Вырождение плоскостной аффинной связности Столярова

Ю. И. ШЕВЧЕНКО
Российский государственный университет им. И. Канта
e-mail: olgaobelova@mail.ru

УДК 514.75

Ключевые слова: проективное пространство, распределение плоскостей, плоскостная аффинная связность Столярова, линейная связность, объект связности, объект кручения, объект кривизны.

Аннотация

В проективном пространстве рассмотрено распределение плоскостей. Предложен способ задания плоскостной аффинной связности Столярова, ассоциированной с распределением. Связность задаётся полем объекта связности, состоящего из квазитензора связности и объекта линейной связности. Объект этой обобщённой аффинной связности определяет объекты кручения и кривизны. Показано, что эти объекты являются тензорами. Описаны условия, когда аффинная связность Столярова не имеет кручения или кривизны. Доказано, что обобщённая аффинная связность, у которой квазитензор связности является обобщённым символом Кронекера, вырождается в линейную связность.

Abstract

Yu. I. Shevchenko, Degeneration of plane affine Stolyarov connections, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 155—161.

In a projective space the plane distribution is considered. The way of the giving of plane affine Stolyarov's connection, associated with distribution, is offered. It is set by field of connection object consisting of connection quasitensor and linear connection object. The object of this generalized affine connection defines torsion and curvature objects. It is showed that these objects are tensors. Conditions when plane affine Stolyarov's connection is torsion free or curvature free are described. It is proved that the generalized affine connection with the connection quasitensor is the generalized Kroneker's symbol degenerates into linear connection.

Свяжем n-мерное проективное пространство P_n с подвижным репером $\{A, A_I\}$ $(I, \ldots = \overline{1, n})$, деривационные формулы вершин которого имеют вид

$$dA = \vartheta A + \omega^I A_I, \tag{1}$$

$$dA_I = \vartheta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \tag{2}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 155—161.

где ϑ — форма, играющая роль множителя пропорциональности, а структурные формы ω^I, ω_J^I, ω_I проективной группы $\mathrm{GP}(n)$, эффективно действующей в пространстве P_n, удовлетворяют уравнениям Картана

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \tag{3}$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \tag{4}$$

$$D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J \tag{5}$$

(см., например, [3, с. 173]).

В проективном пространстве P_n рассмотрим общее (иначе говоря, неголономное) распределение m-мерных плоскостей (см., например, [5]), которое представим как n-параметрическое семейство S_n центрированных m-плоскостей P_m^0 $(0 < m < n)$.

Замечание 1. Распределение S_n и m-поверхность, представляемая как семейство касательных плоскостей (см., например, [7]), являются наиболее исследованными подмногообразиями многообразия Беловой [1].

Произведём разбиение значений индексов:

$$I = \{i, \alpha\}\colon i, \ldots = \overline{1, m},\ \alpha, \ldots = \overline{m+1, n}.$$

Специализируем подвижной репер $\{A, A_i, A_\alpha\}$, помещая вершины A, A_i на плоскость P_m^0, причём A — в её центр. Из деривационных формул (2) имеем

$$dA_i = \vartheta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i^\alpha A_\alpha + \omega_i A. \tag{6}$$

Формулы (1), (6) дают уравнения стационарности центрированной плоскости P_m^0: $\omega^I = 0$, $\omega_i^\alpha = 0$. Выбирая n форм ω^I в качестве базисных, запишем уравнения распределения S_n в виде

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iJ}^\alpha \omega^J. \tag{7}$$

Продолжая уравнения (7) (см. [4]), получим

$$\Delta\Lambda_{iJ}^\alpha - \delta_J^\alpha \omega_i = \Lambda_{iJK}^\alpha \omega^K, \tag{8}$$

$$\Delta\Lambda_{iJ}^\alpha = d\Lambda_{iJ}^\alpha + \Lambda_{iJ}^\beta \omega_\beta^\alpha - \Lambda_{jJ}^\alpha \omega_i^j - \Lambda_{iK}^\alpha \omega_J^K, \tag{9}$$

$$\Lambda_{i[JK]}^\alpha = 0. \tag{10}$$

Часть структурных уравнений (3) для форм ω^i представим в следующем виде:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^J \wedge \theta_J^i, \tag{11}$$

$$\theta_J^i = \delta_J^\alpha \omega_\alpha^i. \tag{12}$$

Соответствующие двухиндексные формы ω_j^i удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^K \wedge \omega_{jK}^i, \tag{13}$$

$$\omega_{jK}^i = \Lambda_{jK}^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_j^i \omega_K - \delta_K^i \omega_j. \tag{14}$$

Определение. Гладкое многообразие со структурными уравнениями (3), (11), (13) назовём обобщённым расслоением [9] плоскостных аффинных реперов и обозначим $A_{m^2+[m]}(P_n)$.

Замечание 2. В обозначении $A_{m^2+[m]}(P_n)$ буква m заключена в квадратные скобки, так как m форм ω^i, которые могли бы превратиться в часть структурных форм аффинной группы $A_{m^2+m} = \mathrm{GA}(m)$, входят в состав базисных форм ω^I. Будем называть формы ω^i базисно-слоевыми.

Замечание 3. Обобщённое расслоение $A_{m^2+[m]}(P_n)$ имеет фактор-расслоение [6] плоскостных линейных реперов $L_{m^2}(P_n)$ со структурными уравнениями (3), (13), базой которого является пространство P_n (точнее, его область), а типовым слоем — линейная группа $L_{m^2} = \mathrm{GL}(m)$, действующая в связке прямых с центром A, принадлежащих плоскости P^0_m.

Для задания аффинной связности Столярова (см., например, [8]) в обобщённом расслоении $A_{m^2+[m]}(P_n)$ распространим на него приём Лумисте [10] задания групповых связностей в главных расслоениях. Преобразуем базисно-слоевые формы ω^i и слоевые формы ω^i_j с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^I:

$$\tilde\omega^i = \omega^i - C^i_J\omega^J, \quad \tilde\omega^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jK}\omega^K. \tag{15}$$

Возьмём внешние дифференциалы этих форм с помощью структурных уравнений (3), (11), (13):

$$\begin{aligned} D\tilde\omega^i &= \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^J \wedge (dC^i_J - C^i_K\omega^K_J + \theta^i_J),\\ D\tilde\omega^i_j &= \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^K \wedge (d\Gamma^i_{jK} - \Gamma^i_{jL}\omega^L_K + \omega^i_{jK}). \end{aligned} \tag{16}$$

Внесём преобразованные формы (15) в первые слагаемые структурных уравнений (16):

$$\begin{aligned} \omega^j \wedge \omega^i_j &= \tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^i_j + C^j_J\omega^J \wedge \tilde\omega^i_j + \tilde\omega^j \wedge \Gamma^i_{jK}\omega^K + C^j_J\omega^J \wedge \Gamma^i_{jK}\omega^K,\\ \omega^k_j \wedge \omega^i_k &= \tilde\omega^k_j \wedge \tilde\omega^i_k + \Gamma^k_{jK}\omega^K \wedge \tilde\omega^i_k + \tilde\omega^k_j \wedge \Gamma^i_{kL}\omega^L + \Gamma^k_{jK}\omega^K \wedge \Gamma^i_{kL}\omega^L. \end{aligned}$$

Во вторых и третьих слагаемых вернёмся к исходным формам и подставим результат в уравнения (16):

$$\begin{aligned} D\tilde\omega^i &= \tilde\omega^j \wedge \tilde\omega^i_j + \omega^J \wedge (\Delta C^i_J + \theta^i_J) + (\delta^j_J - C^j_J)\omega^J \wedge \Gamma^i_{jK}\omega^K,\\ D\tilde\omega^i_j &= \tilde\omega^k_j \wedge \tilde\omega^i_k + \omega^K \wedge (\Delta\Gamma^i_{jK} + \omega^i_{jK}) - \Gamma^k_{jK}\omega^K \wedge \Gamma^i_{kL}\omega^L. \end{aligned} \tag{17}$$

Исходя из этих уравнений, применим теорему Картана—Лаптева [2, с. 82, 83] в более общем случае, а именно зададим поле объекта $C = \{C^i_J, \Gamma^i_{jK}\}$:

$$\Delta C^i_J + \theta^i_J = C^i_{JK}\omega^K, \tag{18}$$

$$\Delta\Gamma^i_{jK} + \omega^i_{jK} = \Gamma^i_{jKL}\omega^L. \tag{19}$$

Аналогичным образом поступили Г. Ф. Лаптев и Н. М. Остиану в [5].

Подставим дифференциальные уравнения (18), (19) в структурные уравнения (17):

$$D\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + Q^i_{JK}\omega^J \wedge \omega^K, \tag{20}$$

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + R^i_{jKL}\omega^K \wedge \omega^L, \tag{21}$$

компоненты объектов кручения Q^i_{JK} и кривизны R^i_{jKL} обобщённой аффинной связности выражаются по формулам

$$Q^i_{JK} = C^i_{[JK]} + (\delta^j_{[J} - C^j_{[J})\Gamma^i_{jK]}, \tag{22}$$

$$R^i_{jKL} = \Gamma^i_{j[KL]} - \Gamma^k_{j[K}\Gamma^i_{kL]}. \tag{23}$$

Теорема 1 (см. [11]). *В обобщённом расслоении плоскостных аффинных реперов $A_{m^2+[m]}(P_n)$ аффинная связность Столярова задаётся полем объекта $C = \{C^i_J, \Gamma^i_{jK}\}$, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (18), (19), *причём формы связности* (15) *подчиняются структурным уравнениям* (20), (21), *в которые входят объекты кручения Q^i_{JK} и кривизны R^i_{jKL}, имеющие выражения* (22), (23).

Итак, пространство плоскостной обобщённой аффинной связности определяется структурными уравнениями (3), (20), (21). Дифференциальные уравнения (18), (19) с учётом обозначений (12), (14) и формул (22), (23) дают очевидные свойства характеризующих его объектов:

а) объект связности C состоит из двух подобъектов: квазитензора связности C^i_J, задающего преобразование базисно-слоевых форм ω^i, и объекта плоскостной линейной связности Γ^i_{jK} [6], образующего геометрический объект лишь вместе с фундаментальным квазитензором Λ^α_{iJ} и определяющего связность в расслоении плоскостных линейных реперов $L_{m^2}(P_n)$;

б) объект кручения Q^i_{JK} строится с помощью поля квазитензора связности C^i_J и объекта линейной связности Γ^i_{jK};

в) объект кривизны R^i_{jKL} аффинной связности Столярова есть объект кривизны плоскостной линейной связности, который определяется объектом линейной связности Γ^i_{jK} и его пфаффовыми производными.

Компоненты обычного символа Кронекера δ^I_J удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\delta^I_J = 0, \tag{24}$$

что проверяется непосредственно:

$$\Delta\delta^I_J = d\delta^I_J + \delta^K_J\omega^I_K - \delta^I_K\omega^K_J = 0 + \omega^I_J - \omega^I_J = 0.$$

Из уравнений (24) получаем дифференциальные уравнения для обобщённых символов Кронекера δ^i_J, δ^α_J:

$$\Delta\delta^i_J + \delta^\alpha_J\omega^i_\alpha = 0, \tag{25}$$

$$\Delta\delta^\alpha_J + \delta^i_J\omega^\alpha_i = 0. \tag{26}$$

Подставим уравнения (7) распределения S_n в уравнения (26):

$$\Delta\delta_J^\alpha = -\delta_J^i \Lambda_{iK}^\alpha \omega^K. \tag{27}$$

Используя обозначения (12), (14), структурные уравнения (3)—(5), (13) и дифференциальные уравнения (8), (25), (27), продолжим дифференциальные уравнения (18), (19):

$$\Delta C_{JK}^i + C_J^j \omega_{jK}^i + C_L^i(\delta_J^L \omega_K + \delta_K^L \omega_J) - \delta_J^j \Lambda_{jK}^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_J^\alpha \delta_K^i \omega_\alpha \equiv 0, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&\Delta\Gamma_{jKL}^i + \Gamma_{jK}^k \omega_{kL}^i - \Gamma_{kK}^i \omega_{jL}^k + \Gamma_{jJ}^i(\delta_K^J \omega_L + \delta_L^J \omega_K) + \\ &\quad + \Lambda_{jKL}^\alpha \omega_\alpha^i - (\Lambda_{jK}^\alpha \delta_L^i + \delta_K^i \Lambda_{jL}^\alpha)\omega_\alpha \equiv 0,\end{aligned} \tag{29}$$

символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^I. Проальтернируем эти сравнения по нижним индексам с учётом симметрий (10) пфаффовых производных Λ_{jKL}^α:

$$\begin{aligned}&\Delta C_{[JK]}^i + C_{[J}^j \omega_{jK]}^i - \delta_{[J}^j \Lambda_{jK]}^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_{[J}^\alpha \delta_{K]}^i \omega_\alpha \equiv 0, \\ &\Delta\Gamma_{j[KL]}^i + \Gamma_{j[K}^k \omega_{kL]}^i - \Gamma_{k[K}^i \omega_{jL]}^k \equiv 0.\end{aligned} \tag{30}$$

Используя (18), (19), (25), получим дифференциальные сравнения входящих в формулы (22), (23) агрегатов:

$$\Delta(\delta_{[J}^j - C_{[J}^j)\Gamma_{jK]}^i + (\delta_{[J}^j - C_{[J}^j)\omega_{jK]}^i \equiv 0, \quad \Delta\Gamma_{j[K}^k \Gamma_{kL]}^i + \omega_{j[K}^k \Gamma_{kL]}^i + \Gamma_{j[K}^k \omega_{kL]}^i \equiv 0.$$

Складывая их алгебраически со сравнениями (30) согласно формулам (22), (23) и используя в первой сумме выражения (14) трёхиндексных форм, получим

$$\Delta Q_{JK}^i \equiv 0, \quad \Delta R_{jKL}^i \equiv 0.$$

Теорема 2 [13]. *Объекты кручения Q_{JK}^i и кривизны R_{jKL}^i плоскостной обобщённой аффинной связности являются тензорами.*

Если тензоры кручения Q_{JK}^i и кривизны R_{jKL}^i обращаются в нуль, то формулы (22), (23) дают

$$C_{[JK]}^i = (C_{[J}^j - \delta_{[J}^j)\Gamma_{jK]}^i, \tag{31}$$

$$\Gamma_{j[KL]}^i = \Gamma_{j[K}^k \Gamma_{kL]}^i. \tag{32}$$

Теорема 3. *Ассоциированная с распределением S_n плоскостная аффинная связность Столярова без кручения характеризуется тем, что альтернированные пфаффовы производные компонент квазитензора связности являются альтернированными свёртками произведений компонент объекта плоскостной линейной связности и разностей между квазитензором связности и соответствующим обобщённым символом Кронекера.*

Теорема 4. *Кривизна плоскостной обобщённой аффинной связности, совпадающая с кривизной соответствующей линейной связности, равна нулю лишь тогда, когда альтернированные пффафовы производные компонент объекта плоскостной линейной связности являются альтернированными свёртками произведений компонент этого объекта.*

Рассмотрим особый случай плоскостной аффинной связности Столярова, когда квазитензор связности C^i_J вырождается в обобщённый символ Кронекера δ^i_J. Сопоставляя дифференциальные уравнения (25) и (18) с учётом обозначений (12), положим

$$C^i_J = \delta^i_J, \quad C^i_{JK} = 0. \tag{33}$$

Подставляя эти значения в формулу (22), получим $Q^i_{JK} = 0$. К этому же приводят и структурные уравнения (20), в которых $\tilde{\omega}^i = \omega^i - \delta^i_J \omega^J = 0$. Следовательно, уравнения (20) исчезают.

Теорема 5 (см. [12]). *Плоскостная обобщённая аффинная связность с объектом $C = \{\delta^i_J, \Gamma^i_{jK}\}$ вырождается в соответствующую линейную связность.*

Замечание 4. Подставляя условия (33) в дифференциальные сравнения (28) и учитывая обозначения (14), получаем нули в их левых частях, а подставляя (33) в равенства (31), обращаем их в тождества.

Литература

[1] Белова О. О. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 29—67.

[2] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1979. — Т. 9. — С. 5—247.

[3] Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.

[4] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 275—382.

[5] Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1971. — Т. 3. — С. 49—93.

[6] Омельян О. М., Шевченко Ю. И. Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей // Мат. заметки. — 2008. — Т. 84, вып. 1. — С. 99—107.

[7] Полякова К. В. Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 129—177.

[8] Столяров А. В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1975. — Т. 7. — С. 117—151.

[9] Шевченко Ю. И. Общая фундаментально-групповая связность с точки зрения расслоений // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 1990. — № 21. — С. 100—105.

[10] Шевченко Ю. И. Приёмы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2006. — № 37. — С. 179—187.

[11] Шевченко Ю. И. Аффинная связность Столярова на распределении плоскостей в проективном пространстве // Тез. докл. междунар. конф. «Геометрия в Астрахани — 2007». — Астрахань, 2007. — С. 65—67.

[12] Шевченко Ю. И. Вырожденная плоскостная аффинная связность Столярова // Тез. докл. междунар. науч. конф. «Лаптевские чтения — 2009». — Тверь, 2009. — С. 41.

[13] Шевченко Ю. И. Плоскостная аффинная связность Столярова, ассоциированная с распределением // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2009. — № 40. — С. 152—160.