Изоморфизмы общих линейных групп над ассоциативными кольцами, градуированными абелевой группой

А. С. АТКАРСКАЯ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: atkarskaya.agatha@gmail.com

Е. И. БУНИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: HelenBunina@yandex.ru

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.54+512.552

Ключевые слова: градуированные кольца, общая линейная группа, изоморфизмы, сохраняющие градуировку.

Аннотация

В работе приведено упрощённое доказательство теоремы Голубчика—Михалёва—Зельманова о строении изоморфизмов между общими линейными группами над ассоциативными кольцами, а также доказано расширение данной теоремы на линейные группы над кольцами, градуированными абелевой группой.

Abstract

A. S. Atkarskaya, E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, Isomorphisms of general linear groups over associative rings graded by an Abelian group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 5—40.

In this paper, we give a simpler proof of the Golubchik—Mikhalev—Zelmanov theorem on the structure of isomorphisms between general linear groups over associative rings, and also prove an extension of this theorem for linear groups over rings graded by an Abelian group.

В 1980-х годах И. З. Голубчиком и А. В. Михалёвым [3] и независимо Е. И. Зельмановым [4] было дано описание изоморфизмов группы $\mathrm{GL}_n(R)$ над ассоциативным кольцом R с $1/2$. В 1997 г. И. З. Голубчик [2] продолжил описание изоморфизмов $\mathrm{GL}_n(R)$ на случай произвольного ассоциативного кольца при $n \geqslant 4$. В этой работе мы приводим упрощённое доказательство теоремы Голубчика—Михалёва—Зельманова об описании изоморфизмов между линейными

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 5—40.

группами, а также продолжаем данную теорему на случай градуированных ассоциативных колец.

Авторы выражают искреннюю благодарность И. Н. Балабе за внимание к работе.

Определение 1. Через $\mathrm{E}_n(R)$ обозначается подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, порождённая матрицами $E + re_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, $r \in R$. Через $\mathrm{D}_n(R)$ обозначается подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, порождённая диагональными матрицами. Через $\mathrm{GE}_n(R)$ обозначим подгруппу группы $\mathrm{GL}_n(R)$, порождённую группами $\mathrm{E}_n(R)$ и $\mathrm{D}_n(R)$.

Определение 2. Подмножество A кольца R называется *мультипликативным*, если $ab \in A$ для всех $a \in A$, $b \in A$.

Определение 3. Пусть $\psi\colon R \to S$ — гомоморфизм колец, A — мультипликативное подмножество кольца R. Тогда S называется *правым кольцом частных кольца R относительно A*, если выполнены следующие условия:

1) если $\psi(r) = 0$, то найдётся элемент $a \in A$, такой что $ra = 0$;
2) $\psi(A)$ состоит из обратимых элементов кольца S;
3) кольцо S состоит из элементов вида $\psi(r)\psi(a)^{-1}$, где $r \in R$, $a \in A$.

Отображение ψ в данном случае называется *каноническим гомоморфизмом*.

В разделах 1—3 мы приведём полученное авторами упрощённое доказательство следующей теоремы, доказанной И. З. Голубчиком в [2].

Теорема 1. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$ и $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты e и f колец $\mathrm{M}_n(R)$ и $\mathrm{M}_m(S)$ соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1\colon e\mathrm{M}_n(R) \to f\mathrm{M}_m(S)$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2\colon (1-e)\mathrm{M}_n(R) \to (1-f)\mathrm{M}_m(S),$$

такие что

$$\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2\big((1-e)A^{-1}\big)$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

В разделе 4 будет рассмотрено продолжение этой теоремы на случай ассоциативных колец, градуированных абелевой группой.

1. Некоторые вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $\{f_{ij} \mid i \leqslant i, j \leqslant n\}$ — полная система матричных единиц, $\bar{R} = \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1} r f_{1i} \mid r \in R \Big\}$. Тогда $R \cong \mathrm{M}_n(\bar{R})$.*

Доказательство. Пусть $r \in R$. Тогда

$$r = \Big(\sum_{i=1}^{n} f_{ii}\Big) r \Big(\sum_{j=1}^{n} f_{jj}\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ii} r f_{jj} = \sum_{i,j=1}^{n} f_{i1} f_{1i} r f_{j1} f_{1j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} f_{k1} f_{1i} r f_{j1} f_{1k}\Big) f_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}, \quad a_{ij} \in \bar{R}.$$

Определим отображение $\alpha\colon \mathrm{M}_n(\bar{R}) \to R$. Положим $\alpha(a_{ij}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}$. Очевидно, что α — гомоморфизм колец, потому что $\bar{R}$ коммутирует с f_{ij}. Отображение α сюръективно, потому что, как показано выше, для всех $r \in R$ имеет место представление $r = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}$, $a_{ij} \in \bar{R}$. Очевидно также, что α инъективно. Значит, α — изоморфизм. Лемма 1 доказана. □

Предложение 1. *Пусть S — ассоциативное кольцо с 1, $n \geqslant 4$,*

$$\{a_{ij} \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\} \subseteq S$$

и

$$a_{ij} a_{ik} = 0, \quad a_{ji} a_{ki} = 0, \quad a_{ij} a_{st} = 0, \tag{1}$$

$$a_{ij} = a_{is} a_{sj} - a_{sj} a_{is} \tag{2}$$

для всех различных $i, j, s, t \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq j$. Тогда существует система матричных единиц $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ кольца S и идемпотент e кольца $\Big\{\sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1} r f_{1i} \mid r \in S\Big\}$, такие что $a_{ij} = e f_{ij} - (1-e) f_{ji}$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Доказательство. Будем строить g_{ij}, h_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, так, чтобы

$$g_{ij} h_{st} = h_{st} g_{ij} = 0, \quad g_{ij} g_{st} = \delta_{js} g_{it}, \quad h_{ij} h_{st} = \delta_{js} h_{it} \tag{3}$$

для всех $i, j, s, t \in \{1, \ldots, n\}$.

Сначала покажем, что из (1) и (2) можно получить, что

$$a_{ik} a_{ki} a_{ij} = a_{ik} a_{kj}, \quad a_{ik} a_{ki} a_{im} a_{mk} = a_{im} a_{mk} \tag{4}$$

для всех различных $i, k, j, m \in \{1, \ldots, n\}$. Действительно, имеют место равенства

$$\begin{aligned} &a_{ik} a_{ki} a_{ij} = a_{ik}(a_{kj} + a_{ij} a_{ki}) = a_{ik} a_{kj}, \\ &a_{ik} a_{ki} a_{im} a_{mk} = a_{ik}(a_{km} + a_{im} a_{ki}) a_{mk} = a_{ik} a_{km} a_{mk} = \\ &\quad = (a_{im} + a_{km} a_{ik}) a_{mk} = a_{im} a_{mk}. \end{aligned}$$

Из (4) получаем, что $a_{im} a_{mj} = a_{ik} a_{kj}$ для $i \neq j$, так как справедливы равенства

$$a_{ik} a_{kj} \overset{(4)}{=} a_{ik} a_{ki} a_{ij} \overset{(2)}{=} a_{ik} a_{ki}(a_{im} a_{mj} - a_{mj} a_{im}) \overset{(1)}{=} a_{ik} a_{ki} a_{im} a_{mj} \overset{(4)}{=} a_{im} a_{mj}.$$

Положим

$$g_{ij} = a_{ik}a_{kj}, \quad h_{ij} = a_{ki}a_{jk}, \quad g_{ii} = g_{ij}g_{ji}, \quad h_{ii} = h_{ij}h_{ji}, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

Элементы g_{ij}, h_{ij} корректно определены в силу последнего доказанного равенства и соотношений (4).

Прямым вычислением с использованием равенств (1), (2), (4) получаем, что равенства (3) выполнены для всех $i, j, s, t \in \{1, \ldots, n\}$.

Положим

$$f_{ij} = g_{ij} + h_{ij}.$$

Тогда $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ — система матричных единиц кольца S. Положим

$$e = \sum_{i=1}^{n} g_{ii}.$$

Тогда $e^2 = e$ и $e = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1}g_{11}f_{1i}$, т. е. $e \in \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1}rf_{1i} \mid r \in S\Big\}$. Кроме того, имеем, что

$$ef_{ij} - (1-e)f_{ji} = ef_{ij} + ef_{ji} - f_{ji} = g_{ij} + g_{ji} - g_{ji} - h_{ji} = g_{ij} - h_{ji} = a_{ij}.$$

Предложение доказано. □

Предложение 2. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 1$, $\varphi\colon \mathrm{E}_n(R) \to \mathrm{GL}_m(S)$ — гомоморфизм групп и*

$$(\varphi(1 + re_{ij}) - 1)(\varphi(1 + se_{kp}) - 1) = 0 \tag{5}$$

для всех $r, s \in R$ и всех i, j, k, p, таких что $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq p$, $p \neq i$. Тогда существуют идемпотент $f \in \mathrm{M}_m(S)$, кольцевой гомоморфизм

$$\theta_1\colon \mathrm{M}_n(R) \to f\mathrm{M}_m(S)f$$

и кольцевой антигомоморфизм

$$\theta_2\colon \mathrm{M}_n(R) \to (1-f)\mathrm{M}_m(S)(1-f),$$

такие что

$$\varphi(A) = \theta_1(a) + \theta_2(A^{-1}) + 1 - \theta_1(1) - \theta_2(1)$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Доказательство. Положим

$$\varphi(1 + re_{ij}) = 1 + x_{ij}(r), \quad r \in R, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

Из равенства

$$1 + rse_{ij} = [1 + re_{ik}, 1 + se_{kj}], \quad i \neq j, \quad k \neq i, \quad j \neq k,$$

и условия (5) получаем, что

$$x_{ij}(rs) = x_{ik}(r)x_{kj}(s) - x_{kj}(s)x_{ik}(r), \tag{6}$$

где $i \neq j$, $k \neq i$, $j \neq k$.

Соотношения (6) выводятся следующим образом. Выполнены равенства

$$\begin{aligned}
&(1+se_{kj})(1+re_{ik})(1+rse_{ij}) = (1+re_{ik})(1+se_{kj}),\\
&\varphi(1+se_{kj})\varphi(1+re_{ik})\varphi(1+rse_{ij}) = \varphi(1+re_{ik})\varphi(1+se_{kj}),\\
&\bigl(1+x_{kj}(s)(1+x_{ik}(r)\bigr)\bigl(1+x_{ij}(rs)\bigr) = \bigl(1+x_{ik}(r)\bigr)\bigl(1+x_{kj}(s)\bigr),\\
&\bigl(1+x_{kj}(s)+x_{ik}(r)+x_{kj}(s)x_{ik}(r)\bigr)\bigl(1+x_{ij}(rs)\bigr) =\\
&\quad = 1+x_{ik}(r)+x_{kj}(s)+x_{ik}(r)x_{kj}(s).
\end{aligned}$$

Из условия (5) получаем, что $x_{ij}(r)x_{kp}(s)=0$ при $i\neq j$, $j\neq k$, $k\neq p$, $p\neq i$. Значит,

$$1+x_{kj}(s)+x_{ik}(r)+x_{kj}(s)x_{ik}(r)+x_{ij}(rs) = 1+x_{ik}(r)+x_{kj}(s)+x_{ik}(r)x_{kj}(s),$$

откуда следует равенство (6).

Положим $a_{ij}=x_{ij}(1)$. Из (5), (6) и предложения 1 получаем, что в S существуют такие система матричных единиц f_{ij} и идемпотент f, что

$$x_{ij}(1) = ff_{ij}-(1-f)f_{ji}. \tag{7}$$

Согласно (5) и (6) получаем

$$\begin{aligned}
&x_{ij}(r) = x_{ik}(r)x_{kj}(1)-x_{kj}(1)x_{ik}(r) =\\
&\quad = x_{ik}(r)\bigl(x_{km}(1)x_{mj}(1)-x_{mj}(1)x_{km}(1)\bigr) -\\
&\quad - x_{kj}(1)\bigl(x_{im}(1)x_{mk}(r)-x_{mk}(r)x_{im}(1)\bigr) =\\
&\quad = x_{ik}(r)x_{km}(1)x_{mj}(1)+x_{kj}x_{mk}(r)x_{im}(1) =\\
&\quad = \bigl(x_{im}(1)x_{mk}(r)-x_{mk}(r)x_{im}(1)\bigr)x_{km}x_{mj} +\\
&\quad + \bigl(x_{km}(1)x_{mj}(1)-x_{mj}(1)x_{km}(1)\bigr)x_{mk}(r)x_{im}(1) =\\
&\quad = x_{im}(1)x_{mk}(r)x_{km}(1)x_{mj}(1)-x_{mj}(1)x_{km}(1)x_{mk}(r)x_{im}(1) =\\
&\quad = \bigl(x_{ik}(1)x_{km}(1)-x_{km}(1)x_{ik}(1)\bigr)x_{mk}(r)x_{km}(1)x_{mj}(1) -\\
&\quad - x_{mj}(1)x_{km}(1)x_{mk}(r)\bigl(x_{ik}(1)x_{km}(1)-x_{km}(1)x_{ik}(1)\bigr) =\\
&\quad = x_{ik}(1)x_{km}(1)x_{mk}(r)x_{km}(1)x_{mj}(1)+x_{mj}(1)x_{km}(1)x_{mk}(r)x_{km}(1)x_{ik}(1) =\\
&\quad = g_{im}x_{mk}(r)g_{kj}+h_{jk}x_{mk}(r)h_{mi}
\end{aligned}$$

(i, j, k, m различны) в обозначениях предыдущей леммы. Значит, имеет место равенство

$$x_{ij}(r) = \left(\sum_{t=1}^{n} g_{t1}g_{1m}x_{mk}(r)g_{k1}g_{1t}\right)f_{ij} + \left(\sum_{t=1}^{n} h_{t1}h_{1k}x_{mk}(r)h_{m1}h_{1t}\right)f_{ji}.$$

Из равенств (5) и (6) следует, что коэффициенты перед f_{ij} и f_{ji} в последней сумме не зависят от выбора m и k. Тогда выполнены соотношения

$$x_{ij}(r) = b(r)f_{ij}-c(r)f_{ji}, \quad b(r)=fb(r)f, \quad c(r)=(1-f)c(r)(1-f). \tag{8}$$

Из равенства (6) получаем, что

$$b\colon R \to fSf\,—$$

гомоморфизм колец,

$$c\colon R \to (1-f)S(1-f)\,—$$

антигомоморфизм колец.

Положим

$$\theta_1\Bigl(\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}e_{ij}\Bigr) = \sum_{i,j=1}^{n} b(r_{ij})f_{ij}, \quad \theta_2\Bigl(\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}e_{ij}\Bigr) = \sum_{i,j=1}^{n} c(r_{ji})f_{ij}.$$

Тогда

$$\theta_1\colon \mathrm{M}_n(R) \to f\mathrm{M}_m(S)f\,—$$

гомоморфизм колец,

$$\theta_2\colon \mathrm{M}_n(R) \to (1-f)\mathrm{M}_m(S)(1-f)\,—$$

антигомоморфизм колец.

Далее,

$$\begin{aligned}&\varphi(1+r_{ij}) = 1 + x_{ij}(r) = 1 + b(r)f_{ij} - c(r)f_{ji} = 1 + \theta_1(re_{ij}) - \theta_2(re_{ij}) = \\ &\quad = 1 + \theta_1(re_{ij}) + \theta_2(-re_{ij}) = \theta_1(1+re_{ij}) + \theta_2(1-re_{ij}) + 1 - \theta_1(1) - \theta_2(1),\\ &\varphi(AB) = \\ &\quad = \bigl(\theta_1(A)+\theta_2(A^{-1})+1-\theta_1(1)-\theta_2(1)\bigr)\bigl(\theta_1(B)+\theta_2(B^{-1})+1-\theta_1(1)-\theta_2(1)\bigr) = \\ &\quad = \theta_1(AB) + \theta_2(B^{-1}A^{-1}) + 1 - \theta_1(1) - \theta_2(1).\end{aligned}$$

Значит,

$$\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) + 1 - \theta_1(1) - \theta_2(1)$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$. Предложение доказано. □

Следующие предложения будут доказаны в разделе 2.

Предложение 3. *Пусть R, S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$, $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп, $\Lambda = \{3^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $S^1 = \mathrm{M}_m(S)\Lambda^{-1}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы Λ, $\tau\colon \mathrm{M}_m(S) \to S^1$ — канонический гомоморфизм. Тогда*

$$(\tau\varphi(1+re_{ij}) - 1)(\tau\varphi(1+se_{pq}) - 1) = 0$$

для всех $i, p \in \{1,2\}$, $j, q \in \{3,4\}$, $r, s \in R$.

Предложение 4. *Пусть R, S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$, $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп, $T = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $S^1 = \mathrm{M}_m(S)T^{-1}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы Λ, $\pi\colon \mathrm{M}_m(S) \to S^1$ — канонический гомоморфизм. Тогда*

$$(\pi\varphi(1+re_{ij}) - 1)(\pi\varphi(1+se_{pq}) - 1) = 0$$

для всех $i, p \in \{1,2\}$, $j, q \in \{3,4\}$, $r, s \in R$.

2. Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы 1. Из предложений 3 и 4 следует, что

$$(\varphi(1+re_{ij})-1)(\varphi(1+se_{pq})-1) \in \ker\tau \cap \ker\pi.$$

Если $x \in \ker\tau \cap \ker\pi$, то $2^{k_1}x = 3^{k_2}x = 0$ для некоторых k_1 и $k_2 \in \mathbb{N}$, и следовательно, $x = 0$ (так как 2^{k_1} и 3^{k_2} взаимно просты). Значит,

$$(\varphi(1+re_{ij})-1)(\varphi(1+se_{pq})-1) = 0 \tag{9}$$

для всех $i, p \in \{1,2\}$, $j, q \in \{3,4\}$, $r, s \in R$.

Сопрягая равенство (9) матрицами соответствующих транспозиций, получаем, что оно выполнено для всех $i, j, p, q \in \{1,\ldots,n\}$, таких что $i \neq j$, $j \neq p$, $p \neq q$, $q \neq i$. Тогда по предложению 3 существуют идемпотент f кольца $\mathrm{M}_m(S)$, кольцевой гомоморфизм $\theta_1\colon \mathrm{M}_n(R) \to f\mathrm{M}_m(S)f$ и кольцевой антигомоморфизм $\theta_2\colon \mathrm{M}_n(R) \to (1-f)\mathrm{M}_m(S)(1-f)$, такие что

$$\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) + 1 - \theta_1(1) - \theta_2(1)$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Пусть

$$f_{ij} = \theta_1(e_{ij}) + \theta_2(e_{ji}), \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad h_1 = \theta_1(1), \quad h_2 = \theta_2(1), \quad h = h_1 + h_2.$$

Покажем, что h — центральный идемпотент кольца $\mathrm{M}_m(S)$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\varphi(1+e_{ij}) &= \theta_1(1+e_{ij}) + \theta_2(1-e_{ij}) + 1 - \theta_1(1) - \theta_2(1) = \\
&= \theta_1(e_{ij}) - \theta_1(e_{ij}) + 1 = \\
&= 1 + \theta_1(1)\theta_1(e_{ij}) - \theta_2(1)\theta_2(e_{ij}) = \\
&= 1 + \theta_1(1)\big(\theta_1(e_{ij}) - \theta_2(e_{ji})\big) - \theta_2(1)\big(\theta_1(e_{ji}) - \theta_2(e_{ij})\big) = 1 + h_1 f_{ij} - h_2 f_{ji}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varphi(1+e_{ij}) = 1 + h_1 f_{ij} - h_2 f_{ji}. \tag{10}$$

Из представления (10) для $\varphi(1+e_{12})$, $\varphi(1+e_{ij})$, $2 \leqslant i \neq j \leqslant n$, получаем, что для всех $r \in \mathrm{M}_m(S)$ элемент $1+h_1 f_{11} r(1-h)$ коммутирует с $\varphi(1+e_{12})$, $\varphi(1+e_{ij})$, $2 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Но централизатор множества $\{1+e_{12}, 1+e_{ij} \mid 2 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$ коммутирует с $1+e_{21}$ (устанавливается прямым подсчётом). Значит, из (10) следует, что

$$(h_1 f_{21} - h_2 f_{12})\big(h_1 f_{11} r(1-h)\big) = \big(h_1 f_{11} r(1-h)\big)(h_1 f_{21} - h_2 f_{12}).$$

Отсюда выводим, что $h_1 f_{21} r(1-h) = 0$. Умножая это равенство слева на f_{12}, получаем, что

$$h_1 f_{11} r(1-h) = 0.$$

Аналогично $1+h_2 f_{11} r(1-h)$ коммутирует с $\varphi(1+e_{21})$, $\varphi(1+e_{ij})$, $2 \leqslant i \neq j \leqslant n$, и

$$h_2 f_{11} r(1-h) = 0.$$

Так как $(h_1 + h_2)f_{11} = f_{11}$, то $f_{11}r(1-h) = 0$. Таким же образом получаем, что $f_{ii}r(1-h) = 0$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. При этом $h = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{ii}$, откуда следует, что $hr(1-h) = 0$. Аналогично $(1-h)rh = 0$. Значит,

$$h \text{ — центральный идемпотент в } \mathrm{M}_m(S). \tag{11}$$

Из (11) следует, что

$$1 - \theta_1(1) - \theta_2(1) = tE, \quad t^2 = t, \quad t \in Z(S). \tag{12}$$

Для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$ выполнены равенства

$$\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) + 1 - h = h\big(\theta_1(A) + \theta_2(A^{-1})\big) + 1 + h,$$

следовательно,

$$\varphi\big(\mathrm{E}_n(R)\big) \subseteq h\mathrm{M}_m(S) + 1 - h.$$

По определению $\mathrm{E}_m(tS) = \langle 1 + tse_{ij} \rangle$, $s \in S$. Тогда $\mathrm{E}_m(tS) = \langle 1 + (1-h)se_{ij} \rangle$, $s \in S$, поэтому $\mathrm{E}_m(tS)$ коммутирует с $\varphi\big(\mathrm{E}_n(R)\big)$. Следовательно, $\varphi^{-1}\big(\mathrm{E}_m(tS)\big)$ коммутирует с $\mathrm{E}_n(R)$. Значит, $\varphi^{-1}\big(\mathrm{E}_m(tS)\big) \subseteq Z\big(\mathrm{GL}_n(R)\big)$, откуда получаем, что $\mathrm{E}_m(tS) \subseteq Z\big(\mathrm{GL}_m(S)\big)$. Из равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получаем, что $t^2 = 0$. Следовательно, согласно (12) $t = 0$ и

$$\theta_1(1) + \theta_2(1) = 1, \quad \varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) \tag{13}$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$. Тогда получаем, что $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ — полная система матричных единиц кольца $\mathrm{M}_m(S)$.

Пусть $\bar{S} = \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i1} r f_{1i} \mid r \in \mathrm{M}_m(S) \Big\}$. Аналогично (13) получаем для обратного отображения $\varphi^{-1} \colon \mathrm{GL}_n(\bar{S}) \to \mathrm{GL}_n(R)$, где $\mathrm{M}_n(\bar{S}) \cong \mathrm{M}_m(S)$ (по лемме 1), что существуют идемпотент кольца $\mathrm{M}_n(R)$, кольцевой гомоморфизм

$$\theta_3 \colon \mathrm{M}_m(s) \to e\mathrm{M}_n(R)e$$

и кольцевой антигомоморфизм

$$\theta_4 \colon \mathrm{M}_m(S) \to (1-e)\mathrm{M}_n(R)(1-e),$$

такие что

$$\theta_3(1) + \theta_4(1) = 1, \quad \varphi^{-1}(B) = \theta_3(B) + \theta_4(B^{-1}) \tag{14}$$

для всех $B \in \mathrm{E}_n(\bar{S})$.

Из (13), (14) следует, что e и f — центральные идемпотенты в $\mathrm{M}_n(R)$ и $\mathrm{M}_m(S)$ соответственно.

Покажем, что

$$\theta_4\theta_1 = \theta_3\theta_2 = \theta_1\theta_4 = \theta_2\theta_3 = 0.$$

Действительно, по (13), (14) получаем

$$e_{ij} = (\theta_3\theta_1 + \theta_4\theta_2)(e_{ij}) - (\theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1)(e_{ij}),$$
$$e_{ji} = (\theta_3\theta_1 + \theta_4\theta_2)(e_{ji}) - (\theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1)(e_{ji})$$

при $i \neq j$.

Из этих равенств следует, что

$$e_{ii} = (\theta_3\theta_1 + \theta_4\theta_2)(e_{ii}) + (\theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1)(e_{jj}).$$

Аналогично имеет место равенство

$$e_{kk} = (\theta_3\theta_1 + \theta_4\theta_2)(e_{kk}) + (\theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1)(e_{jj}),$$

где $k \neq i$, $k \neq j$. Перемножая два последних равенства, получаем, что $0 = (\theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1)(e_{jj})$. Такое равенство можно получить для любого j, значит, $\theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1 = 0$ и, следовательно,

$$\theta_3\theta_2 = \theta_4\theta_1 = 0.$$

Таким же образом выводим, что

$$\theta_2\theta_3 = \theta_1\theta_4 = 0.$$

Так как

$$\theta_4\theta_1 = \theta_3\theta_2 = \theta_1\theta_4 = \theta_2\theta_3 = 0,$$

то $\theta_1\colon e\mathrm{M}_n(R) \to f\mathrm{M}_m(S)$, $\theta_2\colon (1-e)\mathrm{M}_n(R) \to (1-f)\mathrm{M}_m(S)$ — биективные отображения (так как имеют обратные) и $\theta_1(1-e) = \theta_2(e) = 0$. Значит,

$$\theta_1\colon e\mathrm{M}_n(R) \to f\mathrm{M}_m(S) \text{ —}$$

изоморфизм колец,

$$\theta_2\colon (1-e)\mathrm{M}_n(R) \to (1-f)\mathrm{M}_m(S) \text{ —}$$

антиизоморфизм колец и

$$\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2\big((1-e)A^{-1}\big)$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$. Теорема доказана. □

Также имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 2$ и $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_m(S)$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты e и f колец $\mathrm{M}_n(R)$ и $\mathrm{M}_m(S)$ соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1\colon e\mathrm{M}_n(R) \to f\mathrm{M}_m(S),$$

кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2\colon (1-e)\mathrm{M}_n(R) \to (1-f)\mathrm{M}_m(S)$$

и групповой гомоморфизм

$$\chi\colon \mathrm{GE}_n(R) \to Z\big(\mathrm{GL}_m(S)\big),$$

такие что

$$\varphi(A) = \chi(A)\Big(\theta_1(eA) + \theta_2\big((1-e)A^{-1}\big)\Big)$$

для всех $A \in \mathrm{GE}_n(R)$.

Доказательство. Уже доказано, что существуют требуемые θ_1, θ_2, такие что $\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2\big((1-e)A^{-1}\big)$ для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Положим

$$\varphi_1(B) = \varphi^{-1}(\theta_1(eB) + \theta_2\big((1-e)B^{-1}\big)$$

для всех $B \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тогда $\varphi_1(A) = A$ для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Пусть $B \in \mathrm{GE}_n(R)$, $A \in \mathrm{E}_n(R)$. Тогда $BAB^{-1} \in \mathrm{E}_n(R)$. Следовательно,

$$BAB^{-1} = \varphi_1(BAB^{-1}) = \varphi_1(B)A\varphi_1(B)^{-1}.$$

Значит, $B^{-1}\varphi_1(B)$ лежит в централизаторе подгруппы $\mathrm{E}_n(R)$ в $\mathrm{GL}_n(R)$, т. е. $B^{-1}\varphi_1(B) \in Z\big(\mathrm{GL}_n(R)\big)$. Тогда $\omega = \varphi\big(B^{-1}\varphi_1(B)\big) \in Z\big(\mathrm{GL}_m(S)\big)$ и

$$\varphi\varphi_1(B) = \varphi(B)\omega = \varphi\Big(\varphi^{-1}\big(\theta_1(B) + \theta_1(B^{-1})\big)\Big) = \theta_1(B) + \theta_1(B^{-1}),$$

откуда следует, что

$$\varphi(B) = \omega^{-1}\big(\theta_1(B) + \theta_1(B^{-1})\big).$$

Теорема доказана. □

3. Доказательство вспомогательных предложений 3 и 4

Лемма 2. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, M — не содержащая 0 коммутативная мультипликативная система, $M \subseteq Z(R)$, $R^1 = RM^{-1}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы M, $\beta\colon R \to R^1$ — канонический гомоморфизм. Пусть $a \in R^1$, $a^2 = 0$. Тогда существует такой элемент $h \in M$, что найдётся $b \in R^*$ со свойством $\beta(b) = 1 + \beta(h)a$, причём такой элемент будет существовать для всех $1 + \beta(hh_1)a$, $h_1 \in M$.*

Доказательство. По свойству канонического гомоморфизма $a = \beta(s)^{-1}\beta(c)$, $s \in M$. По условию $a^2 = 0$. Следовательно, $\beta(c)^2 = 0$. Поэтому существует элемент $l \in M$, такой что $lc^2 = 0$. Возьмём $b = lc+1$. Тогда $\beta(b) = 1+\beta(l)\beta(c) = 1 + \beta(ls)a$. Элемент b обратим, так как $(lc)^2 = 0$.

Если взять $b = lch_1 + 1$, то b останется обратимым и $\beta(b) = 1 + \beta(lsh_1)a$. Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, M — не содержащая 0 коммутативная мультипликативная система, $M \subseteq Z(R)$, $R^1 = RM^{-1}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы M, $\beta\colon R \to R^1$ — канонический гомоморфизм. Пусть $a, b \in R^1$, $a = \beta(d)$, $ab = ba$. Тогда существует такой элемент $h \in M$, что у элемента $\beta(h)b$ при отображении β найдётся прообраз t со свойством $td = dt$, причём такой t будет существовать для всех $\beta(hh_1)b$, $h_1 \in M$.*

Доказательство. Пусть $b = \beta(s)^{-1}\beta(c)$, $s \in M$. Тогда $a\beta(c) = \beta(c)a$. Пусть $cd - dc = p$. Тогда $\beta(p) = 0$, поэтому существует элемент $l \in M$, такой что $lp = 0$. Рассмотрим элемент lc. Выполнены равенства $lcd = dlc$, $\beta(lc) = \beta(l)\beta(s)b = \beta(ls)b$. Если взять $t = lh_1c$, $h_1 \in M$, то получим, что $lh_1cd = dlh_1c$ и $\beta(lh_1c) = \beta(lsh_1)b$. Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, M — не содержащая 0 коммутативная мультипликативная система, $M \subseteq Z(R)$, $R^1 = RM^{-1}$ — кольцо частных относительно мультипликативной системы M, $\beta\colon R \to R^1$ — канонический гомоморфизм. Пусть $a, b_1, b_2 \in R^1$, $a^2 = 0$, $b_1 = \beta(d_1)$, $b_2 = \beta(d_2)$, $ab_1 = b_1a$, $ab_2 = b_2a$. Тогда существует такой элемент $h \in M$, что найдётся $t \in R^*$ со свойствами $td_1 = d_1t$, $td_2 = d_2t$, $\beta(t) = \beta(h)a + 1$, причём такой t будет существовать для всех $\beta(hw)a + 1$, $w \in M$.*

Доказательство. Так как $ab_1 = b_1a$, $ab_2 = b_2a$, то по лемме 3 получаем, что найдётся элемент $q_1 \in R$, такой что $dq_1 = q_1d$, $\beta(q_1) = \beta(h_1)a$, и также существует элемент $q_2 \in R$, такой что $dq_2 = q_2d$, $\beta(q_2) = \beta(h_2)a$. По лемме 3 у элемента $\beta(h_1h_2)a$ также существуют такие прообразы q_1', q_2', что $q_1'd_1 = d_1q_1'$, $q_2'd_2 = d_2q_2'$. Тогда $\beta(q_1' - q_2') = 0$. Значит, найдётся такой элемент $l \in M$, что $lq_1' = lq_2' = q$ (по свойству канонического гомоморфизма). Тогда q коммутирует с d_1 и с d_2, $\beta(q) = \beta(lq_1') = \beta(lh_1h_2)a$. По условию $a^2 = 0$. Значит, $\beta(q^2) = 0$. Следовательно, найдётся такой элемент $h_3 \in M$, что $h_3q^2 = 0$ (по свойству канонического гомоморфизма). Тогда элемент $1 + h_3q$ обратим. Положим $t = 1 + h_3q$. Тогда t коммутирует с d_1 и с d_2, $t \in R^*$ и

$$\beta(t) = \beta(1 + h_3q) = 1 + \beta(h_3)\beta(q) = 1 + \beta(lh_2h_1h_3)a.$$

Для $\beta(hw)a + 1$, $w \in M$, положим $t = 1 + wh_3q$. Лемма 4 доказана. □

Предложение 5. *Пусть R, S — ассоциативные кольца с 1, T — подкольцо S, Z — централизатор T в S, $z = \langle 1_R \rangle$, $\{e_{ij} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant 4\}$ — стандартная система матричных единиц $\mathrm{M}_4(R)$,*

$$G_1 = \{a \in \mathrm{E}_4(z) \mid a \in 1 + (e_{11} + e_{22})\mathrm{M}_4(R)(e_{11} + e_{22})\},$$
$$G_2 = \{1 + r(e_{13} + e_{24}) \mid r \in R\}, \quad G = \langle G_1, G_2 \rangle.$$

Пусть $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}_2(S)$ — гомоморфизм групп, причём

$$\varphi(G_2) \subseteq \mathrm{GL}_2(T), \quad \varphi(G_1) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in Z \right\}$$

и существует такой элемент $a \in G_1$, что

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

$\varepsilon\delta = \delta\varepsilon$ и $(\varepsilon\delta^{-1})^2 - 1$ не является делителем 0 в S. Тогда

$$(\varphi(1 + re_{ij}) - 1)(\varphi(1 + se_{km}) - 1) = 0 \tag{15}$$

для всех $i, k \in \{1, 2\}$, $j, m \in \{3, 4\}$ и $r, s \in R$.

Доказательство. Если $g \in G_2$, $h \in G_1$, то
$$hgh^{-1} \in 1 + (e_{11} + e_{22})\mathrm{M}_4(R)(e_{33} + e_{44}),$$
так как
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ar \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть
$$\varphi\bigl(1 + r(e_{13} + e_{24})\bigr) = A_r = \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix}, \quad \varphi(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$
a — элемент из условия. Тогда матрица A_r перестановочна с A_s, так как
$$\bigl(1 + r(e_{13} + e_{24})\bigr)\bigl(1 + s(e_{13} + e_{24})\bigr) = \\ = \bigl(1 + s(e_{13} + e_{24})\bigr)\bigl(1 + r(e_{13} + e_{24})\bigr) = 1 + (r + s)(e_{13} + e_{24}).$$
Матрица A_r перестановочна с
$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} A_s \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix},$$
так как прообраз этого элемента имеет вид
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ar \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
и выполнены равенства
$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Ar \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ar + s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Ar \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда
$$a_r a_s + b_r c_s = a_s a_r + b_s c_r,$$
так как A_r и A_s перестановочны, и
$$a_r a_s + \delta\varepsilon^{-1} b_r c_s = a_s a_r + \varepsilon\delta^{-1} b_s c_r,$$
так как A_r и
$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} A_s \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}$$
перестановочны и ε, δ перестановочны с T. Вычтем одно равенство из другого, получим
$$(\delta\varepsilon^{-1} - 1) b_r c_s = (\varepsilon\delta^{-1} - 1) b_s c_r,$$
$$(1 - \varepsilon\delta^{-1}) b_r c_s = \varepsilon\delta^{-1}(\varepsilon\delta^{-1} - 1) b_s c_r.$$
Также выполнено равенство
$$\varepsilon\delta^{-1}(1 - \varepsilon\delta^{-1})(b_s c_r + \delta\varepsilon^{-1} b_r c_s) = 0,$$

следовательно, $b_s c_r = -\delta\varepsilon^{-1} b_r c_s$, так как $1-\varepsilon\delta^{-1}$ не является делителем нуля в S.

Элемент A_r коммутирует с

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} A_s \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

поэтому $-\delta^{-1}\varepsilon b_r c_s = b_s c_r$ (рассуждение аналогично предыдущему).

Значит, $\delta\varepsilon^{-1} b_r c_s = \delta^{-1}\varepsilon b_r c_s$, и так как $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon$, то $\varepsilon\delta^{-1} b_r c_s = \delta\varepsilon^{-1} b_r c_s$. Следовательно, $\big((\varepsilon\delta^{-1})^2 - 1\big) b_r c_s = 0$, поэтому $b_r c_s = 0$, так как $(\varepsilon\delta^{-1})^2 - 1$ не является делителем нуля в S.

Из условия перестановочности A_r с A_s и

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} A_s \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

получаем

$$c_s b_r + d - s d_r = c_r b_s + d_r d_s,$$
$$\delta\varepsilon^{-1} c_s b_r + d_s d_r = \varepsilon\delta^{-1} c_r b_s + d_r d_s.$$

Также справедливы импликации

$$(\delta\varepsilon^{-1} - 1) c_s b_r = (\varepsilon\delta^{-1} - 1) c_r b_s \Longrightarrow c_s b_r = -\varepsilon\delta^{-1} c_r b_s \Longrightarrow c_r b_s = -\varepsilon^{-1}\delta c_s b_r,$$
$$c_s b_r = -\varepsilon^{-1}\delta c_r b_s \Longrightarrow c_r b_s = -\varepsilon\delta^{-1} c_s b_r,$$
$$\varepsilon^{-1}\delta c_s b_r = \varepsilon\delta^{-1} c_s b_r \Longrightarrow (1 - (\varepsilon\delta^{-1})^2) c_s b_r = 0 \Longrightarrow c_s b_r = 0.$$

Таким образом, выполнены равенства

$$b_r c_s = c_s b_r = 0 \tag{16}$$

для всех $r, s \in R$.

Если $h \in G_1$, то

$$\varphi(h) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

и

$$[A_r, \varphi(h)] = \begin{pmatrix} a_{-r} & b_{-r} \\ c_{-r} & d_{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{-r} & b_{-r} \\ c_{-r} & d_{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & \lambda^{-1}\mu b_r \\ \mu^{-1}\lambda c_r & d_r \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{-r} & b_{-r} \\ c_{-r} & d_{-r} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (\lambda^{-1}\mu - 1) b_r \\ \mu^{-1}\lambda - 1) c_r & 0 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (\lambda^{-1}\mu - 1) b_r \\ \mu^{-1}\lambda - 1) c_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\lambda^{-1}\mu - 1) b_r \\ \mu^{-1}\lambda - 1) c_r & 1 \end{pmatrix}$$

в силу (16), того, что λ, μ коммутируют с T, и равенства $(A_r)^{-1} = A_{-r}$.

Пусть

$$G_3 = \langle h[d, h_1]h^{-1} \mid h, h_1 \in G_1,\ d \in G_2 \rangle.$$

Так как $A_{-r}A_r = E$, то

$$a_{-r}b_r = -b_{-r}d_r, \quad c_{-r}a_r = -d_{-r}c_r. \tag{17}$$

Согласно выражению, полученному для $[A_r, \varphi(h)]$, имеем

$$\varphi(h[d,h_1]h^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha a_{-r}b_r \\ \beta d_{-r}c_r & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in Z, \tag{18}$$

$$\varphi(\bar{h}[\bar{d},\bar{h}_1]\bar{h}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} a_{-r}b_r \\ \bar{\beta} d_{-r}c_r & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in Z. \tag{19}$$

Тогда ввиду (16) и (17) получаем

$$\varphi(h[d,h_1]h^{-1}, \bar{h}[\bar{d},\bar{h}_1]\bar{h}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ ** & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, для любого $g \in G_3$ выполнено

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} 1 & x_g \\ y_g & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$x_{g_1}y_{g_2} = y_{g_2}x_{g_1} = 0 \tag{20}$$

для всех $g_1, g_2 \in G_3$. Так как G_3 содержит все элементы вида $1 + re_{ij}$, $r \in R$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, $3 \leqslant j \leqslant 4$, то из (20) получаем (15). Предложение доказано. □

Предложение 6. *Пусть S — ассоциативное кольцо с 1 и 1/3. Предположим, что существуют такие $a, b \in S$, что*

$$a^2 + a + 1 = 0, \quad b^2 = 1, \quad bab = a^2. \tag{21}$$

Тогда существует полная система матричных единиц $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant 2\}$ кольца S, такая что $b = f_{12} + f_{21}$, $a = -f_{11} - f_{21} + f_{12}$.

Доказательство. Положим

$$f_{11} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}ba, \quad f_{22} = 1 - f_{11}, \quad f_{12} = f_{11}b, \quad f_{21} = bf_{11}.$$

Предложение доказано. □

Доказательство предложения 3. Положим

$$\begin{aligned} a_1 &= \tau\varphi(1 - 2e_{11} - e_{22} + e_{12} - e_{21}), & a_2 &= \tau\varphi(1 - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43}), \\ b_1 &= \tau\varphi(1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21}), & b_2 &= \tau\varphi(1 - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}), \\ c_1 &= \tau\varphi(1 - 2e_{11} - 2e_{22}), & c_2 &= \tau\varphi(1 - 2e_{33} - 2e_{44}). \end{aligned}$$

Тогда

$$a_1a_2 = a_2a_1, \quad a_1b_2 = b_2a_1, \quad a_2b_1 = b_1a_2, \quad b_1b_2 = b_2b_1, \tag{22}$$

$$c_ia_j = a_jc_i, \quad c_ib_j = b_jc_i, \tag{23}$$

$$a_i^3 = 1, \quad b_i^2 = 1, \quad b_ia_ib_i = a_i^2, \tag{24}$$

где $1 \leqslant i,j \leqslant 2$.

Положим
$$e_i = 1 - \frac{1}{3}(1 + a_i + a_i^2).$$
Из (22)—(24) следует, что
$$e_i^2 = e_i, \quad e_i e_j = e_j e_i, \quad e_i \text{ коммутирует с } a_j,\ b_j,\ c_j, \tag{25}$$
где $1 \leqslant i, j \leqslant 2$.

Из (24), (25) по предложению 1 выводим, что существуют полная система матричных единиц $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$ в $e_1 S^1 e_1$, полная система матричных единиц $\{f_{st} \mid 3 \leqslant s, t \leqslant 3\}$ в $e_2 S^1 e_2$ и выполнены свойства
$$f_{11} + f_{22} = e_1, \quad f_{33} + f_{44} = e_2, \quad f_{ij} s_{st} = f_{st} f_{ij} \tag{26}$$
(по (22), (23) и определению f_{ij}, f_{st}),
$$a_1 = -f_{11} - f_{21} + f_{12} + 1 - e_1, \quad b_1 e_1 = f_{12} + f_{21} \tag{27}$$
(по предложению 6 и равенству $a_1 = e_1 a_1 + 1 - e_1$),
$$a_2 = -f_{33} - f_{43} + f_{34} + 1 - e_2, \quad b_1 e_1 = f_{34} + f_{43} \tag{28}$$
(по предложению 6 и равенству $a_2 = e_2 a_2 + 1 - e_2$),
$$c_k f_{ij} = f_{ij} c_k \tag{29}$$
(по (22), (23), (25) и определению f_{ij}), где $1 \leqslant k \leqslant 2$, $(i, j, s, t) \in \{1, 2\}^4 \cup \{3, 4\}^4$.

1. Докажем, что
$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0. \tag{30}$$

Положим
$$g_{ij} = f_{ij} f_{33}, \quad g_{ij+2} = f_{ij} f_{34}, \quad g_{ij} = f_{i+2j} f_{43}, \quad g_{i+2j+2} = f_{ij} f_{44}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 2.$$
Из (26) следует, что $\{g_{st} \mid 3 \leqslant s, t \leqslant 3\}$ — полная система матричных единиц кольца $e_1 e_2 S^1 e_1 e_2$. Элементы $e_1 e_2 S^1 e_1 e_2$ будем отождествлять с их образами при изоморфизме α из леммы 1.

Из (27), (28) получаем, что
$$e_1 e_2 a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 e_2 a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$
так как
$$e_1 e_2 a_1 = (f_{33} + f_{44})(-f_{11} - f_{21} + f_{12}) = -g_{11} - g_{21} + g_{12} - g_{22} - g_{43} + g_{34},$$
$$e_1 e_2 a_2 = (f_{11} + f_{22})(-f_{33} - f_{43} + f_{34}) = -g_{11} - g_{22} - g_{31} + g_{13} - g_{42} + g_{24}.$$
Аналогичными вычислениями получаем, что
$$e_1 e_2 b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 e_2 b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Имеем также

$$e_1e_2c_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad e_1e_2c_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \tag{33}$$

так как $e_1e_2c_1$, $e_1e_2c_2$ коммутируют с g_{ij}, $e_1e_2b_1$ и с $e_1e_2b_2$.

Если h коммутирует с

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\left[h, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 1.$$

Из перестановочности с данной матрицей, воспользовавшись тем, что $1/3 \in S^1$, получим, что

$$h = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

для неё очевидно выполнено утверждение про коммутатор.

Если $d \in \mathrm{GL}_m(S)$ коммутирует с $\varphi(1 - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43})$, то

$$[d, \varphi(1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21}), \varphi(1 - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43})] = 1.$$

Применяя τ к последнему равенству, получаем

$$[\tau(d), b_1, b_2] = 1. \tag{34}$$

Рассмотрим матрицу

$$1 + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0.$$

Значит, по лемме 2 существует число k со следующим свойством: найдётся такое $d \in \mathrm{GL}_m(S)$, что

$$\tau(d) = 1 + 3^k \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем, что

$$e_1e_2\tau(d) = e_1e_2\tau(d)e_1e_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3^k & 0 & 3^k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3^k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Далее, a_2 коммутирует с $\tau(d)$. Действительно,

$$\tau(d) = 1 + 3^k(-g_{12} + g_{14} - g_{32}) = 1 + 3^k f_{12}(-f_{33} + f_{34} - f_{43}),$$
$$a_2 = -f_{33} - f_{43} + f_{34} + 1 - e_2.$$

Значит, по лемме 3 найдётся l, при котором $3^l d$ коммутирует с $\varphi(1-2e_{33}-e_{44}+ + e_{34} - e_{43})$. Поэтому

$$3^l\tau(d), b_1, b_2] = [\tau(d), b_1, b_2] = 1, \quad e_1e_2[\tau(d), b_1, b_2] = e_1e_2.$$

Так как $\tau(d)$, b_1, b_2 коммутируют с e_1e_2 и $(e_1e_2)^2 = e_1e_2$, из последнего равенства получаем, что

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -3^k & 0 & 3^k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3^k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим 3^k через λ. Выполнено равенство

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ -\lambda^2 & \lambda & \lambda^2+1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ -\lambda^2 & \lambda & \lambda^2+1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ -\lambda^2 & \lambda & \lambda^2+1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы на месте $(1,4)$, видим, что $\lambda g_{14} = 0$. Следовательно, $g_{14} = 0$, так как $\lambda^{-1} = (3^k)^{-1} \in S^1$. Тогда $g_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$, значит,

$$e_1e_2 = \sum_{i=1}^{4} g_{ii} = 0.$$

Утверждение 1 доказано.

Положим

$$c_3 = \tau\varphi(1 - e_{11} - e_{22} - e_{33} - e_{44} + e_{13} + e_{24} + e_{31} + e_{42}).$$

Тогда

$$c_3^2 = c_3, \quad c_3a_1c_3 = a_2, \quad c_3b_1c_3 = b_2, \quad c_3c_1c_3 = c_2.$$

Положим

$$f_{33} = c_3f_{11}c_3, \quad f_{44} = c_3f_{22}c_3.$$

Из (30) вытекает, что f_{11}, f_{22}, f_{33}, f_{44} — ортогональные идемпотенты. Значит, система $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 4\}$, где $f_{i,j+2} = f_{ij}c_3$, $f_{i+2,j} = c_3f_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, — это полная система матричных единиц кольца $(e_1 + e_2)S^1(e_1 + e_2)$, причём

$$c_3 = f_{13} + f_{24} + f_{31} + f_{42} + (1 - e_1 - e_2)c_3(1 - e_1 - e_2). \tag{36}$$

2. Пусть $\bar{z} = \langle 1_R \rangle$ и

$$G_1 = \{a \in \mathrm{E}_n(\bar{z}) \mid a \in 1 + (e_{11} + e_{22})R(e_{11} + e_{22})\}. \tag{37}$$

Покажем, что $\tau\varphi(G_1)$ коммутирует с e_1 и e_2.

Группа G_1 коммутирует с $1 - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43}$, значит, элемент a_2 перестановочен с $\tau\varphi(G_1)$ (по определению a_2). Тогда по определению e_2 получаем, что $\tau\varphi(G_1)$ коммутирует с e_2.

Пусть

$$h = 1 - e_{11} - e_{22} - e_{33} - e_{44} + e_{13} + e_{24} + e_{31} + e_{42}$$

и

$$G_3 = \{ahah \mid a \in G_1\}.$$

Тогда централизатор G_3 в $\mathrm{GL}_n(R)$ совпадает с централизатором множества

$$\{1 - 2e_{11} - e_{22} + e_{12} - e_{21} - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43},\\ 1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21} - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}\}.$$

Действительно, прямым подсчётом мы получаем, что централизатор имеет вид

$$a(e_{11} + e_{22}) + b(e_{13} + e_{24}) + c(e_{31} + e_{42}) + t(e_{33} + e_{44}).$$

Таким образом, если $d \in \mathrm{GL}_m(S)$ и d коммутируют с a_1a_2, b_1b_2, то d коммутирует с $\tau\varphi(G_3)$. По лемме 2 найдётся l со свойством, что 3^ld коммутирует с элементами

$$\varphi(1 - 2e_{11} - e_{22} + e_{12} - e_{21} - 2e_{33} - e_{44} + e_{34} - e_{43}),\\ \varphi(1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21} - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}),$$

значит, сам элемент d коммутирует с ними же. Следовательно, для

$$d_1 = 1 + 3^k(f_{13} + f_{24}), \quad d_2 = 1 + 3^k(f_{31} + f_{42})$$

имеем, что d_1 и d_2 коммутируют с $\tau\varphi(G_3)$ ($(f_{13} + f_{24})^2 = (f_{31} + f_{42})^2 = 0$; значит, по лемме 2 найдётся k, для которого $d_1, d_2 \in \mathrm{GL}_m(S)$). Поэтому $\tau\varphi(G_3)$

коммутирует с d_1d_2 и, следовательно, с $(f_{31}+f_{42})(f_{13}+f_{24}) = f_{33}+f_{44} = e_2$. Тогда для $a \in G_1$ элемент $\tau\varphi(a)c_3\tau\varphi(a)c_3$ коммутирует с e_2, так как $\tau\varphi(h) = c_3$.

Из определения e_1, e_2 и равенств $c_3a_2c_3 = a_1$, $c_3^2 = 1$ следует, что $c_3e_2c_3 = e_1$. Выполнены равенства

$$\tau\varphi(a)c_3\tau\varphi(a)c_3e_2 = e_2\tau\varphi(a)c_3\tau\varphi(a)c_3,$$
$$\tau\varphi(a)c_3\tau\varphi(a)e_1 = \tau\varphi(a)e_2c_3\tau\varphi(a), \quad c_3\tau\varphi(a)e_1 = e_2c_3\tau\varphi(a).$$

Следовательно, $\tau\varphi(a)e_1 = e_1\tau\varphi(a)$. Утверждение 2 доказано.

3. Покажем, что $e_2\tau\varphi(G_1)$ лежит в центре кольца $e_2S^1e_2$, где G_1 из (37).

Рассмотрим матрицы

$$1-2e_{11}-e_{22}-e_{21}+e_{21},$$
$$1-2e_{11}-e_{12}+e_{21} = (1-e_{12})(1-2e_{11}-e_{22}-e_{21}+e_{21})^{-1}(1+e_{12}).$$

Прямым подсчётом получаем, что если A коммутирует с этими матрицами, то A коммутирует с $e_{11}+e_{22}$ и, значит, имеет вид

$$(e_{11}+e_{22})A(e_{11}+e_{22}+(1-e_{11}-e_{22})A(1-e_{11}-e_{22}).$$

Тогда элементы

$$[A, 1-2e_{33}-e_{44}+e_{34}-e_{43}], \quad [A, 1-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}]$$

коммутируют с G_1.

Рассмотрим матрицу

$$d_r = 1+3^kf_{33}rf_{44}, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad r\in S^1.$$

Элемент $f_{33}rf_{44}$ коммутирует с a_1 в силу (27) и с $\tau\varphi(1-2e_{11}-e_{12}+e_{21})$ в силу (27) и шага 2. Также выполнено равенство $(f_{33}rf_{44})^2 = 0$. Значит, по лемме 4 найдётся k, при котором существует обратимый прообраз $1+3^kf_{33}rf_{44}$ при отображении τ, коммутирующий с $\varphi(1-2e_{11}-e_{22}+e_{12}-e_{21})$ и с $\varphi(1-2e_{11}-e_{12}+e_{21})$. Пусть $1+3^kf_{33}rf_{44} = \tau(q_r)$, где q_r коммутирует с элементами

$$\varphi(1-2e_{11}-e_{22}+e_{12}-e_{21}), \quad \varphi(1-2e_{11}-e_{12}+e_{21})$$

и $q_r \in \tau\big(\mathrm{GL}_m(S)\big)$. Тогда элементы

$$[\varphi^{-1}(q_r), 1-2e_{33}-e_{44}+e_{34}-e_{43}], \quad [\varphi^{-1}(q_r), 1-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}]$$

коммутируют с G_1, и значит, $[d_r,a_2]$, $[d_r,b_2]$ коммутируют с $\tau\varphi(G_1)$, а $[1+f_{33}rf_{44},a_2]$, $[1+f_{33}rf_{44},b_2]$ коммутируют с $\tau\varphi(G_1)$. Кроме того, a_2, b_2 коммутируют с $\tau\varphi(G_1)$, так как их прообразы коммутируют. Следовательно,

$$\mathrm{M}_r = \{[1+f_{33}rf_{44},a_2],\ [1+f_{33}rf_{44},b_2],\ a_2,\ b_2\}$$

коммутирует с $\tau\varphi(G_1)$.

Кольцо, порождённое элементами

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-s\\0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix},$$

содержит
$$\begin{pmatrix}0 & s\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ s & 0\end{pmatrix}.$$
Значит, $C_{e_2S^1e_2}\bigl(\bigcup \mathrm{M}_r\bigr) \subseteq Z(e_2S^1e_2)$. Выше доказано, что $\tau\varphi(G_1)$ коммутирует с $\bigcup \mathrm{M}_r$. Тогда $e_2\tau\varphi(G_1)$ тоже коммутирует с $\bigcup \mathrm{M}_r$, следовательно, $e_2\tau\varphi(G_1) \subseteq$ $\subseteq Z(e_2S^1e_2)$, что и требовалось. Утверждение 3 доказано.

4. Пусть
$$G_4 = \{1 + (e_{11}+e_{22})r(e_{33}+e_{44}) \mid r \in \mathrm{M}_n(R)\}.$$
Покажем, что
$$\tau\varphi(G_4) \subseteq (e_1+e_2)S^1(e_1+e_2) + 1 - e_1 - e_2.$$

Элемент $\tau\varphi\bigl(1+\lambda(e_{13}+e_{24})\bigr)$, $\lambda \in R$, коммутирует с a_1a_2 (потому что $-e_{11}+e_{12}+e_{21}-e_{33}+e_{34}+e_{43}$ и $1+\lambda(e_{13}+e_{24})$ коммутируют).

Из (27)—(30) следует, что $a_1+a_2 = a_1a_2+1$, $a_1^2+a_2^2 = (a_1a_2)^2+1$. Тогда из определения e_1 и e_2 получаем равенство
$$e_1+e_2 = \frac{1}{3}(-(a_1a_2)^2 - a_1a_2 + 2).$$
Значит, $\tau\varphi\bigl(1+\lambda(e_{13}+e_{24})\bigr)$ коммутирует с e_1+e_2.

Если $d = \tau\varphi\bigl(1+\lambda(e_{13}+e_{24})\bigr)$ и $g \in \tau\varphi(G_1)$, то gdg^{-1} коммутирует с e_1+e_2 (так как из пункта 2 следует, что $\tau\varphi(G_1)$ коммутирует с e_1 и с e_2).

Если элемент коммутирует с e_1+e_2, то он принадлежит
$$(e_1+e_2)S^1(e_1+e_2) + (1-e_1-e_2)S^1(1-e_1-e_2).$$
Значит,
$$gdg^{-1} \in (e_1+e_2)S^1(e_1+e_2) + (1-e_1-e_2)S^1(1-e_1-e_2),$$
и по пункту 2 для всех $g_1 \in \tau\varphi(G_1)$ выполняется
$$g_1 \in (e_1+e_2)S^1(e_1+e_2) + (1-e_1-e_2)S^1(1-e_1-e_2).$$

Из (27) следует, что
$$a_1 \in (e_1+e_2)S^1(e_1+e_2) + 1 - e_1 - e_2.$$
Таким образом, получаем, что
$$\begin{gathered}[gdg^{-1}, a_1] \in (e_1+e_2)S^1(e_1+e_2) + 1 - e_1 - e_2,\\ g_1[gdg^{-1}, a_1]g_1^{-1} \in (e_1+e_2)S^1(e_1+e_2) + 1 - e_1 - e_2,\end{gathered}$$
где $g_1 \in G_1$.

Элемент $[gdg^{-1}, a_1]$ при отображении $\tau\varphi$ имеет в прообразе матрицу
$$\left[\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}^{-1}, \begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & \lambda(1-A)C\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G_1.$$

Элемент $g_1[gdg^{-1}, a_1]g_1^{-1}$ при отображении $\tau\varphi$ имеет в прообразе матрицу

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \lambda D(1-A)C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Целочисленными элементарными преобразованиями строк и столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и сложением возникающих матриц можно получить

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, группа G_4 порождается матрицами, образами которых при отображении $\tau\varphi$ являются $[gdg^{-1}, a_1]$ и $g_1[gdg^{-1}, a_1]g_1^{-1}$.

Группа G_4 порождается матрицами, образы которых принадлежат

$$(e_1 + e_2)S^1(e_1 + e_2) + 1 - e_1 - e_2,$$

поэтому

$$\tau\varphi(G_4) \in (e_1 + e_2)S^1(e_1 + e_2) + 1 - e_1 - e_2.$$

Доказательство утверждения 4 завершено.

Теперь положим

$$h_{11} = e_1, \quad h_{22} = e_2, \quad h_{12} = f_{13} + f_{24}, \quad h_{21} = f - 31 + f_{42},$$
$$\bar{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{2} h_{i1} r h_{1i} \mid r \in S^1 \right\}.$$

Тогда

$$(e_1 + e_2)S^1(e_1 + e_2) \cong \mathrm{M}_2(\bar{S}).$$

Значит, для $r \in R$ по пункту 4 получаем

$$\tau\varphi\big(1 + r(e_{13} + e_{24})\big) = \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix} + 1 - e_1 - e_2.$$

Из пункта 2 следует, что для $g \in \tau\varphi(G_1)$ выполнено

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + (1 - e_1 - e_2)g(1 - e_1 - e_2).$$

Из пункта 3 вытекает, что $e_2\mu\alpha = e_2\alpha\mu$ для всех $\alpha \in \bar{S}$, а отсюда, домножая равенство на соответствующие матричные единицы, получаем, что $e_1\mu\alpha = e_1\alpha\mu$ для всех $\alpha \in \bar{S}$. Из этих равенств следует, что μ лежит в центре $\bar{S}$.

Выполнены равенства

$$c_3gc_3g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + (1 - e_1 - e_2)c_3gc_3g(1 - e_1 - e_2) = \\ = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix} + (1 - e_1 - e_2)c_3gc_3g(1 - e_1 - e_2),$$

где c_3 из (36). Элемент c_3gc_3g коммутирует с $\tau\varphi\big(1 + r(e_{13} + e_{24})\big)$, и значит, $\lambda\mu$ коммутирует с a_r, b_r, c_r, d_r, следовательно, λ коммутирует с a_r, b_r, c_r, d_r.

Имеем

$$a_1 \in \tau\varphi(G_1), \quad a_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 - e_1 - e_2, \quad \varepsilon = -f_{11} + f_{12} - f_{21}.$$

Элемент

$$\varepsilon^2 - 1_{\bar{S}} = -f_{11} - f_{12} + f_{21} - 2f_{22}$$

не является делителем нуля в $\bar{S}$, так как это обратимый элемент (поскольку $1/3 \in S^1$).

Пусть $G = \langle G_1, G_4 \rangle$, $\bar{\varphi} = (e_1 + e_2)\tau\varphi$. Тогда $\bar{\varphi}\colon G \to \mathrm{GL}_2(\bar{S})$ — гомоморфизм групп, так как $(e_1 + e_2)^2 = e_1 + e_2$ и $\tau\varphi(G_1)$, $\tau\varphi(G_4)$ коммутируют с $e_1 + e_2$. Значит, по предложению 5 имеем

$$(e_1 + e_2)(\tau\varphi(1 + re_{ij}) - 1)(\tau\varphi(1 + se_{pq}) - 1) = 0,$$

но так как

$$\tau\varphi(1 + re_{ij}) - 1,\ \tau\varphi(1 + se_{pq}) - 1 \in (e_1 + e_2)S^1(e_1 + e_2)$$

(по пункту 4), то

$$(e_1+e_2)(\tau\varphi(1+re_{ij})-1)(\tau\varphi(1+se_{pq})-1) = (\tau\varphi(1+re_{ij})-1)(\tau\varphi(1+se_{pq})-1) = 0.$$

Предложение доказано. □

Предложение 7. *Пусть S — ассоциативное кольцо с 1 и 1/2, $a, b, c \in S$ и*

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1, \quad ab = ba, \quad cac = b. \tag{38}$$

Тогда существует система матричных единиц $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$ кольца S, такая что

$$ab = 1 - 2(f_{11} + f_{22}), \quad b = 1 - 2f_{22} + b_1, \quad c = f_{12} + f_{21} + c_1,$$

где $b_1, c_1 \in (1 - f_{11} - f_{22})S(1 - f_{11} - f_{22})$.

Доказательство. Пусть

$$f_{13} = \frac{1}{2}(1 - a), \quad f_{23} = \frac{1}{2}(1 - b).$$

Положим

$$f_{11} = f_{13} - f_{13}f_{23}, \quad f_{22} = f_{23} - f_{13}f_{23}, \quad f_{12} = f_{11}c, \quad f_{21} = cf_{11}.$$

Предложение доказано. □

Предложение 8. *Пусть S — ассоциативное кольцо с 1 и 1/2, $k(r) \in \mathbb{Z}$ для всех $r \in S$ и H — подгруппа в $\mathrm{GL}_2(S)$, порождённая элементами $e_{12} + e_{21}$, $[1 + 2^{k(r)} r e_{12}, e_{12} + e_{21}]$ для всех $r \in S$. Тогда централизатор группы H в кольце матриц $\mathrm{M}_2(S)$ совпадает с центром кольца $\mathrm{M}_2(S)$.*

Доказательство. Пусть матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

лежит в централизаторе группы H. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $a = d$, $b = c$. Далее,

$$[1 + 2^{k(r)} r e_{12}] = \begin{pmatrix} 1 & -2^{k(r)} r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^{k(r)} r & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2^{2k(r)} r^2 & -2^{k(r)} r \\ 2^{k(r)} r & 1 \end{pmatrix},$$

значит,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2^{2k(r)} r^2 & -2^{k(r)} r \\ 2^{k(r)} r & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2^{2k(r)} r^2 & -2^{k(r)} r \\ 2^{k(r)} r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы на месте $(1, 2)$, получаем, что

$$-a 2^{k(r)} r + b = (1 - 2^{2k(r)} r^2) b - 2^{k(r)} r a. \tag{39}$$

Из (39) при $r = 1$ следует, что $2^{2k(1)} b = 0$ и $b = 0$. Тогда $2^{k(r)}(ar) = 2^{k(r)}(ra)$ и $ar = ra$. Значит, a лежит в центре S и

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

т. е. матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

лежит в центре $\mathrm{M}_2(S)$. Предложение доказано. □

Предложение 9. *Пусть R — ассоциативное кольцо с 1, $n \geqslant 4$, $a \in \mathrm{GL}_n(R)$, $C_G(a)$ — централизатор a в $\mathrm{GL}_n(R)$. Тогда группа*

$$\bigl\langle \bigl[C_G\bigl((1 + e_{12})(1 + e_{13})\bigr), 1 + e_{13} \bigr] \bigr\rangle$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть $h \in C_G(1+e_{12}+e_{13})$. Тогда

$$h^{-1}(e_{12}+e_{13}) = (e_{12}+e_{13})h^{-1}, \quad h^{-1}e_{13} = (e_{12}+e_{13})h^{-1}e_{33} = \alpha e_{13}, \quad \alpha \in R.$$

Значит, $h^{-1}e_{13}h = e_{13}\alpha h$. Имеем

$$(e_{12}+e_{13})h = h(e_{12}+e_{13}), \quad e_{13}h(e_{12}+e_{31})e_{31} = e_{13}(e_{12}+e_{13})he_{31},$$

т. е. $e_{13}he_{11} = 0$. Значит,

$$\begin{aligned}[h, 1+e_{13}] = h^{-1}(1-e_{13})h(1+e_{13}) = (1-h^{-1}e_{13}h)(1+e_{13}) = \\ = 1 - h^{-1}e_{13}he_{13} - h^{-1}e_{13}h + e_{13} = 1 + e_{13}(1-2h)\end{aligned}$$

и

$$[h, 1+e_{13}] \in 1 + e_{11}\mathrm{M}_n(R)(1-e_{11}).$$

Матрицы из $1+e_{11}\mathrm{M}_n(R)(1-e_{11})$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы перемножаются по правилу

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n-1} & a_{1n} & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \dots & b_{1n-1} & b_{1n} & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \dots & a_{1n-1}+b_{1n-1} & a_{1n}+b_{1n} & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому группа $1+e_{11}\mathrm{M}_n(R)(1-e_{11})$ коммутативна, следовательно, группа $\big\langle \big[C_G\big((1+e_{12})(1+e_{13})\big), 1+e_{13}\big] \big\rangle$ также коммутативна. Предложение доказано. □

Доказательство предложения 4. В предложении 6 положим

$$a = \pi\varphi(1-2e_{11}-2e_{33}), \quad b = \pi\varphi(1-2e_{22}-2e_{33}), \quad c = \pi\varphi(1-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21}).$$

Тогда в S^2 существует такая система матричных единиц $\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$, что

$$\begin{gathered}\pi\varphi\big(1-2(e_{11}+e_{22})\big) = 1 - 2(f_{11}+f_{22}), \\ \pi\varphi\big(1-2(e_{22}+e_{33})\big) = 1 - 2f_{22} + b_1,\end{gathered} \tag{40}$$

$$\pi\varphi(1-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21}) = f_{12}+f_{21}+c_1, \tag{41}$$

где $b_1, c_1 \in (1-f_{11}-f_{22})S^2(1-f_{11}-f_{22})$.

В предложении 6 положим

$a = \pi\varphi(1-2e_{11}-2e_{33}), \quad b = \pi\varphi(1-2e_{11}-2e_{44}), \quad c = \pi\varphi(1-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}).$

Тогда в S^2 существует такая система матричных единиц $\{f_{st} \mid 3 \leqslant s, t \leqslant 4\}$, что

$$\begin{gathered}\pi\varphi\big(1-2(e_{33}+e_{44})\big) = 1-2(f_{33}+f_{44}),\\ \pi\varphi\big(1-2(e_{11}+e_{44})\big) = 1-2f_{44}+b_2,\end{gathered} \tag{42}$$

$$\pi\varphi(1-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}) = f_{34}+f_{43}+c_2, \tag{43}$$

где $b_2, c_2 \in (1-f_{33}-f_{44})S^2(1-f_{33}-f_{44})$.

1. Покажем, что

$$(f_{11}+f_{22})(f_{33}+f_{44}) = 0.$$

Пусть

$$f = (f_{11}+f_{22})(f_{33}+f_{44}). \tag{44}$$

Имеем

$$4f_{22} = \big((1-2f_{22}+b_1)-1\big)\Big(\big(1-2(f_{11}+f_{22})\big)-1\Big)$$

(так как $b_1 \in (1-f_{11}-f_{22})S^2(1-f_{11}-f_{22})$),

$$\begin{aligned}&4f_{11} = -2\Big(\big(1-2(f_{11}+f_{22})\big)-1\Big)-4f_{22},\\ &f_{12} = (f_{12}+f_{21}+c_1)f_{22},\\ &f_{21} = f_{22}(f_{12}+f_{21}+c_1)\end{aligned}$$

(так как $c_1 \in (1-f_{11}-f_{22})S^2(1-f_{11}-f_{22})$). Кроме того, элементы

$$\pi\varphi\big(1-2(e_{11}+e_{22})\big), \quad \pi\varphi\big(1-2(e_{33}+e_2)\big), \quad \pi\varphi(1-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21})$$

коммутируют с элементами

$$\pi\varphi\big(1-2(e_{11}+e_{22})\big), \quad \pi\varphi\big(1-2(e_{33}+e_{44})\big).$$

Значит, элемент $f_{11}+f_{22}$ коммутирует с $f_{33}+f_{44}$, элемент $1-2f_{22}+b_1$ коммутирует с $f_{33}+f_{44}$ и $f_{11}+f_{22}$, элемент $f_{12}+f_{21}+c_1$ коммутирует с $f_{33}+f_{44}$ и $f_{11}+f_{22}$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}ff_{22} &= (f_{11}+f_{22})(f_{33}+f_{44})\frac{1}{4}\big((1-2f_{22}+b_1)-1\big)\Big(\big(1-2(f_{11}+f_{22})\big)-1\Big) =\\ &= \frac{1}{4}\big((1-2f_{22}+b_1)-1\big)\Big(1-2(f_{22}+b_1)-1\big(-2(f_{11}+f_{22})\big)f\Big) = f_{22}f,\\ ff_{11} &= (f_{11}+f_{22})(f_{33}+f_{44})\frac{1}{4}\Big(-2\Big(\big(1-2(f_{11}+f_{22})\big)-1\Big)-4f_{22}\Big) = f_{11}f,\\ ff_{12} &= (f_{11}+f_{22})(f_{33}+f_{44})(f_{12}+f_{21}+c_1)f_{22} =\\ &= (f_{12}+f_{21}+c_1)(f_{11}+f_{22})(f_{33}+f_{44})f_{22} = (f_{12}+f_{21}+c_1)f_{22}f = f_{12}f,\\ ff_{21} &= (f_{11}+f_{22})(f_{33}+f_{44})f_{22}(f_{12}+f_{21}+c_1) = f_{21}f.\end{aligned}$$

Значит,

$$ff_{ij} = f_{ij}f \tag{45}$$

для всех $i, j \in \{1, 2\}$.

Положим $g_{ij} = ff_{ij}$, $i, j \in \{1, 2\}$. Тогда из (45) получаем, что $\{g_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$ — полная система матричных единиц кольца fS^2f. При этом выполнены равенства

$$\begin{aligned} f\pi\varphi\big(1 - 2(e_{33} + e_{22})\big) &= f(1 - 2f_{22} + b_1) = f(1 - 2f_{22}) = \\ &= f(f_{11} + f_{22})(1 - 2f_{22}) = f(f_{11} - f_{22}) = g_{11} - g_{22}, \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} f\pi\varphi(1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21}) &= \\ &= f(f_{12} + f_{21} + c_1) = f(f_{21} + f_{21}) = g_{12} + g_{21}, \end{aligned} \tag{47}$$

$$f\pi\varphi\big(1 - 2(e_{11} + e_{22})\big) = f\big(1 - 2(f_{11} + f_{22})\big) = f - 2f = -f, \tag{48}$$

$$f\pi\varphi\big(1 - 2(e_{33} + e_{44})\big) = f\big(1 - 2(f_{33} + f_{44})\big) = f - 2f = -f. \tag{49}$$

Элементы $\sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}g_{ij}$ будем изображать в виде матриц (a_{ij}).

Выполнены равенства

$$\begin{aligned} &\pi\varphi(1 - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43})f = \\ &\quad = (f_{34} + f_{43} + c_2)f = (f_{34} + f_{43} + c_2)(f_{11} + f_{22})(f_{33} + f_{44}) = \\ &\quad = (f_{11} + f_{22})(f_{33} + f_{44})(f_{34} + f_{43} + c_2) = f\pi\varphi(1 - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}). \end{aligned}$$

Элемент $\pi\varphi(1 - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43})$ коммутирует с $\pi\varphi\big(1 - 2(e_{11} + e_{22})\big)$. Следовательно, $f_{34} + f_{43} + c_2$ коммутирует с $f_{11} + f_{22}$. Тогда

$$f\pi\varphi(1 - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}) \in fS^2f.$$

Пусть

$$f\pi\varphi(1 - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Выполнено соотношение

$$[1 - e_{33} - e_{44} + e_{34} + e_{43}, 1 - 2(e_{22} + e_{33})] = 1 - 2(e_{33} + e_{44}).$$

Из (46), (49) следует, что

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $2a = 2d = 0$, поэтому $a = d = 0$.

Кроме того, имеем

$$[1-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}, 1-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21}] = 1.$$

Значит, ввиду (47)

$$\begin{pmatrix}0 & b\\ c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b\\ c & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $b = c$.

Таким образом,

$$f\pi\varphi(1-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}) = \begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}, \tag{50}$$

причём $b^2 = f$.

Пусть $A \in \mathrm{GL}_n(R)$ и A коммутирует с $1-2(e_{11}+e_{22})$. Тогда $[A, 1-2(e_{22}+e_{33})]$ коммутирует с $e_{11}+e_{22}$ (так как A коммутирует с $e_{11}+e_{22}$ и $1-2(e_{22}+e_{33})$ коммутирует с $e_{11}+e_{22}$). Значит,

$$[A, 1-2(e_{22}+e_{33}), 1-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}] \in 1+(1-e_{11}-e_{22})\mathrm{M}_n(R)(1-e_{11}-e_{22})$$

и

$$\big[[A, 1-2(e_{22}+e_{33}), 1-e_{33}-e_{44}+e_{34}+e_{43}], 1-e_{11}-e_{22}+e_{12}+e_{21}\big] = 1. \tag{51}$$

По лемме 4 существует такая матрица $B \in \mathrm{GL}_m(S)$, что B коммутирует с $\varphi\big(1-2(e_{11}+e_{22})\big)$ и $\pi(B) = 1+2^k g_{12}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, так как $(g_{12})^2 = 0$.

Из (51) получаем, что

$$f\left[\left[\left[\begin{pmatrix}1 & 2^k\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right] = f. \tag{52}$$

Также выполнены равенства

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 2^k\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & -2^{k+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & -2^{k+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & 2^{k+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2^{k+1} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2^{2k+2} & 2^{k+1}\\ -2^{k+1} & 1\end{pmatrix}.$$

Из (52) получаем, что

$$\begin{pmatrix}1-2^{2k+2} & 2^{k+1}\\ -2^{k+1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2^{2k+2} & 2^{k+1}\\ -2^{k+1} & 1\end{pmatrix},$$

откуда следует, что $(1-2^{2k+2})f = f$. Следовательно, $f2^{2k+2} = 0$, т. е. $f = 0$, так как $1/2 \in S^2$. Мы доказали утверждение 1.

Положим

$$c = \pi\varphi(1-e_{33}-e_{44}+e_{31}+e_{42}-e_{11}-e_{22}+e_{13}+e_{24}).$$

Тогда $c^2 = 1$ и из (40), (42) получаем, что $c\big(1-2(f_{11}+f_{22})\big)c = 1-2(f_{33}+f_{44})$, откуда следует, что $c(f_{11}+f_{22})c = f_{33}+f_{44}$.

Из определения матричных единиц в предложении 7 видно, что $cf_{11}c = f_{33}$, $cf_{22}c = f_{44}$. Из утверждения 1 следует равенство $f_{ii}f_{jj} = 0$, $i \neq j$. Значит, систему

$$\{f_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\} \cup \{f_{st} \mid 3 \leqslant s, t \leqslant 4\}$$

можно дополнить до системы матричных единиц $\{f_{pq} \mid 1 \leqslant p, q \leqslant 4\}$ кольца S^2, причём

$$c = f_{13} + f - 24 + f_{31} + f_{42} + c_1, \tag{53}$$

где

$$c_1 \in (1 - f_{11} - f_{22} - f_{33} - f_{44})S^2(1 - f_{11} - f_{22} - f_{33} - f_{44}).$$

2. Положим $f = f_{11} + f_{22} + f_{33} + f_{44}$. Покажем, что $\pi\varphi(1 + re_{ij}) \in 1 + fS^2f$ для всех различных $i, j \in \{1, \dots, 4\}$, $r \in R$.

Выполнено равенство

$$[1 + re_{ij}, 1 - 2(e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44}] = 1,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \pi\varphi(1 + re_{ij})\big(1 - 2(f_{11} + f_{22})\big)\big(1 - 2(f_{33} + f_{44})\big) &= \\ = \big(1 - 2(f_{11} + f_{22})\big)\big(1 - 2(f_{33} + f_{44})\big)\pi\varphi(1 + re_{ij}) & \end{aligned}$$

(по (40), (42)). Значит,

$$\pi\varphi(1 + re_{ij})(1 - 2f) = (1 - 2f)\pi\varphi(1 + re_{ij})$$

и

$$f\pi\varphi(1 + re_{ij}) = \pi\varphi(1 + re_{ij})f.$$

Тогда получаем, что

$$\pi\varphi(1 + re_{ij}) = a_{ij}(r) + b_{ij}(r), \tag{54}$$

где $a_{ij}(r) \in fS^2f$, $b_{ij}(r) \in (1 - f)S^2(1 - f)$.

Выполнены равенства

$$1 + 2re_{13} = [1 - re_{13}, 1 - 2(e_{11} + e_{22})],$$
$$\pi\varphi\big(1 - 2(e_{11} + e_{22})\big) = 1 - 2(f_{11} + f_{22}) \in 1 + fS^2f.$$

Значит,

$$\pi\varphi(1 + 2re_{13}) = \big[\pi\varphi(1 - re_{13}), \pi\varphi\big(1 - 2(e_{11} + e_{22})\big)\big],$$

откуда следует, что

$$\pi\varphi(1 + 2re_{13}) \in 1 + fS^2f. \tag{55}$$

Нормальная подгруппа в $\mathrm{E}_4(R)$, порождённая элементами $1 + 2re_{13}$, содержит все элементы вида $1 + 2re_{ij}$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant 4$ (этот факт доказывается с помощью равенства $1 + rse_{ij} = [1 + re_{ik}, 1 + se_{kj}]$).

Легко проверить, что

$$a_{ij}(r)^2 + b_{ij}(r)^2 = \pi\varphi(1 + re_{ij})^2 = \pi\varphi(1 + 2re_{ij}) = a_{ij}(2r) + b_{ij}(2r).$$

Следовательно, $b_{ij}(2r) = b_{ij}(r)^2$.

Из (54), (55) получаем, что $\pi\varphi(1+2re_{ij}) \in 1+fS^2f$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 4$, откуда следует, что
$$b_{ij}(r)^2 = b_{ij}(2r) = 1-f. \tag{56}$$
Аналогично (54) выводится равенство
$$\pi\varphi(1-e_{22}-e_{33}+e-23+e-32) = \bar{d}+\bar{c},$$
где $\bar{d} \in fS^2f$, $\bar{c} \in (1-f)S^2(1-f)$. Положим $\bar{a} = b_{12}(1)$, $\bar{b} = b_{13}(1)$.

Выполнено равенство
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Из него следует, что $(\bar{d}+\bar{c})b_{12}(1)(\bar{d}+\bar{c}) = b_{13}(1)$, поэтому $(\bar{d}+\bar{c})\bar{a}(\bar{d}+\bar{c}) = \bar{b}$. Значит, $\bar{c}\bar{a}\bar{c} = \bar{b}$.

Из равенства (56) имеем
$$\bar{b}^2 = 1-f, \quad \bar{a}^2 = 1-f, \quad \bar{c}^2 = 1-f.$$

Выполнены условия предложения 7, значит, существует система матричных единиц $\{\bar{f}_{ij} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant 2\}$ кольца $(1-f)S^2(1-f)$, такая что для $\bar{f} = 1-f-\bar{f}_{11}-\bar{f}_{22}$
$$\bar{a}\bar{b} = 1-f-2(\bar{f}_{11}+\bar{f}_{22}), \quad \bar{b} = 1-f-2\bar{f}_{22}+b_1, \quad b_1 \in \bar{f}S^2\bar{f}. \tag{57}$$

По лемме 4 существуют $k>0$ и такие элементы g и h из $\mathrm{GL}_m(S)$, коммутирующие с $\varphi\big((1+e_{12})(1+e_{13})\big)$, что $\pi(g) = 1+2^k\bar{f}_{21}$, $\pi(h) = 1+2^k\bar{f}_{21}$. Тогда по предложению 9 элементы $[1+2^k\bar{f}_{12}, \pi\varphi(1+e_{13})]$, $[1+2^k\bar{f}_{21}, \pi\varphi(1+e_{13})]$ перестановочны.

Так как f коммутирует с $1+2^k\bar{f}_{12}$ и с $1+2^k\bar{f}_{21}$, выполнены равенства
$$\begin{aligned}&[1+2^k\bar{f}_{12}, \pi\varphi(1+e_{13})] =\\ &\quad = (1+2^k\bar{f}_{12})^{-1}\bar{b}'(1+2^k\bar{f}_{12})\bar{b} + (1+2^k\bar{f}_{12})^{-1}\bar{a}'(1+2^k\bar{f}_{12})\bar{a},\\ &[1+2^k\bar{f}_{21}, \pi\varphi(1+e_{13})] =\\ &\quad = (1+2^k\bar{f}_{21})^{-1}\bar{b}'(1+2^k\bar{f}_{21})\bar{b} + (1+2^k\bar{f}_{21})^{-1}\bar{a}'(1+2^k\bar{f}_{21})\bar{a},\end{aligned}$$
где $\bar{b}'$ — обратный элемент к $\bar{b}$ в кольце $(1-f)S^2(1-f)$, $\bar{a}'$ — обратный элемент к $\bar{a}$ в кольце fS^2f.

Таким образом, коммутируют элементы $(1+2^k\bar{f}_{12})^{-1}\bar{b}'(1+2^k\bar{f}_{12})\bar{b}$ и $(1+2^k\bar{f}_{21})^{-1}\bar{b}'(1+2^k\bar{f}_{21})\bar{b}$. Тогда, так как $\bar{f}_{11}+\bar{f}_{22}$ коммутирует с элементами $1+2^k\bar{f}_{12}$, $1+2^k\bar{f}_{21}$, $\bar{b}$, получаем, что $[\bar{f}_{11}+\bar{f}_{22}+2^k\bar{f}_{12}, \bar{f}_{11}+\bar{f}_{22}-2\bar{f}_{22}]$ и $[\bar{f}_{11}+\bar{f}_{22}+2^k\bar{f}_{12}, \bar{f}_{11}+\bar{f}_{22}-2\bar{f}_{22}]$ перестановочны (коммутаторы написаны для мультипликативной группы кольца $(\bar{f}_{11}+\bar{f}_{22})S^2(\bar{f}_{11}+\bar{f}_{22})$). Следовательно,
$$\begin{pmatrix}1 & -2^{k+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2^{k+1} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2^{k+1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2^{k+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы на месте $(1,1)$, видим, что $(1+2^{2k+2})\bar{f}_{11}=\bar{f}_{11}$, откуда следует, что

$$(1+2^{2k+2})(\bar{f}_{11}+\bar{f}_{22})=\bar{f}_{11}+\bar{f}_{22}.$$

Поэтому $\bar{f_{11}}+\bar{f_{22}}=0$.

Тогда $\bar{a}\bar{b}=1$. Также имеем

$$\pi\varphi\big((1+e_{12})(1+e_{13})\big)=a_{12}(1)a_{13}(1)+b_{12}(1)b_{13}(1)=a_{12}(1)a_{13}(1)+1,$$

откуда видно, что

$$\pi\varphi\big((1+e_{12})(1+e_{13})\big)\in 1+fS^2f. \qquad (58)$$

Нормальная подгруппа в группе $\mathrm{E}_4(R)$, порождённая $(1+e_{12})(1+e_{13})$, содержит все элементы вида $1+re_{ij}$, $r\in R$, $1\leqslant i\neq j\leqslant 4$. Это следует из того, что выполнено равенство $[(1+e_{12})(1+e_{13}),1+se_{32}]=1+se_{12}$ и справедливо соотношение $1+rse_{ij}=[1+re_{ik},1+se_{kj}]$. Значит, из (54) и (58) следует, что

$$\pi\varphi(1+re_{ij})\in 1+fS^2f.$$

Утверждение 2 доказано.

Пусть $\bar{Z}$ — подкольцо в R, порождённое 1, и

$$G_1=\{a\in\mathrm{E}_n(\bar{Z})\mid a\in(e_{11}+e_{22})\mathrm{M}_n(R)(e_{11}+e_{22})+1\}.$$

Тогда G_1 коммутирует с $1-2(e_{11}+e_{22})$, $1-2(e_{33}+e_{44})$, и из (40), (42) следует, что $\pi\varphi(G_1)$ коммутирует с $f_{11}+f_{22}$ и $f_{33}+f_{44}$.

3. Покажем, что элемент $(f_{33}+f_{44})\pi\varphi(G_1)$ лежит в центре кольца $(f_{33}+f_{44})S^2(f_{33}+f_{44})$.

Если $b\in\mathrm{GL}_n(R)$ коммутирует с $1-2(e_{11}+e_{22})$, то b коммутирует с $e_{11}+e_{22}$, значит, $[b,1-2(e_{11}+e_{44}),1-e_{33}-e_{44}+e_{43}+e_{34}]$ коммутирует с G_1. С G_1 также коммутирует $1-e_{33}-e_{44}+e_{43}+e_{34}$. Тогда согласно равенству (42) $[\pi\varphi(b),1-2f_{44}+b_2,f_{34}+f_{43}+c_2]$ коммутирует с $\pi\varphi(G_1)$. Так как $(f_{33}rf_{44})^2=0$, можно применить лемму 4. Подберём элемент b так, чтобы он был не только перестановочен с указанными матрицами, но ещё обладал свойством $\pi\varphi(b)=1+2^{k(r)}f_{33}rf_{44}$. Умножив элемент $[\pi\varphi(b),1-2f_{44}+b_2,f_{34}+f_{43}+c_2]$ на $f_{33}+f_{44}$, получим, что $[f_{33}+f_{44}+2^{k(r)}f_{33}rf_{44},f_{33}+f_{44}-2f_{44},f_{34}+f_{43}]$ коммутирует с $(f_{33}+f_{44})\pi\varphi(G_1)$ (коммутатор выписан для мультипликативной группы кольца $(f_{33}+f_{44})S^2(f_{33}+f_{44})$).

Аналогично устанавливаем, что $f_{34}+f_{43}$ коммутирует с $(f_{33}+f_{44})\pi\varphi(G_1)$.

Выполнено равенство

$$[f_{33}+f_{44}+2^{k(r)}f_{33}rf_{44},f_{33}+f_{44}-2f_{44}]=f_{33}+f_{44}-2^{k(r)+1}f_{33}+f_{44}.$$

Значит, $(f_{33}+f_{44})\pi\varphi(G_1)$ лежит в централизаторе группы

$$\langle[f_{33}+f_{44}-2^{k(r)+1}f_{33}+f_{44},f_{33}+f_{44}],f_{34}+f_{43}\rangle$$

(централизатор в кольце $(f_{33}+f_{44})S^2(f_{33}+f_{44})$). Тогда по предложению 8 $(f_{33}+f_{44})\pi\varphi(G_1)$ лежит в центре кольца $(f_{33}+f_{44})S^2(f_{33}+f_{44})$. Утверждение 3 доказано.

Положим

$$h_{11} = f_{11} + f_{22}, \quad h_{22} = f_{33} + f_{44}, \quad h_{12} = f_{13} + f_{24}, \quad h_{21} = f_{31} + f_{42},$$

$$\bar{S} = \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} h_{i1} r h_{1i} \mid r \in S^2 \right\}.$$

Тогда

$$(h_{11} + h_{22}) S^2 (h_{11} + h_{22}) \cong \mathrm{M}_2(\bar{S}).$$

Из пункта 2 следует, что

$$\pi\varphi\big(1 + r(e_{31} + e_{24})\big) \in 1 + fS^2 f = 1 + (h_{11} + h_{22}) S^2 (h_{11} + h_{22}).$$

Значит,

$$\pi\varphi\big(1 + r(e_{31} + e_{24})\big) = 1 - h_{11} - h_{22} + \begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix}.$$

Из пункта 2 также следует, что $g \in \pi\varphi(G_1) \subseteq 1 + fS^2 f$, т. е.

$$g = 1 - h_{11} - h_{22} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Элемент g коммутирует с h_{11} и с h_{22}, поэтому

$$g = 1 - h_{11} - h_{22} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Выполнены соотношения $h_{22} g = \mu h_{22}$, $h_{22} S^2 h_{22} = \bar{S} h_{22}$. Пусть $a \in \bar{S}$. Тогда $\mu h_{22} a h_{22} = a h_{22} \mu h_{22}$ ($h_{22} g$ лежит в центре кольца $h_{22} S^2 h_{22}$ по утверждению 3), $\mu a h_{22} = a \mu h_{22}$ и $\mu a h_{11} = a \mu h_{11}$. Таким образом, $\mu a = a \mu$, следовательно, $\mu \in Z(\bar{S})$.

Элемент $cgcg$ коммутирует с $\pi\varphi\big(1 + r(e_{13} + e_{24})\big)$ (так как их прообразы коммутируют). Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} cgcg &= (h_{11} + h_{22}) cgcg (h_{11} + h_{22}) + (1 - h_{11} - h_{22}) cgcg (1 - h_{11} - h_{22}) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + (1 - h_{11} - h_{22}) cgcg (1 - h_{11} - h_{22}) = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix} + (1 - h_{11} - h_{22}) cgcg (1 - h_{11} - h_{22}). \end{aligned}$$

Значит, $\lambda\mu$ коммутирует с a_r, b_r, c_r, d_r. Следовательно, λ коммутирует с a_r, b_r, c_r, d_r, так как существует обратный элемент к μ в кольце $\bar{S}$.

Положим

$$a_1 = \pi\varphi(1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} - e_{21}).$$

Тогда $a_1 \in \pi\varphi(G_1)$, потому что

$$1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} - e_{21} = (1 + e_{12})(1 - e_{21})(1 + e_{12}).$$

Так как $\pi\varphi(G_1)$ коммутирует с $h_{11}+h_{22}$, то аналогично представлению g получим выражение
$$a_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} + 1 - h_{11} - h_{22},$$
причём $\delta \in Z(\bar{S})$.

Выполнены равенства
$$a_1^2 = \pi\varphi\big(1 - 2(e_{11}+e_{22})\big) = 1 - 2(f_{11}+f_{22}) = 1 - 2h_{11}.$$
Значит, $\varepsilon^2 = -1$, $\delta^2 = 1$. Тогда $(\varepsilon\delta^{-1})^2 - 1 = \varepsilon^2(\delta^{-1})^2 - 1 = -2$ не является делителем нуля в $\bar{S}$.

Пусть $\bar{\varphi} = (h_{11}+h_{22})\pi\varphi$. Тогда $\bar{\varphi}\colon \mathrm{E}_4(R) \to \mathrm{GL}_2(\bar{S})$ — гомоморфизм групп, так как $h_{11}+h_{22} = f$ коммутирует с $\pi\varphi\big(\mathrm{E}_4(R)\big)$. Тогда из предложения 5 вытекает утверждение предложения. Предложение доказано. $\square$

4. Продолжение основной теоремы на случай градуированного кольца R

Основные определения, касающиеся градуированных колец и градуированных колец эндоморфизмов, взяты из работ [1, 6].

Все кольца предполагаются ассоциативными с единицей, и фиксирована некоторая группа G.

Определение 4. Кольцо R называется *G-градуированным* (или *градуированным по группе G*), если $R = \bigoplus\limits_{g\in G} R_g$, где $\{R_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца R и $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Если при этом $R_s R_h = R_{sh}$ для всех $s, h \in G$, то кольцо называется *строго градуированным*.

Пример 1. Примером градуированного кольца является кольцо многочленов $k[x]$. На нём можно ввести градуировку группой $\mathbb{Z}$ следующим образом: $k[x]_n = \langle x^n \rangle_k$, $n \geqslant 0$.

Ещё один пример градуированного кольца — это групповое кольцо RG. Для него можно ввести такую градуировку группой G, что однородные компоненты имеют вид $(RG)_h = \langle h \rangle_R$.

Определение 5. Два G-градуированных кольца R и S называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм колец $f\colon R \to S$, что $f(R_g) \cong S_g$ для всех $g \in G$.

Заметим, что изоморфизм градуированных колец не обязан быть градуированным изоморфизмом.

Пример 2. Рассмотрим кольцо многочленов $k[x]$ с градуировкой, описанной в примере 1. Рассмотрим такое отображение $\alpha\colon k[x] \to k[x]$, что $\alpha(x^j) = (1+x)^j$. Ясно, что α — изоморфизм колец, но также понятно, что это отображение не является gr-изоморфизмом колец.

Определение 6. Правый R-модуль M называется *G-градуированным*, если $M = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{M}_g$, где $\{\mathrm{M}_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп в M, таких что $\mathrm{M}_h R_g \subseteq \mathrm{M}_{hg}$ для всех $h, g \in G$.

Определение 7. R-линейное отображение $f\colon M \to N$ правых G-градуированных R-модулей называется *градуированным морфизмом степени* g, если $f(\mathrm{M}_h) \subseteq N_{gh}$ для всех $h \in G$. Градуированные морфизмы степени g образуют аддитивную подгруппу $\mathrm{HOM}_R(M,N)_g$ группы $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Определение 8. Положим $\mathrm{END}_R(M) := \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_R(M,M)_g$. Это градуированное кольцо называется *градуированным кольцом эндоморфизмов* градуированного R-модуля M.

Определение 9. Градуированный правый R-модуль M называется *gr-свободным*, если он обладает базисом, состоящим из однородных элементов.

Известно (см., например, [6]), что если $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ — градуированное кольцо, то градуированное кольцо эндоморфизмов $\mathrm{END}_R(M)$ конечно порождённого gr-свободного правого R-модуля M с базисом, состоящим из однородных элементов $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $v_i \in \mathrm{M}_{g_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, изоморфно градуированному кольцу матриц

$$\mathrm{M}_n(R)(g_1,\ldots,g_n) = \bigoplus_{h\in G} \mathrm{M}_n(R)_h(g_1,\ldots,g_n),$$

где

$$\mathrm{M}_n(R)_h(g_1,\ldots,g_n) = \begin{pmatrix} R_{g_1^{-1}hg_1} & R_{g_1^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_1^{-1}hg_n} \\ R_{g_2^{-1}hg_1} & R_{g_2^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_2^{-1}hg_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{g_n^{-1}hg_1} & R_{g_n^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_n^{-1}hg_n} \end{pmatrix}.$$

Определение 10. Пусть $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$, $S = \bigoplus_{g\in G} S_g$ — ассоциативные градуированные кольца с 1, $\mathrm{M}_n(R)$, $\mathrm{M}_n(S)$ — градуированные кольца матриц с градуировкой, описанной выше. Изоморфизм групп $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_m(S)$ назовём *изоморфизмом, согласованным с градуировкой*, если

$$\varphi(\mathrm{GL}_n(R) \cap \mathrm{M}_n(R)_e) \subseteq \mathrm{GL}_m(S)_e$$

и выполнено свойство

$$\text{если } A - E \in \mathrm{M}_n(R)_g, \text{ то } \varphi(A) - E \in \mathrm{M}_m(S)_g.$$

Докажем следующее продолжение теоремы И. З. Голубчика (теоремы 1) на градуированный случай.

Теорема 3. *Пусть G — коммутативная группа, $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$, $S = \bigoplus_{g\in G} S_g$ — ассоциативные градуированные кольца с единицей, $\mathrm{M}_n(R)$, $\mathrm{M}_m(S)$, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 4$, — градуированные кольца матриц с градуировкой, описанной выше,* *и* $\varphi\colon \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_m(S)$ — *изоморфизм групп, согласованный с градуировкой. Пусть изоморфизм* φ^{-1} *тоже согласован с градуировкой. Тогда существуют центральные идемпотенты* e *и* f *колец* $\mathrm{M}_n(R)$ *и* $\mathrm{M}_m(S)$ *соответственно,* $e \in \mathrm{M}_n(R)_0$, $f \in \mathrm{M}_m(S)_0$, *кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1\colon e\mathrm{M}_n(R) \to f\mathrm{M}_m(S)$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2\colon (1-e)\mathrm{M}_n(R) \to (1-f)\mathrm{M}_m(S),$$

сохраняющие градуировку, такие что

$$\varphi(A) = \theta_1(eA) + \theta_2\big((1-e)A^{-1}\big)$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Для коммутативной группы будем использовать аддитивную запись операции, 0 — нейтральный элемент.

Из анализа доказательства теоремы 1 видно, что для доказательства теоремы 3 достаточно, чтобы было выполнено следующее предложение.

Предложение 10. *Пусть* R *и* S — *ассоциативные* G*-градуированные кольца с* 1, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 1$, $\varphi\colon \mathrm{E}_n(R) \to \mathrm{GL}_m(S)$ — *гомоморфизм групп, согласованный с градуировкой, и*

$$(\varphi(1+re_{ij})-1)(\varphi(1+se_{kp})-1) = 0 \tag{59}$$

для всех $r, s \in R$ *и всех* i, j, k, p, *таких что* $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq p$, $p \neq i$. *Тогда существуют идемпотент* $f \in \mathrm{M}_m(S)_0$, *кольцевой гомоморфизм*

$$\theta_1\colon \mathrm{M}_n(R) \to f\mathrm{M}_m(S)f$$

и кольцевой антигомоморфизм

$$\theta_2\colon \mathrm{M}_n(R) \to (1-f)\mathrm{M}_m(S)(1-f),$$

сохраняющие градуировку, такие что

$$\varphi(A) = \theta_1(a) + \theta_2(A^{-1}) + 1 - \theta_1(1) - \theta_2(1)$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Доказательство. Доказательство этого предложения практически полностью повторяет доказательство предложения 2. Поэтому мы не будем приводить здесь подробных вычислений из доказательства предложения 2.

Положим $\varphi(1+re_{ij}) = 1 + x_{ij}(r)$, $r \in R$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Из равенства $1 + rse_{ij} = [1+re_{ik}, 1+se_{kj}]$, $i \neq j$, $k \neq i$, $j \neq k$, и условия (5) получаем, что

$$x_{ij}(rs) = x_{ik}(r)x_{kj}(s) - x_{kj}(s)x_{ik}(r), \tag{60}$$

где $i \neq j$, $k \neq i$, $j \neq k$.

Элемент re_{ij} однороден. Пусть $re_{ij} \in \mathrm{M}_n(R)_g$. Тогда, в силу того что φ согласован с градуировкой, $x_{ij}(r) \in \mathrm{M}_m(S)_g$.

Положим $a_{ij} = x_{ij}(1)$. Из (5), (6) и предложения 1 следует, что в S имеется система матричных единиц f_{ij} и идемпотент f, причём

$$x_{ij}(1) = ff_{ij} - (1-f)f_{ji}. \tag{61}$$

Напомним, что матричные единицы f_{ij} в предложении 1 строятся следующим образом:

$$g_{ij} = a_{ik}a_{kj}, \quad h_{ij} = a_{ki}a_{jk}, \quad g_{ii} = g_{ij}g_{ji}, \quad h_{ii} = h_{ij}h_{ji}, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,$$
$$f_{ij} = g_{ij} + h_{ij}.$$

Так как φ сохраняет градуировку, то элемент $a_{ij} \in \mathrm{M}_m(S)$ однороден и лежит в той же компоненте, что и $e_{ij} \in \mathrm{M}_n(R)$. Тогда из определения видно, что то же самое выполнено для g_{ij}. По определению h_{ij} и в силу того, что группа G коммутативна, получаем, что $h_{ij} \in \mathrm{M}_m(S)$ лежит в той же компоненте, что и матрица e_{ji}.

Идемпотент f равен $\sum\limits_{i=1}^{n} g_{ii}$ (по предложению 1). Из его определения видно, что $f \in \mathrm{M}_m(S)_0$.

Выполнены равенства

$$x_{ij}(r) = b(r)f_{ij} - c(r)f_{ji}, \quad b(r) = fb(r)f, \quad c(r) = (1-f)c(r)(1-f). \tag{62}$$

Пусть $r \in R_g$. Покажем, что тогда $b(r) \in \mathrm{M}_m(S)_g$.

Элемент $x_{ij}(r)$ обладает свойством $x_{ij}(r) = b(r)g_{ij} - c(r)f_{ji}$ по определению f и в силу равенств (62). Умножим получившееся равенство на g_{ji}. Получим, что $x_{ij}(r)g_{ji} = b(r)g_{ii}$. Пусть $e_{ij} \in \mathrm{M}_n(R)_h$. Тогда $e_{ji} \in \mathrm{M}_n(R)_{-h}$, так как $e_{ij}e_{ji} = e_{ii} \in \mathrm{M}_n(R)_0$. Следовательно, $x_{ij}(r) \in \mathrm{M}_m(S)_{g+h}$, так как φ согласован с градуировкой. Значит, $x_{ij}(r)g_{ji} \in \mathrm{M}_m(S)_g$, откуда следует, что $b(r) \in \mathrm{M}_m(S)_g$.

Пусть $r \in R_g$, $e_{ij} \in \mathrm{M}_n(R)_h$, $i \neq j$. Покажем, что тогда $c(r)f_{ji} \in \mathrm{M}_m(S)_{g+h}$.

В силу (62) и определения f справедливы равенства $c(r)f_{ji} = b(r)g_{ij} - x_{ij}(r)$. Уже доказано, что $b(r) \in \mathrm{M}_m(S)_g$, $g_{ij} \in \mathrm{M}_n(S)_h$. Тогда $b(r)g_{ij} \in \mathrm{M}_n(S)_{g+h}$. Также получаем, что $x_{ij}(r) \in \mathrm{M}_m(S)_{g+h}$, так как φ согласован с градуировкой.

Пусть $r \in R_g$. Покажем, что тогда $c(r)f_{jj} \in \mathrm{M}_m(S)_g$.

Пусть $e_{ij} \in \mathrm{M}_n(R)_h$. Тогда $c(r)f_{ji} \in \mathrm{M}_m(S)_{g+h}$, $i \neq j$. Далее,

$$\begin{aligned} c(r)f_{jj} &= c(r)f_{ji}f_{ij} = c(r)f_{ji}(g_{ij} + h_{ij}) = \\ &= c(r)f_{ji}g_{ij} + c(r)f_{ji}h_{ij} = c(r)g_{jj} + c(r)f_{ji}h_{ij} = c(r)f_{ji}h_{ij}. \end{aligned}$$

Уже доказано, что $c(r)f_{ji} \in \mathrm{M}_m(S)_{g+h}$, $h_{ij} \in \mathrm{M}_m(S)_{-h}$, значит, $c(r)f_{ji}h_{ij} \in \mathrm{M}_m(S)_g$.

Положим

$$\theta_1\left(\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}e_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} b(r_{ij})f_{ij}, \quad \theta_2\left(\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}e_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} c(r_{ji})f_{ij}.$$

Тогда

$$\theta_1 \colon \mathrm{M}_n(R) \to f\mathrm{M}_m(S)f \text{ —}$$

гомоморфизм колец,

$$\theta_2\colon \mathrm{M}_n(R) \to (1-f)\mathrm{M}_m(S)(1-f) \text{ —}$$

антигомоморфизм колец и выполнено равенство

$$\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) + 1 - \theta_1(1) - \theta_2(1)$$

для всех $A \in \mathrm{E}_n(R)$.

Осталось показать, что θ_1 и θ_2 сохраняют градуировку. Ввиду линейности отображений достаточно проверить, что если $e_{ij} \in \mathrm{M}_n(R)_g$, $r \in R_h$, то $\theta_1(re_{ij}) \in \mathrm{M}_m(S)_{g+h}$, $\theta_2(re_{ij}) \in \mathrm{M}_m(S)_{g+h}$. Используя доказанные выше свойства отображений b и c, легко заметить, что $\theta_1(re_{ij}) = b(r)f_{ij} = b(r)g_{ij} \in \mathrm{M}_m(S)_{h+g}$, $\theta_2(re_{ij}) = c(r)f_{ji} \in \mathrm{M}_m(S)_{g+h}$. Предложение доказано. □

Литература

[1] Балаба И. Н. Изоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов прообразующих // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 1. — С. 3—10.

[2] Голубчик И. З. Линейные группы над ассоциативными кольцами: Дис.... докт. физ.-мат. наук. — Уфа, 1997.

[3] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1983. — № 3. — С. 61—72.

[4] Зельманов Е. И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативным кольцом // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 4. — С. 49—67.

[5] Фейс К. Кольца, модули, категории. — М.: Мир, 1979.

[6] Nastasescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1982.