Джеты Ли и симметрии продолжений геометрических объектов

В. В. ШУРЫГИН
Казанский государственный университет
e-mail: Vadim.Shurygin@ksu.ru

УДК 514.76

Ключевые слова: джет Ли, касательное расслоение второго порядка, продолжение геометрического объекта, производная Ли, расслоение Вейля.

Аннотация

Понятие джета Ли $\mathcal{L}_\theta\lambda$ поля геометрических объектов λ на гладком многообразии M по отношению к полю θ $\mathbf{A}$-скоростей Вейля является обобщением понятия производной Ли $\mathcal{L}_v\lambda$ поля λ по отношению к векторному полю v. В работе джеты Ли $\mathcal{L}_\theta\lambda$ применяются к изучению $\mathbf{A}$-гладких диффеоморфизмов на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M$, являющихся симметриями продолжений геометрических объектов с многообразия M на расслоение $T^{\mathbf{A}}M$. Показано, что обращение в нуль джета Ли $\mathcal{L}_\theta\lambda$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы продолжение $\lambda^{\mathbf{A}}$ поля геометрических объектов λ было инвариантным относительно преобразования расслоения Вейля, индуцируемого полем θ. Детально рассматриваются симметрии продолжений полей геометрических объектов на касательное расслоение второго порядка T^2M.

Abstract

V. V. Shurygin, Lie jets and symmetries of prolongations of geometric objects, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 2, pp. 163—181.

The Lie jet $\mathcal{L}_\theta\lambda$ of a field of geometric objects λ on a smooth manifold M with respect to a field θ of Weil $\mathbf{A}$-velocities is a generalization of the Lie derivative $\mathcal{L}_v\lambda$ of a field λ with respect to a vector field v. In this paper, Lie jets $\mathcal{L}_\theta\lambda$ are applied to the study of $\mathbf{A}$-smooth diffeomorphisms on a Weil bundle $T^{\mathbf{A}}M$ of a smooth manifold M, which are symmetries of prolongations of geometric objects from M to $T^{\mathbf{A}}M$. It is shown that vanishing of a Lie jet $\mathcal{L}_\theta\lambda$ is a necessary and sufficient condition for the prolongation $\lambda^{\mathbf{A}}$ of a field of geometric objects λ to be invariant with respect to the transformation of the Weil bundle $T^{\mathbf{A}}M$ induced by the field θ. The case of symmetries of prolongations of fields of geometric objects to the second-order tangent bundle T^2M are considered in more detail.

1. Введение

Полный лифт тензорного поля $t_{ij}(x^k)$ с гладкого многообразия M на касательное расслоение TM представляет собой тензорное поле на TM, имеющее в матричных обозначениях следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^k\partial_k t_{ij} & t_{ij} \\ t_{ij} & 0 \end{pmatrix},$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 2, с. 163—181.

где $\{\dot{x}^i\}$, $i = 1, \ldots, n$, — локальные координаты на M, $\{x^i, \dot{x}^i\}$ — индуцированные координаты на TM. Касательное расслоение TM несёт на себе естественную структуру гладкого многообразия $M^{\mathbf{D}}$ над алгеброй $\mathbf{D} = \mathbf{R}(\varepsilon^2)$ дуальных чисел $a + b\varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$. Произвольное $\mathbf{D}$-гладкое тензорное поле типа $(0, 2)$ на TM эквивалентно вещественному тензорному полю вида

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^k \partial_k t_{ij}(x^k) + a_{ij}(x^k) & t_{ij}(x^k) \\ t_{ij}(x^k) & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $t_{ij}(x^k)$ и $a_{ij}(x^k)$ — некоторые тензорные поля на M. А. П. Широковым было доказано (см. [7]), что тензорное поле (1) $\mathbf{D}$-гладким преобразованием расслоения TM, индуцирующим тождественное преобразование на M, может быть переведено в полный лифт тензорного поля t_{ij} тогда и только тогда, когда тензорное поле a_{ij} является производной Ли $a_{ij} = \mathcal{L}_v t_{ij}$ тензорного поля t_{ij} по отношению к некоторому векторному полю v на M.

Аналогичный результат имеет место (см. [10]) и в случае полей произвольных геометрических объектов на расслоениях Вейля $T^{\mathbf{A}}M$, определяемых алгебрами Вейля [12]. Расслоение Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ несёт на себе структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbf{A}$ [9, 10], и $\mathbf{A}$-гладкое поле геометрических объектов Λ на $T^{\mathbf{A}}M$ может быть переведено $\mathbf{A}$-гладким преобразованием расслоения $T^{\mathbf{A}}M$, индуцирующим тождественное преобразование на M, в $\mathbf{A}$-продолжение некоторого поля геометрических объектов λ (такого же типа), заданного на M, тогда и только тогда, когда ограничение поля Λ на $M \subset T^{\mathbf{A}}M$ представляет собой джет Ли $\mathcal{L}_\theta \lambda$ поля λ по отношению к некоторому полю $\mathbf{A}$-скоростей на M (в [10] использовался термин *производная Ли* по отношению к полю $\mathbf{A}$-скоростей).

В настоящей работе изучаются $\mathbf{A}$-гладкие диффеоморфизмы на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M$, являющиеся симметриями продолжений на $T^{\mathbf{A}}M$ полей геометрических объектов, заданных на многообразии M. Показано, что обращение в нуль джета Ли $\mathcal{L}_\theta \lambda$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы продолжение $\lambda^{\mathbf{A}}$ поля геометрических объектов λ было инвариантным относительно преобразования расслоения Вейля, индуцируемого полем θ. Детально рассматриваются симметрии продолжений полей геометрических объектов на касательное расслоение второго порядка T^2M. Доказано, что в этом случае обращение в нуль джета Ли $\mathcal{L}_\theta \lambda$ по отношению к полю 2-скоростей θ эквивалентно обращению в нуль производных Ли поля λ по отношению к двум векторным полям на M, ассоциированным с полем 2-скоростей θ.

2. Джеты Ли полей геометрических объектов

Главное расслоение P^rM реперов порядка r (r-реперов) на гладком n-мерном многообразии M образовано r-джетами $j^r_x\psi$ ростков диффеоморфизмов

$$\psi\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (M, x), \quad x \in M.$$

Пусть

$$\pi\colon P^rM \ni X = j^r_x\psi \mapsto x \in M\,—$$

естественная проекция расслоения P^rM на многообразие M. Структурной группой расслоения P^rM является дифференциальная группа Ли G^r_n, образованная r-джетами $j^r\varphi$ ростков диффеоморфизмов

$$\varphi\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0).$$

Группа G^r_n действует на расслоении P^rM справа по правилу композиции джетов: если $g = j^r\varphi$, то $R_g(j^r\psi) = j^r(\psi \circ \varphi)$.

Пусть F — некоторое гладкое многообразие и

$$\rho\colon G^r_n \times F \to F\,— \tag{2}$$

гладкое правое действие группы Ли G^r_n на F. Действие (2) определяет локально тривиальное расслоение $E(M) = E(M, F, \rho)$ над M со стандартным слоем F, ассоциированное с главным расслоением P^rM. Элементами расслоения $E(M)$ являются орбиты правого действия группы G^r_n на произведении $P^rM \times F$. Естественная проекция $p\colon E(M) \to M$ расслоения $E(M)$ на многообразие M ставит в соответствие орбите пары $(X, y) \in P^rM \times F$ элемент $x = \pi(X) \in M$.

Пусть M и M' — два гладких n-мерных многообразия, $f\colon M \to M'$ — локальный диффеоморфизм (иммерсия), $E(M) = E(M, F, \rho)$ и $E(M') = E(M', F, \rho)$ — локально тривиальные расслоения, ассоциированные с расслоениями реперов P^rM и P^rM' соответственно. Локальный диффеоморфизм $f\colon M \to M'$ индуцирует локальный диффеоморфизм

$$f^r\colon P^rM \to P^rM', \quad f^r(j^r\psi_x) = j^r(f \circ \psi),$$

и локальный диффеоморфизм $E(f)\colon E(M) \to E(M')$, отображающий орбиту пары $(X, y) \in P^rM \times F$ в орбиту пары $(f^r(X), y) \in P^rM' \times F$. При этом диаграмма

$$\begin{tikzcd} E(M) \arrow[r, "E(f)"] \arrow[d, "p"'] & E(M') \arrow[d, "p'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd} \tag{3}$$

коммутативна и $E(f)$ является морфизмом локально тривиальных расслоений. Соответствие $E\colon \mathcal{M}f_n \to \mathcal{FM}$, связывающее с n-мерным многообразием M локально тривиальное расслоение $E(M) = E(M, F, \rho)$, а с локальным диффеоморфизмом $f\colon M \to M'$ морфизм расслоений $E(f)\colon E(M) \to E(M')$, является функтором из категории $\mathcal{M}f_n$ n-мерных многообразий и локальных диффеоморфизмов в категорию $\mathcal{FM}$ локально тривиальных расслоений, называемым функтором естественного расслоения [12].

Векторное поле $v\colon M \to TM$ на многообразии M (сечение касательного расслоения TM) порождает однопараметрическую группу φ_t преобразований многообразия M (поток векторного поля v). Применение функтора E к преобразованиям φ_t даёт однопараметрическую группу преобразований $E(\varphi_t)$ расслоения $E(M)$. Векторное поле v^E на $E(M)$, порождаемое однопараметрической группой преобразований $E(\varphi_t)$, называется *полным лифтом* векторного поля v. Расслоение реперов P^rM представляет собой частный случай естественного расслоения. Полный лифт векторного поля v на расслоение P^rM является ограничением на P^rM $\mathbf{R}(n,r)$-продолжения $v^{\mathbf{R}(n,r)}$ векторного поля v на расслоение $\mathbf{R}(n,r)$-скоростей $T^{\mathbf{R}(n,r)}M$, определяемое алгеброй Вейля $\mathbf{R}(n,r)$ срезанных многочленов степени, меньшей или равной r, от n переменных [11]. Однопараметрическую группу преобразований расслоения P^rM, порождаемую этим векторным полем, обозначим через φ_t^r.

Сечение $\sigma\colon M\to E(M)$ называется *полем геометрических объектов* на многообразии M (типа E) [3]. Каждому $X\in P^rM$ соответствует единственный элемент $y\in F$, такой что орбита пары $(X,y)\in P^rM\times F$ совпадает с $\sigma\bigl(\pi(X)\bigr)$. Обозначая этот элемент через $\lambda_\sigma(X)$, получим эквивариантное относительно группы G_n^r отображение

$$\lambda=\lambda_\sigma\colon B^rM_n\to F, \tag{4}$$

однозначно определяющее сечение $\sigma\colon M\to E(M)$. Отображение (4) будем также называть полем геометрических объектов на многообразии M.

Пусть v — векторное поле на многообразии M_n, φ_t — поток векторного поля v, $E(\varphi_t)$ — поток, индуцированный функтором E на расслоении $E(M)$. Применение отображений φ_t к фиксированной точке $x\in M$ даёт кривую $\varphi_t(x)$ на многообразии M. Сечение $\sigma\colon M\to E(M)$ вдоль кривой $\varphi_t(x)$ определяет кривую $\sigma\bigl(\varphi_t(x)\bigr)$ на $E(M)$. Применяя к $\sigma\bigl(\varphi_t(x)\bigr)$ отображение $E(\varphi_t)^{-1}$, получим кривую $E(\varphi_t)^{-1}\Bigl(\sigma\bigl(\varphi_t(x)\bigr)\Bigr)$ в слое $E_x=p^{-1}(x)$ расслоения $E(M)$, проходящую через точку $\sigma(x)$ при $t=0$. Касательный вектор $(\mathcal{L}_v\sigma)_x$ этой кривой в точке $\sigma(x)$ называется производной Ли поля геометрических объектов σ в точке x по отношению к векторному полю v [3]. Вектор $(\mathcal{L}_v\sigma)_x$ является элементом вертикального касательного расслоения $VTE(M)$, представляющего собой объединение $\bigcup\limits_{z\in E(M)} T_zE_{p(z)}$ касательных пространств к слоям E_x расслоения $E(M)$. Применение касательного функтора к действию (2) даёт отображение $T\rho\colon TG_n^r\times TF\to TF$, ограничение которого на $G_n^r\times TF\subset TG_n^r\times TF$ представляет собой действие

$$\rho_T\colon G_n^r\times TF\to TF \tag{5}$$

дифференциальной группы G_n^r на касательном расслоении TF. Функтор естественного расслоения на категории $\mathcal{M}f_n$ n-мерных многообразий, соответствующий действию (5), ставит в соответствие многообразию M вертикальное касательное расслоение $VTE(M)\to M$ (с точностью до естественной эквивалентности). Соответствие

$$\mathcal{L}_v\sigma\colon M\ni x\mapsto(\mathcal{L}_v\sigma)_x\in VTE(M) \tag{6}$$

представляет собой поле геометрических объектов на многообразии M, называемое производной Ли поля геометрических объектов σ по отношению к векторному полю v [3].

Производная Ли (6) может быть следующим образом описана в терминах отображения (4), ассоциированного с сечением σ (ср. [5, с. 261—263]). Касательный вектор к кривой $E(\varphi_t)^{-1}\Big(\sigma\big(\varphi_t(x)\big)\Big)$ в точке $\sigma(x)$ равен разности касательных векторов к кривым

$$\gamma_1(t) = \sigma\big(\varphi_t(x)\big), \quad \gamma_2(t) = E(\varphi_t)\big(\sigma(x)\big).$$

На произведении $P^rM \times F$ кривым $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, проходящим через точку $\sigma(x)$, соответствуют кривые

$$\gamma_1'(t) = \Big(\varphi_t^r(X), \lambda\big(\varphi_t^r(X)\big)\Big), \quad \gamma_2'(t) = \big(\varphi_t^r(X), \lambda(X)\big),$$

проходящие через $X \in \pi^{-1}(x)$ (т. е. элементы $\gamma_1(t) \in E(M)$ и $\gamma_2(t) \in E(M)$ являются орбитами элементов $\gamma_1'(t) \in P^rM \times F$ и $\gamma_2'(t) \in P^rM \times F$ соответственно). Разность касательных векторов к кривым $\gamma_1'(t)$ и $\gamma_2'(t)$ в точке $\big(X, \lambda(X)\big)$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{d\gamma_1'}{dt}(0) - \frac{d\gamma_2'}{dt}(0) =\\ &= \big(v^{\mathbf{R}(n,r)}(X), T\lambda(v^{\mathbf{R}(n,r)}(X)\big) - (v^{\mathbf{R}(n,r)}(X), 0) = \Big(0, T\lambda\big(v^{\mathbf{R}(n,r)}(X)\big)\Big).\end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, производной Ли (6) соответствует отображение

$$\mathcal{L}_v\lambda \colon P^rM \ni X \mapsto (T\lambda \circ v^{\mathbf{R}(n,r)})(X) \in TF. \quad (8)$$

Отображение $T\lambda \circ v^{\mathbf{R}(n,r)}$, определяемое соотношением (8), будем также называть *производной Ли поля геометрических объектов* λ по отношению к векторному полю v.

Джеты Ли поля геометрических объектов (4) по отношению к полям скоростей высших порядков на многообразии M представляют собой непосредственные обобщения производной Ли (8).

Пусть $T^{\mathbf{A}}M$ — расслоение Вейля $\mathbf{A}$-скоростей на многообразии M [10, 12], определяемое алгеброй Вейля $\mathbf{A}$. Поле $\mathbf{A}$-скоростей на M представляет собой гладкое сечение $\theta \colon M \to T^{\mathbf{A}}M$. $\mathbf{R}(n,r)$-продолжение

$$\theta^{\mathbf{R}(n,r)} \colon T^{\mathbf{R}(n,r)}M \to T^{\mathbf{R}(n,r)}T^{\mathbf{A}}M$$

отображения θ определяется следующим образом. Пусть $f \colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (M, x)$ — росток, определяющий $\mathbf{R}(n,r)$-скорость ((n,r)-скорость Эресмана) $j_0^r f$. Тогда

$$\theta^{\mathbf{R}(n,r)}(j_0^r f) = j_0^r(\theta \circ f). \quad (9)$$

Из (9) следует, что $\mathbf{R}(n,r)$-продолжение $\theta^{\mathbf{R}(n,r)}$ инвариантно относительно правого действия дифференциальной группы G_n^q на расслоении $T^{\mathbf{R}(n,r)}M$ по правилу композиции джетов: если $g = j^r\varphi \in G_n^r$, $\psi \colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (M, x)$, то $R_g(j^r\psi) = j^r(\psi \circ \varphi)$. Естественная эквивалентность функторов

$$T^{\mathbf{A}} \circ T^{\mathbf{R}(n,r)} \cong T^{\mathbf{A} \otimes \mathbf{R}(n,r)} \cong T^{\mathbf{R}(n,r)} \circ T^{\mathbf{A}} \quad (10)$$

позволяет интерпретировать $\mathbf{R}(n,r)$-продолжение $\theta^{\mathbf{R}(n,r)}$ поля $\mathbf{A}$-скоростей θ как отображение

$$\theta^{\mathbf{R}(n,r)}\colon T^{\mathbf{R}(n,r)}M \to T^{\mathbf{A}}T^{\mathbf{R}(n,r)}M. \tag{11}$$

Ограничение отображения (11) на расслоение r-реперов $P^rM \subset T^{\mathbf{R}(n,r)}M$ определяет $\mathbf{R}(n,r)$-лифт (полный лифт)

$$\theta^{\mathbf{R}(n,r)}\colon P^rM \to T^{\mathbf{A}}P^rM \subset T^{\mathbf{A}}T^{\mathbf{R}(n,r)}M \tag{12}$$

поля $\mathbf{A}$-скоростей θ на расслоение P^rM. $\mathbf{R}(n,r)$-лифт (12) также инвариантен относительно действия группы G^r_n. Отсюда следует [10], что отображение

$$\mathcal{L}_\theta\lambda = T^{\mathbf{A}}\lambda \circ \theta^{\mathbf{R}(n,r)}\colon B^rM \to T^{\mathbf{A}}F \tag{13}$$

определяет поле геометрических объектов типа $VT^{\mathbf{A}}E$ на M, где

$$VT^{\mathbf{A}}E\colon \mathcal{M}f_n \to \mathcal{FM} -$$

функтор, ставящий в соответствие n-мерному многообразию M вертикальное расслоение Вейля $VT^{\mathbf{A}}E(M)$ расслоения $E(M)$. Функтор естественного расслоения $VT^{\mathbf{A}}E$ соответствует действию

$$\rho_{T^{\mathbf{A}}}\colon G^r_n \times T^{\mathbf{A}}F \to T^{\mathbf{A}}F \tag{14}$$

группы Ли G^r_n на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}F$, представляющему собой ограничение отображения

$$T^{\mathbf{A}}\rho\colon T^{\mathbf{A}}G^r_n \times T^{\mathbf{A}}F \to T^{\mathbf{A}}F. \tag{15}$$

Определение. Поле геометрических объектов на многообразии M, определяемое отображением (13), называется *джетом Ли* поля λ по отношению к полю $\mathbf{A}$-скоростей θ.

Отметим, что в [10] поле геометрических объектов (13) называлось производной Ли поля λ по отношению к полю $\mathbf{A}$-скоростей θ.

3. Симметрии продолжений полей геометрических объектов

Расслоение Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ несёт на себе структуру n-мерного гладкого многообразия над алгеброй $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$-гладкого многообразия), моделируемого $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n$ [10]. Локальная система координат $\{x^i\}$, $i = 1,\ldots,n$, на области $U \subset M$ индуцирует систему $\mathbf{A}$-значных координат $\{X^i = x^i + \mathring{X}^i\}$, $i = 1,\ldots,n$, на области

$$\pi^{-1}(U) \cong T^{\mathbf{A}}U \subset T^{\mathbf{A}}M,$$

где $\pi\colon T^{\mathbf{A}}M \to M$ — проекция расслоения Вейля на базовое многообразие M, а $\mathring{X}^i$ — компоненты координат X^i, принадлежащие максимальному идеалу $\mathring{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$. Произвольное $\mathbf{A}$-гладкое отображение

$$\Phi\colon T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}M'$$

в индуцированных координатах $\{X^i\}$ на $\pi^{-1}(U) \subset T^{\mathbf{A}}M$ и $\{X^{i'}\}$, $i' = 1', \ldots, m'$, на $\pi^{-1}(U') \subset T^{\mathbf{A}}M'$ имеет вид

$$X^{i'} = \varphi^{i'}(x^i) + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^{i'}}{Dx^p} \mathring{X}^p, \tag{16}$$

где $\varphi^{i'}(x^i)$ — $\mathbf{A}$-значные функции вещественных координат x^i. Если

$$\varphi \colon M \to M' \text{ —}$$

гладкое отображение, имеющее в локальных координатах вид $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i)$, то уравнениями (16) задаётся морфизм

$$T^{\mathbf{A}}\varphi \colon T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}M'.$$

Имеется естественное вложение $i_0 \colon M \to T^{\mathbf{A}}M$, ставящее в соответствие точке $x \in M$ $\mathbf{A}$-скорость $j^{\mathbf{A}}\tilde{x}$ ростка постоянного отображения $\tilde{x} \colon (\mathbf{R}^\ell, 0) \mapsto x$. Это вложение i_0 называется *нулевым сечением* расслоения Вейля. Образ $i_0(M) \subset T^{\mathbf{A}}M$ отождествляется с многообразием M. Из уравнений (16) следует, что всякое $\mathbf{A}$-гладкое отображение

$$\Phi \colon T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}M'$$

однозначно определяется своим ограничением на нулевое сечение

$$\varphi = \Phi \circ i_0 \colon M \to T^{\mathbf{A}}M',$$

которое задаётся уравнениями $X^{i'} = \varphi^{i'}(x^i)$. Отображение Φ называется *продолжением* отображения φ. Будем обозначать продолжение отображения φ через $\varphi^{\mathbf{A}}$. Кроме того, $\mathbf{A}$-гладкое отображение

$$\Phi \colon T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}M'$$

определяет отображение

$$\varphi' = \pi \circ \Phi \circ i_0 \colon M \to M'.$$

Указанные отображения образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} T^{\mathbf{A}}M \arrow[r, "\Phi=\varphi^{\mathbf{A}}"] \arrow[d, "\pi"'] & T^{\mathbf{A}}M' \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi'"] & M' \end{tikzcd} \quad . \tag{17}$$

Для гладкого отображения $\psi \colon M \to M'$ продолжение $(i_0 \circ \psi)^{\mathbf{A}}$ отображения $i_0 \circ \psi \colon M \to T^{\mathbf{A}}M'$ совпадает с отображением $T^{\mathbf{A}}\psi$, а всякое сечение $\theta \colon M \to T^{\mathbf{A}}M$ продолжается до $\mathbf{A}$-диффеоморфизма $\theta^{\mathbf{A}} \colon T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}M$.

Продолжение $\varphi^{\mathbf{A}}$ отображения $\varphi\colon M \to T^{\mathbf{A}}M'$ может быть описано без использования координат следующим образом [6]. Операция умножения в алгебре $\mathbf{A}$ индуцирует эпиморфизм алгебр

$$m\colon \mathbf{A}\otimes\mathbf{A} \to \mathbf{A}, \quad X\otimes Y \mapsto XY.$$

Эпиморфизм m определяет естественное преобразование (функторный морфизм)

$$m\colon T^{\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}} \to T^{\mathbf{A}},$$

и имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} T^{\mathbf{A}}M \arrow[r, "T^{\mathbf{A}}\varphi"] \arrow[dr, "\varphi^{\mathbf{A}}"'] & T^{\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}}M' \arrow[d, "m_{M'}"] \\ & T^{\mathbf{A}}M' \end{tikzcd} .$$

Применение функтора Вейля к расслоению r-реперов $\pi\colon P^rM \to M$ приводит к главному расслоению $\pi^{\mathbf{A}}\colon T^{\mathbf{A}}P^rM \to T^{\mathbf{A}}M$ со структурной группой Ли $T^{\mathbf{A}}G^r_n$, которые изоморфны соответственно расслоению r-джетов обратимых $\mathbf{A}$-гладких ростков $(\mathbf{A}^n, 0) \to (T^{\mathbf{A}}M, X)$ и группе Ли r-джетов обратимых $\mathbf{A}$-гладких ростков $(\mathbf{A}^n, 0) \to (\mathbf{A}^n, 0)$. $\mathbf{A}$-гладкое действие (15) группы Ли $T^{\mathbf{A}}G^r_n$ на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}F$ определяет функтор естественного расслоения

$$E^{\mathbf{A}}\colon \mathcal{M}f^{\mathbf{A}}_n \to \mathcal{FM}^{\mathbf{A}}$$

на категории $\mathbf{A}$-гладких многообразий, моделируемых $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n$, и локальных $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов. Функтор $E^{\mathbf{A}}$ ставит в соответствие n-мерному $\mathbf{A}$-гладкому многообразию $M^{\mathbf{A}}$ локально тривиальное расслоение

$$E^{\mathbf{A}}(M^{\mathbf{A}}) = E(M^{\mathbf{A}}, T^{\mathbf{A}}F, T^{\mathbf{A}}\rho),$$

а локальному $\mathbf{A}$-диффеоморфизму

$$F\colon M^{\mathbf{A}} \to M'^{\mathbf{A}}$$

соответствующий морфизм расслоений

$$E^{\mathbf{A}}(F)\colon E^{\mathbf{A}}(M^{\mathbf{A}}) \to E^{\mathbf{A}}(M'^{\mathbf{A}}).$$

На подкатегории $\mathcal{T}^{\mathbf{A}}\mathcal{M}f_n$ категории $\mathcal{M}f^{\mathbf{A}}_n$, объектами которой являются расслоения Вейля n-мерных многообразий, функтор $E^{\mathbf{A}}$ естественно эквивалентен функтору, ставящему в соответствие расслоению Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ естественное расслоение $T^{\mathbf{A}}E(M)(T^{\mathbf{A}}M)$.

$\mathbf{A}$-гладкое сечение

$$\Sigma\colon M^{\mathbf{A}} \to E^{\mathbf{A}}(M^{\mathbf{A}})$$

называется $\mathbf{A}$-гладким полем геометрических объектов на $M^{\mathbf{A}}$ (типа $E^{\mathbf{A}}$).

Применение функтора Вейля $T^{\mathbf{A}}$ к полю $\sigma\colon M \to E(M)$ геометрических объектов типа E на многообразии M приводит к $\mathbf{A}$-гладкому полю

$$T^{\mathbf{A}}\sigma\colon T^{\mathbf{A}}M \to E^{\mathbf{A}}(T^{\mathbf{A}}M)$$

геометрических объектов типа $E^{\mathbf{A}}$ на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M$.

Определение. Симметрией поля $T^{\mathbf{A}}\sigma$ геометрических объектов типа $E^{\mathbf{A}}$ на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ будем называть такой $\mathbf{A}$-диффеоморфизм

$$\Phi\colon T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}M,$$

что следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{tikzcd} E^{\mathbf{A}}(T^{\mathbf{A}}M) \arrow[r, "E^{\mathbf{A}}(\Phi)"] & E^{\mathbf{A}}(T^{\mathbf{A}}M) \\ T^{\mathbf{A}}M \arrow[u, "T^{\mathbf{A}}\sigma"] \arrow[r, "\Phi"] & T^{\mathbf{A}}M \arrow[u, "T^{\mathbf{A}}\sigma"'] \end{tikzcd} . \tag{18}$$

Предположим, что $\Phi\colon T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}M$ — симметрия поля геометрических объектов $T^{\mathbf{A}}\sigma$. Подставляя каждое из $\mathbf{A}$-гладких отображений диаграммы (18) в верхнюю строку диаграммы (17), получим соответствующее отображение в нижней строке диаграммы (17). Эти отображения образуют следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} E(M) \arrow[r, "E(\varphi')"] & E(M) \\ M \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "\varphi'"] & M \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd} . \tag{19}$$

Применяя к диаграмме (19) функтор Вейля $T^{\mathbf{A}}$, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} E^{\mathbf{A}}(T^{\mathbf{A}}M) \arrow[r, "T^{\mathbf{A}}(E(\varphi')"] & E^{\mathbf{A}}(T^{\mathbf{A}}M) \\ T^{\mathbf{A}}M \arrow[u, "T^{\mathbf{A}}\sigma"] \arrow[r, "T^{\mathbf{A}}\varphi'"] & T^{\mathbf{A}}M \arrow[u, "T^{\mathbf{A}}\sigma"'] \end{tikzcd} . \tag{20}$$

Диаграмма (19) означает, что отображение φ' является симметрией поля геометрических объектов σ, а диаграмма (20) означает, что отображение $T^{\mathbf{A}}\varphi'$ является симметрией поля геометрических объектов $T^{\mathbf{A}}\sigma$. Но тогда отображение $\Phi \circ T^{\mathbf{A}}(\varphi'^{-1})$ также является симметрией поля $T^{\mathbf{A}}\sigma$.

Это позволяет сформулировать следующее предложение.

Предложение 1. *Всякую симметрию Φ поля геометрических объектов $T^{\mathbf{A}}\sigma$ на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ можно представить в виде композиции $\Phi = \Theta \circ T^{\mathbf{A}}\psi$ продолжения $T^{\mathbf{A}}\psi$ некоторой симметрии ψ поля геометрических объектов σ на многообразии M и симметрии Θ, сохраняющей слои расслоения $T^{\mathbf{A}}M$, т. е. проектирующейся в тождественный диффеоморфизм многообразия M.*

В соответствии с (17) $\mathbf{A}$-диффеоморфизм Θ, сохраняющий слои расслоения $T^{\mathbf{A}}M$, является продолжением $\theta^{\mathbf{A}}$ некоторого сечения $\theta\colon M \to T^{\mathbf{A}}M$.

$\mathbf{A}$-гладкое поле
$$\Sigma\colon T^{\mathbf{A}}M \to E^{\mathbf{A}}(T^{\mathbf{A}}M)$$
геометрических объектов типа $E^{\mathbf{A}}$ на $T^{\mathbf{A}}M$ может быть задано также $\mathbf{A}$-гладким эквивариантным по отношению к действиям группы Ли $T^{\mathbf{A}}G^r_n$ отображением
$$\Lambda = \Lambda_\Sigma\colon T^{\mathbf{A}}B^rM \to T^{\mathbf{A}}F.$$
Полю геометрических объектов $T^{\mathbf{A}}\sigma$ на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ при этом соответствует продолжение $T^{\mathbf{A}}\lambda$ отображения $\lambda = \lambda_\sigma$, соответствующего полю геометрических объектов σ (см. (4)).

$\mathbf{A}$-диффеоморфизм
$$\Theta\colon T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}M,$$
проектирующийся в тождественное преобразование многообразия M, переводит поле геометрических объектов $T^{\mathbf{A}}\lambda$ в поле геометрических объектов такого же типа
$$\Lambda = T^{\mathbf{A}}\lambda \circ \Theta^{\mathbf{R}(n,r)}, \tag{21}$$
где
$$\Theta^{\mathbf{R}(n,r)}\colon T^{\mathbf{A}}B^rM \to T^{\mathbf{A}}B^rM\ —$$
продолжение отображения Θ на расслоение реперов $T^{\mathbf{A}}B^rM$, получаемое применением функтора Вейля $T^{\mathbf{R}(n,r)}$ к отображению Θ и использованием естественной эквивалентности функторов (10). Ограничение $\Theta^{\mathbf{R}(n,r)} \circ i_0$ (здесь i_0 — нулевое сечение расслоения $\pi\colon T^{\mathbf{A}}B^rM \to B^rM$) отображения $\Theta^{\mathbf{R}(n,r)}$ на B^rM совпадает с отображением (12), поэтому ограничение $\Lambda \circ i_0$ отображения (21) на B^rM совпадает с джетом Ли (13). Отсюда вытекает следующее предложение.

Предложение 2. $\mathbf{A}$-*диффеоморфизм*
$$\Theta\colon T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}M,$$
порождаемый сечением $\theta\colon M \to T^{\mathbf{A}}M$, *является симметрией поля геометрических объектов* $T^{\mathbf{A}}\lambda$ *тогда и только тогда, когда*
$$\mathcal{L}_\theta \lambda = \lambda. \tag{22}$$

В терминах сечений $\Sigma = \Sigma_\Lambda$ и $\sigma = \sigma_\lambda$, соответствующих полям геометрических объектов Λ и λ, соотношение (21) принимает вид следующей коммутативной диаграммы:
$$\begin{tikzcd} T^{\mathbf{A}}E(M) \arrow[r, "E^{\mathbf{A}}(\theta^{\mathbf{A}})"] & T^{\mathbf{A}}E(M) \\ T^{\mathbf{A}}M \arrow[u, "\Sigma"] \arrow[r, "\theta^{\mathbf{A}}"] & T^{\mathbf{A}}M \arrow[u, "T^{\mathbf{A}}\sigma"'] \end{tikzcd} . \tag{23}$$

Предложение 3. *Сечение*

$$\mathcal{L}_\theta \sigma_\lambda \colon M \to VT^{\mathbf{A}}E(M),$$

задающее джет Ли $\mathcal{L}_\theta \lambda$, имеет вид

$$\mathcal{L}_\theta \sigma = \bigl(E^{\mathbf{A}}(\theta^{\mathbf{A}})\bigr)^{-1} \circ T^{\mathbf{A}}\sigma \circ \theta. \tag{24}$$

Доказательство. В соответствии с (21) и (23) джет Ли $\mathcal{L}_\theta \sigma$ поля геометрических объектов σ задаётся композицией $\Sigma \circ i_0$, где $i_0 \colon M \to T^{\mathbf{A}}M$ — нулевое сечение. При этом $\Sigma \circ i_0$ оказывается сечением расслоения $VT^{\mathbf{A}}E(M) \to M$. Поскольку $\theta^{\mathbf{A}} \circ i_0 = \theta$, то формула (24) следует из коммутативной диаграммы (23). □

Джет Ли (24) и, в частности, производная Ли (6), включают в себя поле геометрических объектов σ, поскольку $\sigma = \pi \circ \mathcal{L}_\theta \sigma$, где $\pi \colon T^{\mathbf{A}}E(M) \to E(M)$ — проекция расслоения Вейля на базу. Можно представить джет Ли как отдельное поле геометрических объектов. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \sigma^{-1}\bigl(VT^{\mathbf{A}}E(M)\bigr) \arrow[r, "i"] & VT^{\mathbf{A}}E(M) \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[u, "L_\theta \sigma"] \arrow[ur, "\mathcal{L}_\theta \sigma"] \arrow[r, "\sigma"] & E(M) \end{tikzcd}, \tag{25}$$

в которой $\pi \colon VT^{\mathbf{A}}E(M) \to E(M)$ — проекция вертикального расслоения Вейля на базу, $\sigma^{-1}\bigl(VT^{\mathbf{A}}E(M)\bigr) \to M$ — обратный образ расслоения π, i — вложение обратного образа $\sigma^{-1}\bigl(VT^{\mathbf{A}}E(M)\bigr)$ в расслоение $VT^{\mathbf{A}}E(M)$, $L_\theta \sigma$ — отображение, однозначно определённое соотношением $i \circ L_\theta \sigma = \mathcal{L}_\theta \sigma$. Отображение $L_\theta \sigma$, определяемое диаграммой (25), можно также называть джетом Ли поля геометрических объектов σ по отношению к полю $\mathbf{A}$-скоростей θ.

Использование отображения $L_\theta \sigma$ позволяет записать условие (22) инвариантности поля геометрических объектов $T^{\mathbf{A}}\sigma$ относительно $\mathbf{A}$-диффеоморфизма $\Theta \colon T^{\mathbf{A}}M \to T^{\mathbf{A}}M$ из предложения 2 в виде

$$L_\theta \sigma = 0.$$

Расслоение $\sigma^{-1}\bigl(VT^{\mathbf{A}}E(M)\bigr) \to M$ зависит от рассматриваемого поля геометрических объектов σ, но не зависит от поля $\mathbf{A}$-скоростей θ. В случае когда действие (14) группы Ли G^r_n на $T^{\mathbf{A}}F$ задаёт естественную тривиализацию расслоения $\pi \colon T^{\mathbf{A}}F \to F$, расслоение $\sigma^{-1}\bigl(VT^{\mathbf{A}}E(M)\bigr) \to M$ не будет зависеть от σ. Это имеет место, например, для тензорных полей и для полей объектов линейной связности на M. При этом для векторных полей θ отображения $L_\theta \sigma$ задают производные Ли тензорных полей и полей объектов линейной связности в обычном смысле [4].

4. Симметрии полей геометрических объектов на касательном расслоении второго порядка

Касательное расслоение второго порядка T^2M (2-касательное расслоение) гладкого многообразия M представляет собой расслоение Вейля $T^{\mathbf{D}^2}M$, соответствующее алгебре триальных чисел $\mathbf{D}^2 = \mathbf{R}(\varepsilon^2)$. Это коммутативная ассоциативная алгебра размерности три, элементы которой имеют вид $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, а умножение определяется условием $\varepsilon^3 = 0$. Алгебра $\mathbf{D}^2$ может также рассматриваться как алгебра срезанных многочленов степени, меньшей или равной 2, от одной переменной, т. е. как фактор-алгебра алгебры многочленов $\mathbf{R}[t]$ по главному идеалу $t^3\mathbf{R}[t]$ многочленов, кратных третьей степени t^3 переменной t. Элементами расслоения T^2M являются 2-скорости на M, т. е. классы эквивалентности $[\gamma]^2$ гладких кривых

$$\gamma\colon (a,b) \ni t \mapsto \gamma(t) \in M, \quad 0 \in (a,b) \subset \mathbf{R},$$

относительно отношения эквивалентности

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_1(0) = \gamma_2(0),$$
$$\left.\frac{d(h^i \circ \gamma_1)}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d(h^i \circ \gamma_2)}{dt}\right|_0, \quad \left.\frac{d^2(h^i \circ \gamma_1)}{dt^2}\right|_0 = \left.\frac{d^2(h^i \circ \gamma_2)}{dt^2}\right|_0,$$

где

$$h\colon U \ni x \mapsto \{x^i = h^i(x)\} \in U^* \subset \mathbf{R}^n, \quad U \ni \gamma_1(0), \text{ —}$$

некоторая карта из атласа на M. 2-скорость $[\gamma]^2$ называется также 2-джетом ростка $\gamma\colon (\mathbf{R}, 0) \to (M, x)$ и обозначается $j^2_x\gamma$. Карта (U, h) индуцирует карту

$$h^2\colon (\pi^2_0)^{-1}(U) \ni X = j^2_x\gamma \mapsto \{x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i\} \in U^* \times \mathbf{R}^{2n}$$

на T^2M, где

$$\pi^2_0\colon T^2M \ni X = j^2_x\gamma \mapsto x \in M \text{ —}$$

каноническая проекция,

$$\dot{x}^i = \left.\frac{d(h^i \circ \gamma)}{dt}\right|_0, \quad \ddot{x}^i = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2(h^i \circ \gamma)}{dt^2}\right|_0.$$

В [1] расслоение T^2M называется соприкасающимся расслоением и обозначается $\operatorname{Osc} M$.

Преобразованиям координат $h' \circ h^{-1}$ на пересечении областей определения $U \cap U'$ карт (U, h) и (U', h') на M, имеющим вид $x^{i'} = f^{i'}(x^i)$, на T^2M соответствуют преобразования координат $(h')^2 \circ (h^2)^{-1}$, имеющие вид

$$x^{i'} = f^{i'}(x^i), \quad \dot{x}^{i'} = (\partial_j f^{i'})\dot{x}^j, \quad \ddot{x}^{i'} = (\partial_j f^{i'})\ddot{x}^j + \frac{1}{2}(\partial^2_{jk} f^{i'})\dot{x}^j\dot{x}^k, \tag{26}$$

где использованы обозначения

$$\partial_j f^{i'} = \frac{\partial f^{i'}}{\partial x^j}, \quad \partial^2_{jk} f^{i'} = \frac{\partial^2 f^{i'}}{\partial x^j\,\partial x^k}. \tag{27}$$

Обозначения для частных производных вида (27) в дальнейшем используются без специальных оговорок.

Если в определении отношения эквивалентности на множестве кривых

$$\gamma\colon (a,b) \to M, \quad 0 \in (a,b) \subset \mathbf{R},$$

требовать только совпадения значений кривых в нуле, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, и совпадения значений в нуле первых производных, $d(h^i \circ \gamma_1)/dt|_0 = d(h^i \circ \gamma_2)/dt|_0$, то соответствующее множество классов эквивалентности $[\gamma]^1 = j_x^1\gamma$ образует касательное расслоение (первого порядка) TM. Карта (U,h) на многообразии M индуцирует карту

$$h^1\colon (\pi_0^1)^{-1}(U) \ni X = j_x^1\gamma \mapsto \{x^i, \dot{x}^i\} \in U^* \times \mathbf{R}^n$$

на TM. Каноническую проекцию расслоения TM на многообразие M,

$$j_x^1\gamma \mapsto x,$$

будем обозначать

$$\pi_0^1\colon TM \to M.$$

Имеется также каноническая проекция

$$\pi_1^2\colon T^2M \to TM, \quad j_x^2\gamma \mapsto j_x^1\gamma.$$

Из уравнений (26) следует, что проекция π_1^2 определяет локально тривиальное расслоение T^2M над TM со стандартным слоем $\mathbf{R}^n$. Расслоение $\pi_1^2\colon T^2M \to TM$ является аффинным расслоением, т. е. $\pi_1^2\colon T^2M \to TM$ — расслоение, структурной группой которого является группа аффинных преобразований пространства $\mathbf{R}^n$. На каждом слое этого расслоения имеется естественная структура аффинного пространства.

Расслоение T^2M несёт на себе структуру $\mathbf{D}^2$-гладкого многообразия [8] (см. также [2]). Всякое $\mathbf{D}^2$-гладкое отображение

$$F\colon T^2M \to T^2M'$$

полностью определяется отображением

$$f = F \circ i_0\colon M \to T^2M',$$

где $i_0\colon M \to T^2M$ — нулевое сечение. При этом отображение F называется $\mathbf{D}^2$-продолжением отображения f и обозначается $f^{\mathbf{D}^2}$. Если f задаётся в локальных координатах

$$Y^\alpha = f^\alpha(x^i) + \varepsilon g^\alpha(x^i) + \varepsilon^2 h^\alpha(x^i), \tag{28}$$

то $f^{\mathbf{D}^2}$ имеет уравнения

$$\begin{aligned} Y^\alpha = f^\alpha(x^i) + \varepsilon\big(\dot{x}^j\partial_j f^\alpha + g^\alpha(x^i)\big) &+ \\ + \varepsilon^2\left(\ddot{x}^j\partial_j f^\alpha + \frac{1}{2}\dot{x}^j\dot{x}^k\partial^2_{jk}f^\alpha + \dot{x}^j\partial_j g^\alpha + h^\alpha(x^i)\right)&. \end{aligned} \tag{29}$$

Сечение
$$\theta\colon M \to T^2M$$
определяет $\mathbf{D}^2$-диффеоморфизм
$$\theta^{\mathbf{D}^2}\colon T^2M \to T^2M.$$
Если θ имеет уравнения
$$y^i + \varepsilon\dot{y}^i + \varepsilon^2\ddot{y}^i = x^i + \varepsilon g^i(x^k) + \varepsilon^2 h^i(x^k), \tag{30}$$
то $\theta^{\mathbf{D}^2}$ имеет уравнения
$$y^i + \varepsilon\dot{y}^i + \varepsilon^2\ddot{y}^i = x^i + \varepsilon\big(\dot{x}^i + g^i(x^k)\big) + \varepsilon^2\big(\ddot{x}^i + \dot{x}^j\partial_j g^i + h^i(x^k)\big). \tag{31}$$

В уравнениях (30) и (31) функции g^i являются координатами некоторого векторного поля g на многообразии M — сечения $\pi^2_1\circ\theta\colon M \to TM$ касательного расслоения многообразия M.

Как было отмечено выше, проекция $\pi^2_1\colon T^2M \to TM$ определяет аффинное расслоение. Функции склейки этого аффинного расслоения задаются уравнениями (26)
$$\ddot{x}^{i'} = (\partial_j f^{i'})\ddot{x}^j + \frac{1}{2}(\partial^2_{ik} f^{i'})\dot{x}^j\dot{x}^k.$$
Функции склейки ассоциированного векторного расслоения имеют вид $z^{i'} = (\partial_j f^{i'})z^j$, откуда следует, что векторное расслоение, ассоциированное с аффинным расслоением $\pi^2_1\colon T^2M \to TM$, изоморфно расслоению
$$\mathrm{pr}_1\colon TM \oplus TM \to TM,$$
где $TM \oplus TM$ — сумма Уитни двух касательных расслоений многообразия M, а pr_1 — проекция на первое слагаемое. Отсюда следует, что два элемента $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$, принадлежащие одному слою $(\pi^2_1)^{-1}\big(X^{(1)}\big)$ расслоения $\pi^2_1\colon T^2M \to TM$, определяют элемент $Z^{(1)}$ из слоя $\mathrm{pr}_1^{-1}\big(X^{(1)}\big)$ — вектор, соединяющий точки $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ аффинного пространства $(\pi^2_1)^{-1}\big(X^{(1)}\big)$. Если $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ имеют соответственно координаты $\{x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i\}$ и $\{x^i, \dot{x}^i, \ddot{y}^i\}$, то элемент $Z^{(1)}$ имеет координаты $\{x^i, \dot{x}^i, z^i = \ddot{y}^i - \ddot{x}^i\}$. Этот элемент Z представляет собой пару векторов из касательного пространства T_xM, $x = \pi^1_0\big(X^{(1)}\big)$, с координатами $\{\dot{x}^i\}$ и $\{z^i = \ddot{y}^i - \ddot{x}^i\}$. Пусть
$$\beta\colon T^2M \times_{TM} T^2M \to TM \oplus TM \,—$$
отображение, относящее паре элементов $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ элемент Z. Сечение касательного расслоения $\nu\colon M \to TM$, заданное в локальных координатах уравнениями $\dot{x}^i = \nu^i(x^k)$ продолжается до сечения $\nu^{(2)}\colon M \to T^2M$, представляющего собой поле 2-скоростей потока $\varphi(x,t) = \varphi_t(x)$ векторного поля ν. В локальных координатах это поле 2-скоростей имеет уравнения
$$\dot{x}^i = \nu^i(x^k) = \left.\frac{d\varphi^i(x^k)}{dt}\right|_{t=0}, \quad \ddot{x}^i = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\varphi^i(x^k)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\nu^k\partial_k\nu^i. \tag{32}$$

Отсюда следует, что поле 2-скоростей (сечение расслоения $\pi_1^2\colon T^2M \to M$) $\theta\colon M \to T^2M$ определяет (взаимно-однозначно) пару векторных полей на M:

$$\theta^1 = \pi_1^2 \circ \theta, \quad \eta = \mathrm{pr}_2 \circ \beta \circ \big(\theta, (\theta^1)^{(2)}\big).$$

Эти векторные поля будем называть *ассоциированными* с полем 2-скоростей θ. Если в локальных координатах θ имеет уравнения

$$\dot{x}^i = \dot{\theta}^i(x^k), \quad \ddot{x}^i = \ddot{\theta}^i(x^k),$$

то векторные поля θ^1 и η определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = \dot{\theta}^i, \quad \dot{x}^i = \ddot{\theta}^i - \frac{1}{2}\dot{\theta}^k \partial_k \dot{\theta}^i$$

соответственно.

Отметим, что соответствие, связывающее с многообразием M отображение $\pi_1^2\colon T^2M \to TM$, является естественным преобразованием из функтора $T^2 = T^{\mathbf{D}^2}$ в функтор $T = T^{\mathbf{D}}$. Это преобразование индуцируется [10] эпиморфизмом алгебр $\mathbf{D}^2 \to \mathbf{D}^2/\varepsilon^2\mathbf{D}^2 \cong \mathbf{D}$, где $\mathbf{D} = \mathbf{R}(\varepsilon)$ — алгебра дуальных чисел (чисел вида $a + b\varepsilon$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, с операцией умножения, определённой соотношением $\varepsilon^2 = 0$).

Предложение 4. *Пусть $\sigma\colon M \to E(M)$ — поле геометрических объектов типа E на многообразии M, $\theta\colon M \to T^2M$ — поле 2-скоростей на M, а θ^1 и η — векторные поля на M, ассоциированные с полем 2-скоростей θ. Условие $\mathcal{L}_\theta\sigma = \sigma$ эквивалентно одновременному выполнению условий $\mathcal{L}_{\theta^1}\sigma = \sigma$ и $\mathcal{L}_\eta\sigma = \sigma$.*

Доказательство. Имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & T^2E(M) \arrow[r, "\pi_1^2"] & TE(M) \\
M \arrow[r, "\theta"] & T^2M \arrow[u, "T^2\sigma"] \arrow[r, "\pi_1^2"] & TM \arrow[u, "T\sigma"']
\end{tikzcd} . \qquad (33)$$

Применение естественного преобразования π_1^2 к композиции $(\theta^{\mathbf{D}^2})^{-1} \circ T^2\sigma$ даёт $(\theta^{\mathbf{D}})^{-1} \circ T\sigma$, поэтому $\pi_1^2 \circ \mathcal{L}_\theta\sigma = \mathcal{L}_{\theta^1}\sigma$. Следовательно, $\mathcal{L}_\theta\sigma = \sigma$ влечёт $\mathcal{L}_{\theta^1}\sigma = \sigma$.

Предположим, что имеет место соотношение $\mathcal{L}_\nu\sigma = \sigma$ для некоторого векторного поля ν. Тогда для поля 2-скоростей $\nu^{(2)}$ потока векторного поля ν, определяемого уравнениями (32), также $\mathcal{L}_{\nu^{(2)}}\sigma = \sigma$. Для доказательства этого факта рассмотрим отображение $\lambda = \lambda_\sigma\colon P^rM \to F$, соответствующее сечению $\sigma\colon M \to E(M)$. Поток $\varphi(x,t) = \varphi_t(x)$ векторного поля ν на многообразии M продолжается до потока $\Phi(X,t) = \Phi_t(X)$ на расслоении r-реперов P^rM. При отображении λ кривая $\Phi_t(X)$ на P^rM, представляющая собой траекторию фиксированной точки X, переходит в кривую $\lambda(\Phi_t(X))$ на F. Условие $\mathcal{L}_\nu\lambda = \lambda$ означает, что $\lambda\big(\Phi_t(X)\big)$ — это постоянный элемент из F. Поэтому 2-джет (а также и джет любого порядка) $j_0^2\Big(\lambda\big(\Phi_t(X)\big)\Big) = 0$. Следовательно,

$\mathcal{L}_{\nu^{(2)}}\lambda = \left(T^2\lambda\nu^{\mathbf{R}(n,r)}\right)(X)$ — нулевая 2-скорость в точке $\lambda(X)$ и $\mathcal{L}_{\nu^{(2)}}\lambda = \lambda$. Таким образом, $\mathcal{L}_{\theta^1}\sigma = \sigma$ влечёт $\mathcal{L}_{(\theta^1)^{(2)}}\sigma = \sigma$.

По предложению 2 условия $\mathcal{L}_\theta\sigma = \sigma$ и $\mathcal{L}_{(\theta^1)^{(2)}}\sigma = \sigma$ эквивалентны тому, что $\mathbf{D}^2$-диффеоморфизмы (31), порождаемые полями 2-скоростей θ и $(\theta^1)^{(2)}$, являются симметриями поля геометрических объектов $T^{\mathbf{D}^2}\sigma$, откуда следует, что композиция $\mathbf{D}^2$-диффеоморфизмов $\theta^{\mathbf{D}^2}$ и $\left(\left((\theta^1)^{(2)}\right)^{\mathbf{D}^2}\right)^{-1}$ является симметрией поля геометрических объектов $T^{\mathbf{D}^2}\sigma$. Прямые вычисления показывают, что для поля 2-скоростей θ, заданного в локальных координатах уравнениями

$$\dot{x}^i = \dot{\theta}^i(x^k), \quad \ddot{x}^i = \ddot{\theta}^i(x^k),$$

композиция

$$\theta^{\mathbf{D}^2} \circ \left(\left((\theta^1)^{(2)}\right)^{\mathbf{D}^2}\right)^{-1}$$

имеет вид

$$y^i + \varepsilon\dot{y}^i + \varepsilon^2\ddot{y}^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i + \varepsilon^2\left(\ddot{x}^i + \ddot{\theta}^i - \frac{1}{2}\dot{\theta}^j\partial_j\dot{\theta}^i\right). \tag{34}$$

$\mathbf{D}^2$-диффеоморфизм (34) расслоения T^2M порождается полем 2-скоростей η', имеющим следующие уравнения в локальных координатах:

$$\dot{x}^i = 0, \quad \ddot{x}^i = \ddot{\theta}^i - \frac{1}{2}\dot{\theta}^j\partial_j\dot{\theta}^i.$$

Результатом предыдущих рассуждений является следующее утверждение: соотношение $\mathcal{L}_\theta\sigma = \sigma$ выполняется тогда и только тогда, когда одновременно $\mathcal{L}_{\theta^1}\sigma = \sigma$ и $\mathcal{L}_{\eta'}\sigma = \sigma$. Остаётся показать, что условие $\mathcal{L}_{\eta'}\sigma = \sigma$ эквивалентно условию $\mathcal{L}_\eta\sigma = \sigma$.

Имеется вложение i алгебры дуальных чисел $\mathbf{D} = \mathbf{R}(\varepsilon)$ в алгебру триальных чисел $\mathbf{D}^2 = \mathbf{R}(\varepsilon^2)$:

$$i\colon a + b\varepsilon \mapsto a + b\varepsilon^2.$$

Это вложение индуцирует [10] естественное преобразование из функтора $T = T^{\mathbf{D}}$ в функтор $T^2 = T^{\mathbf{D}^2}$, которое тоже будем обозначать $i\colon T \to T^2$. Отображение $i_M\colon TM \to T^2M$ ставит в соответствие элементу касательного расслоения TM с координатами $\{x^i, \dot{x}^i\}$ элемент расслоения T^2M с координатами $\{x^i, 0, \dot{x}^i\}$. Вложение

$$I = i \otimes \mathrm{id}\colon \mathbf{D}\otimes\mathbf{R}(n,r) \to \mathbf{D}^2\otimes\mathbf{R}(n,r)$$

аналогичным образом индуцирует естественное преобразование (для его обозначения используем тот же символ I)

$$I\colon T^{\mathbf{D}\otimes\mathbf{R}(n,r)} \to T^{\mathbf{D}^2\otimes\mathbf{R}(n,r)}.$$

Ограничение отображения I_M на $TP^rM \subset T^{\mathbf{D}\otimes\mathbf{R}(n,r)}$ является вложением $I_M\colon TP^rM \to T^2P^rM$. В локальных координатах $\{X^i, \dot{X}^i\}$, $X^i, \dot{X}^i \in \mathbf{R}(n,r)$, $i = 1,\ldots,n$, на TP^rM и $\{X^i, \dot{X}^i, \ddot{X}^i\}$, $X^i, \dot{X}^i, \ddot{X}^i \in \mathbf{R}(n,r)$, $i = 1,\ldots,n$, на

T^2P^rM вложение I_M ставит в соответствие элементу из TP^rM с координатами X^i, $\dot{X}^i$ элемент из T^2P^rM с координатами X^i, 0, $\dot{X}^i$. При этом

$$(\eta')^{\mathbf{R}(n,r)} = I_M \circ \eta^{\mathbf{R}(n,r)}$$

и

$$\mathcal{L}_{\eta'}\lambda = T^2\lambda \circ (\eta')^{\mathbf{R}(n,r)} = T^2\lambda \circ I_M \circ \eta^{\mathbf{R}(n,r)} = i_F \circ T\lambda \circ \eta^{\mathbf{R}(n,r)} = i_F \circ \mathcal{L}_\eta\lambda.$$

Поскольку отображение $i_F\colon TF \to T^2F$ инъективно и является линейным на слоях расслоения TF, то $\mathcal{L}_{\eta'}\lambda$ принимает значения в образе нулевого сечения расслоения TF тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_\eta\lambda$ принимает значения в образе нулевого сечения расслоения T^2F. □

В качестве примера приведём вычисление джета Ли векторного поля по отношению к полю 2-скоростей по формуле (24).

Предложение 5. *Пусть на многообразии M заданы векторное поле*

$$\sigma\colon M \to TM$$

и поле 2-скоростей

$$\theta\colon M \to T^2M$$

с уравнениями

$$\dot{x}^i = \sigma^i(x^k)$$

и

$$\dot{x}^i = \dot{\theta}^i(x^k), \quad \ddot{x}^i = \ddot{\theta}^i(x^k)$$

соответственно. Тогда джет Ли

$$\mathcal{L}_\theta\sigma\colon M \to VT^{\mathbf{D}^2}(TM)$$

задаётся следующими уравнениями:

$$(\mathcal{L}_\theta\sigma)^i = \sigma^i(x^k) + \varepsilon(\dot{\theta}^m\partial_m\sigma^i - \sigma^m\partial_m\dot{\theta}^i) + \\ + \varepsilon^2\left(\ddot{\theta}^m\partial_m\sigma^i + \frac{1}{2}\dot{\theta}^m\dot{\theta}^k\partial^2_{mk}\sigma^i - (\dot{\theta}^m\partial_m\sigma^k - \sigma^m\partial_m\dot{\theta}^k)\partial_k\dot{\theta}^i - \sigma^m\partial_m\ddot{\theta}^i\right). \quad (35)$$

Доказательство. Поле 2-скоростей θ на многообразии M индуцирует $\mathbf{D}^2$-диффеоморфизм

$$\theta^{\mathbf{D}^2}\colon T^{\mathbf{D}^2}M \to T^{\mathbf{D}^2}M,$$

который в локальных координатах имеет следующий вид:

$$y^i = x^i, \quad \dot{y}^i = \dot{x}^i + \dot{\theta}^i, \quad \ddot{y}^i = \ddot{x}^i + \dot{x}^k\partial_k\dot{\theta}^i + \ddot{\theta}^i \iff \\ \iff Y^i = X^i + \varepsilon\dot{\theta}^i + \varepsilon^2(\dot{x}^k\partial_k\dot{\theta}^i + \ddot{\theta}^i). \quad (36)$$

Продолжение $E^{\mathbf{D}^2}(\theta^{\mathbf{D}^2})$ $\mathbf{D}^2$-диффеоморфизма (36) в данном случае ($E = TM$) является касательным отображением $T\theta^{\mathbf{D}^2}$, которое имеет следующий вид в локальных координатах $\{X^i, V^i\}$ на $TT^{\mathbf{D}^2}M$ ($\{X^i, V^i\} \mapsto \{Y^i, W^i\}$):

$$\begin{aligned}
&Y^i = X^i + \varepsilon\dot\theta^i + \varepsilon^2(\dot x^k\partial_k\dot\theta^i + \ddot\theta^i),\\
&W^i = \frac{\partial Y^i}{\partial X^j}V^j = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}V^j = \big(\delta^i_j + \varepsilon\partial_j\dot\theta^i + \varepsilon^2(\dot x^k\partial^2_{kj}\dot\theta^i + \partial_j\ddot\theta^i)\big)V^j =\\
&\quad = V^i + \varepsilon(\partial_j\dot\theta^i)v^j + \varepsilon^2\big((\partial_j\dot\theta^i)\dot v^j + \dot x^k(\partial^2_{kj}\dot\theta^i)v^j + (\partial_j\ddot\theta^i)v^j\big) \iff\\
&\iff y^i = x^i, \quad \dot y^i = \dot x^i + \dot\theta^i, \quad \ddot y^i = \ddot x^i + \dot x^k\partial_k\dot\theta^i + \ddot\theta^i,\\
&w^i = v^i, \quad \dot w^i = \dot v^i + (\partial_k\dot\theta^i)v^k, \quad \ddot w^i = \ddot v^i + (\partial_j\dot\theta^i)\dot v^j + \dot x^k\partial^2_{kj}\dot\theta^i v^j + \partial_j\ddot\theta^i v^j.
\end{aligned}$$

Обратное отображение $(T\theta^{\mathbf{D}^2})^{-1}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&x^i = y^i, \quad \dot x^i = \dot y^i - \dot\theta^i(y^k), \quad \ddot x^i = \ddot y^i - (\dot y^k - \dot\theta^k)\partial_k\dot\theta^i - \ddot\theta^i(y^k),\\
&V^i = W^i - \varepsilon(\partial_k\dot\theta^i)w^k -\\
&\quad - \varepsilon^2\big((\partial_j\dot\theta^i)(\dot w^j - (\partial_k\dot\theta^j)w^k) + (\dot y^k - \dot\theta^k)(\partial^2_{kj}\dot\theta^i)w^j + (\partial_j\ddot\theta^i)w^j\big).
\end{aligned} \tag{37}$$

$\mathbf{D}^2$-лифт векторного поля σ, векторное поле $\Sigma = T^{\mathbf{D}^2}\sigma$, имеет вид

$$\Sigma^i(Y^k) = \sigma^i(y^k) + \varepsilon\dot y^m\partial_m\sigma^i + \varepsilon^2\left(\ddot y^m\partial_m\sigma^i + \frac{1}{2}\dot y^m\dot y^k\partial_{mk}\sigma^i\right). \tag{38}$$

Подставляя в (38) $\dot y^i = \dot\theta^i(x^k)$, $\ddot y^i = \ddot\theta^i(x^k)$, а затем подставляя полученный результат в (37) (Λ^i на место W^i), получим выражение (35) для $\mathcal{L}_\theta\sigma = (T\theta^{\mathbf{D}^2})^{-1} \circ T^{\mathbf{D}^2}\sigma \circ \theta$. □

Из выражения (35) для джета Ли $\mathcal{L}_\theta\sigma$ векторного поля σ по отношению к полю 2-скоростей θ следует, что $\mathcal{L}_\theta\sigma = \sigma$ тогда и только тогда, когда

$$\dot\theta^m\partial_m\sigma^i - \sigma^m\partial_m\dot\theta^i = 0, \tag{39}$$

$$\ddot\theta^m\partial_m\sigma^i + \frac{1}{2}\dot\theta^m\dot\theta^k\partial^2_{mk}\sigma^i - (\dot\theta^m\partial_m\sigma^k - \sigma^m\partial_m\dot\theta^k)\partial_k\dot\theta^i - \sigma^m\partial_m\ddot\theta^i = 0. \tag{40}$$

Условие (39) — это обращение в нуль производной Ли $L_{\theta^1}\sigma$. Если записать уравнения (40) для поля 2-скоростей $(\theta^1)^{(2)}$, т. е. подставить в (40) $\frac{1}{2}\dot\theta^k\partial_k\dot\theta^i$ вместо $\ddot\theta^i$, легко получить эквивалентность условий, представленных уравнениями (39) и (40), обращению в нуль производных Ли $L_{\theta^1}\sigma$ и $L_\eta\sigma$, где η — векторное поле, имеющее в локальных координатах уравнения

$$\eta^i = \ddot\theta^i - \frac{1}{2}\dot\theta^k\partial_k\dot\theta^i,$$

что представляет собой частный случай предложения 4.

Отметим, что в [2] исследовались преобразования продолжений тензорных полей и линейных связностей с многообразия M на расслоение T^2M при преобразованиях расслоения T^2M, порождаемых полями 2-скоростей на M. Из полученных в [2] результатов, в частности, следует утверждение предложения 4 для указанных полей геометрических объектов.

Литература

[1] Атанасиу Г., Балан В., Брынзей Н., Рахула М. Дифференциальная геометрия второго порядка и приложения: Теория Мирона—Атанасиу. — М.: Либроком, 2010.

[2] Гайнуллин Ф. Р., Шурыгин В. В. Голоморфные тензорные поля и линейные связности на касательном расслоении второго порядка
Учёные записки Казанск. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 1. — С. 36—50.

[3] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1979. — Т. 9. — С. 5—246.

[4] Лаптев Б. Л. Дифференцирование Ли // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1967. — С. 429—465.

[5] Математическая энциклопедия. Т. 3. — М.: Советская энциклопедия, 1982.

[6] Смолякова Л. Б., Шурыгин В. В. Лифты геометрических объектов на расслоение Вейля $T^{\mu}M$ слоёного многообразия, определяемое эпиморфизмом μ алгебр Вейля // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2007. — № 10. — С. 76—89.

[7] Фомин В. Е., Шурыгин В. В. Очерк научной и педагогической деятельности А. П. Широкова // Учёные записки Казанск. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — Т. 150, кн. 1. — С. 130—152.

[8] Широков А. П. Замечание о структурах в касательных расслоениях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1974. — Т. 5. — С. 311—318.

[9] Широков А. П. Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. Тр. геом. сем. — 1981. — Т. 12. — С. 61—95.

[10] Шурыгин В. В. Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй // Успехи мат. наук. — 1993 — Т. 48, вып. 2 (290). — С. 75—106.

[11] Bushueva G. N., Shurygin V. V. On the higher-order geometry of Weil bundles over smooth manifolds and over parameter-dependent manifolds // Lobachevskii J. Math. — 2005 — Vol. 18. — P. 53—105.

[12] Kolář I., Michor P. W., Slovák J. Natural Operations in Differential Geometry. — Berlin: Springer, 1993.