}_{n,n}$) является пространством без кручения.*

Теорема 8. *Аффинные связности $\left\{\overset{1}{\theta}{}^i_0, \overset{1}{\theta}{}^i_j\right\}$ и $\left\{\overset{1}{\Omega}{}^i_0, \overset{1}{\Omega}{}^i_j\right\}$ совпадают тогда и только тогда, когда направление нормали первого рода ν^i_n в связности пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$ переносится параллельно вдоль любой кривой, принадлежащей распределению M в $A_{n,n}$. При этом нормальная точка нормали ν^i_n совпадает с её точкой Кёнигса.*

Теорема 9. *Направление нормали первого рода ν^i_n распределения гиперплоскостных элементов M в A_n $(n > 3)$ обладает свойством абсолютного параллелизма относительно связности $\left\{\overset{1}{\Omega}{}^i_0, \overset{1}{\Omega}{}^i_j\right\}$ пространства $\overset{1}{A}_{n,n}$ тогда и только тогда, когда точка Кёнигса этой нормали неподвижна.*

Литература

[1] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1979. — Т. 9. — С. 5—246.

[2] Лаптев Г. Ф. О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности // ДАН СССР. — 1943. — Т. 41, № 8. — С. 329—331.

[3] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 275—382.

[4] Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1971. — Т. 3. — С. 49—94.

[5] Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.

[6] Остиану Н. М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1973. — Т. 4. — С. 71—120.

[7] Столяров А. В. Двойственная теория оснащённых многообразий. — Чебоксары, 1994.

[8] Столяров А. В. Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та. — 2005. — Вып. 4. — С. 21—27.

[9] Cartan E. Les éspaces a connexion projective // Труды семинара по векторному и тензорному анализу МГУ. — 1937. — Т. 4. — С. 147—159.

[10] Casanova G. La notion de pôle harmonique // Rev. Math. Spec. — 1955. — Vol. 65, no. 6. — P. 437—440.