Глобальная размерность нётеровых полуцепных колец

Н. А. БРОНИЦКАЯ, В. В. КИРИЧЕНКО
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
e-mail: vkir@univ.kiev.ua

УДК 512.552.1

Ключевые слова: глобальная размерность кольца, полуцепное кольцо, колчан, праворядный колчан.

Аннотация

Изучается глобальная размерность нётеровых полуцепных колец. Доказывается, что если такое неразложимое полуцепное кольцо имеет бесконечную глобальную размерность, то оно артиново и его колчан является простым циклом. Методами теории праворядных колчанов находится верхняя оценка для длин Лёви для артиновых колец конечной глобальной размерности. Указываются применения к вычислению глобальной размерности черепичных порядков ширины 2.

Abstract

N. A. Bronickaya, V. V. Kirichenko, Global dimension of Noetherian serial rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 41—62.

The global dimension of Noetherian serial rings is studied. It is proved that if an indecomposable serial ring has infinite global dimension then it is Artinian and its quiver is a simple cycle. Using methods of the theory of right serial quivers, we give an upper estimate on the Loewy length of Artinian rings of finite global dimension. Applications to the calculation of the global dimension of tiled orders of width 2 are given.

1. Введение

Важную роль в теории колец играет изучение глобальной размерности разных классов колец. Глобальная размерность различных классов черепичных порядков изучалась в [11, 12, 17, 18, 24, 26].

Для праворядных колец критерий конечности глобальной размерности получен в терминах определителей матриц Картана таких колец (см. [9]). Верхние оценки для глобальной размерности артиновых полуцепных колец получены в [14].

В настоящей работе мы рассматриваем глобальную размерность нётеровых с двух сторон полуцепных колец. Если такое полуцепное неразложимое кольцо имеет бесконечную глобальную размерность, то оно является артиновым полуцепным кольцом, колчан которого — простой цикл.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 41—62.

На основании результатов [18] приводится алгоритм, позволяющий строить черепичные порядки ширины 2 конечной глобальной размерности.

2. Предварительные сведения

Мы рассматриваем ассоциативные кольца с $1 \neq 0$. Термины «артиново кольцо», «нётерово кольцо», «наследственное кольцо» и т. д. означают, что это артиново, нётерово, наследственное и т. д. с двух сторон кольцо. Все модули над кольцом A (правые и левые) являются унитарными.

Полуцепные кольца были введены в 1969 г. Л. А. Скорняковым в [6]. На английском языке для таких колец используется термин «serial rings».

Напомним основные определения.

Модуль называется *цепным*, если решётка его подмодулей линейно упорядоченная, т. е. является цепью. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем.

Кольцо A называется *полуцепным* справа (слева), если регулярный A-модуль A_A $({}_AA)$ является полуцепным.

Полуцепное справа и слева кольцо называется *полуцепным*.

Основоположниками теории полуцепных колец являются Кёте и Накаяма. Последний в 1939 г. ввёл обобщённо однорядные кольца [20] и показал, что над ними все модули полуцепные [21, 22]. В современной терминологии обобщённо однорядное кольцо — это артиново полуцепное кольцо. Л. А. Скорняков [6] показал, что и наоборот, если всякий модуль над некоторым кольцом является полуцепным, это артиново полуцепное кольцо. Эти два утверждения мы будем называть теоремой Накаямы—Скорнякова.

Целью этой статьи является исследование нётеровых (с двух сторон) полуцепных колец конечной глобальной размерности.

Отметим, что теории полуцепных колец посвящены многочисленные статьи и монографии (см., в частности, [7, 15, 23]). Тем, кто интересуется историей теории полуцепных колец, полезно обратиться к этим монографиям.

Дадим определение полусовершенного кольца. Эти кольца были введены в 1960 г. американским математиком Х. Бассом.

Пусть A — кольцо, R — его радикал Джекобсона.

Говорят, что идемпотенты можно поднимать по модулю двустороннего идеала $I \subset A$, если из того, что $g^2 - g \in I$ $(g \in A)$ следует существование идемпотента $e \in A$, такого что $e - g \in I$.

Следующее предложение хорошо известно.

Предложение 2.1. *Идемпотенты можно поднимать по модулю любого ниль-идеала I кольца A.*

Напомним, что кольцо A называется полулокальным, если фактор-кольцо $\bar{A} = A/R$ артиново справа. Хорошо известно (см., например, [15, с. 239]), что $\bar{A}$ является полупростым артиновым (с двух сторон) кольцом.

Определение. Полулокальное кольцо A называется *полусовершенным*, если идемпотенты можно поднимать по модулю радикала Джекобсона R кольца A.

Из предложения 2.1 следует, что полулокальные кольца с нильпотентным радикалом Джекобсона (т. е. полупримарные кольца) всегда полусовершенны. Отсюда, в частности, вытекает следующая теорема.

Теорема 2.2. *Артиново с одной стороны кольцо полусовершенно.*

Подмодуль $N \subset M$ называется максимальным подмодулем модуля M, если фактор-модуль M/N прост.

Идемпотент e кольца называется локальным, если кольцо eAe локально.

Доказательства следующих двух теорем можно найти в [15, гл. 10]).

Теорема 2.3. *Кольцо A полусовершенно тогда и только тогда, когда оно распадается в прямую сумму правых идеалов, каждый из которых имеет ровно один максимальный подмодуль.*

Теорема 2.4 (Б. Мюллер). *Кольцо A полусовершенно тогда и только тогда, когда единица $1 \in A$ является конечной суммой попарно ортогональных локальных идемпотентов.*

Из теорем 2.3 и 2.4 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.5. *Полуцепное справа* (*слева*) *кольцо является полусовершенным.*

Обозначим через X^n прямую сумму n экземпляров модуля X, $X^0 = 0$.

Пусть $A_A = P_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus P_s^{n_s}$ — разложение правого регулярного модуля в прямую сумму неразложимых проективных A-модулей. Мы предполагаем, что модули $P_1, \ldots, P_s$ попарно неизоморфны. Эти модули называются главными (правыми) A-модулями. Положим $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ и $B = \mathrm{End}_A P$. По теореме Мориты категория правых A-модулей эквивалентна категории правых B-модулей. Очевидно, фактор-кольцо $B/R(B)$ является прямым произведением тел ($R(B)$ — радикал Джекобсона кольца B). Кольцо B называется базисным кольцом для кольца A. Из определения эквивалентности в смысле Мориты следует, что всякое полусовершенное кольцо эквивалентно в смысле Мориты своему базисному кольцу.

Пусть R — радикал Джекобсона полусовершенного кольца A.

Определение. Полусовершенное кольцо A называется *приведённым*, если фактор-кольцо A/R является прямым произведением тел.

Таким образом, всякое полусовершенное кольцо эквивалентно в смысле Мориты приведённому кольцу.

Свойство кольца называется Морита-инвариантным, если оно сохраняется при переходе к кольцам, эквивалентным в смысле Мориты. Отметим, что следующие свойства колец являются Морита-инвариантными: полусовершенность, артиновость, нётеровость, конечная глобальная размерность, наследственность, квазифробениусовость, свойство кольца быть полуцепным.

Отметим, что колчаны нётеровых справа полусовершенных колец, эквивалентных в смысле Мориты, совпадают.

Нам понадобится следующая теорема о полупримарных полуцепных кольцах.

Теорема 2.6. *Полупримарное полуцепное справа кольцо A артиново справа.*

Доказательство. Пусть P — главный A-модуль. Рассмотрим ряд Лёви модуля P

$$P \supset PR \supset PR^2 \supset \ldots \supset PR^{m-1} \supset 0,$$

где $PR^{m-1} \neq 0$ и $PR^m = 0$. В силу нильпотентности R все включения в ряде Лёви строгие. Поэтому фактор-модули $P/PR, \ldots, PR^k/PR^{k+1}$, $k = 1, \ldots, m-2$, и модуль PR^{m-1} полупросты. Из того, что P — цепной модуль, следует, что все эти фактор-модули и модуль PR^{m-1} просты. Таким образом, каждый главный модуль P артинов, откуда следует артиновость справа кольца A. $\square$

Определим колчан $Q(A)$ произвольного полуцепного кольца A по формуле

$$Q(A) = Q(A/R^2).$$

Колчан $Q(A/R^2)$ всегда существует, так как по теореме 2.6 A/R^2 — артиново с двух сторон кольцо.

Необходимые нам сведения о колчанах полусовершенных колец содержатся в [15, гл. 11].

Кольцо A называется *разложимым*, если оно является прямым произведением двух колец. В противном случае кольцо A называется *неразложимым*.

Колчан Q называется *несвязным*, если существует представление множества вершин VQ в виде объединения двух непустых подмножеств V_1 и V_2, таких что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, между которыми нет стрелок. Колчан, который не является несвязным, называется *связным*.

Сформулируем теоремы 11.1.9, 12.1.12 и следствие 12.1.3 из [15].

Теорема 2.7. *Следующие условия для нётерова с двух сторон полусовершенного кольца A эквивалентны*:

1) *кольцо A неразложимо*;
2) *кольцо A/R^2 неразложимо*;
3) *колчан $Q(A)$ кольца A связен.*

Теорема 2.8. *Колчан полуцепного кольца является несвязным объединением простых циклов и простых цепей.*

Отметим, что точка $\bullet$ и петля $\bullet$ — это одноточечная цепь CH_1 и одноточечный цикл C_1. Если число вершин s в простом цикле и в простой цепи больше двух, то простая цепь CH_s записывается в виде

$$CH_s = \{ \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \longrightarrow \ \cdots \ \longrightarrow \overset{s-1}{\bullet} \longrightarrow \overset{s}{\bullet} \}.$$

Простой цикл C_s записывается в виде

$$C_s = \{\ \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \longrightarrow \ \dots\ \longrightarrow \overset{s-1}{\bullet} \longrightarrow \overset{s}{\bullet}\ \}.$$

Следствие 2.9. *Колчан полуцепного нётерова с двух сторон неразложимого кольца является либо простым циклом C_s, либо простой цепью CH_s.*

Следуя [15, с. 306], нётерово с двух сторон неразложимое полуцепное кольцо будем называть кольцом первого типа, если его колчан является цепью CH_s, и кольцом второго типа, если его колчан является циклом C_s.

Мы приведём формулировку теоремы, дающей описание нётеровых (с двух сторон) полуцепных колец, следуя [23, гл. 7, теорема 7.23].

Теорема 2.10 (теорема Кириченко—Уорфилда). *Каждое нётерово, но не артиново полуцепное неразложимое приведённое кольцо изоморфно кольцу*

$$H_n(V) = \begin{pmatrix} V & V & \dots & V \\ J & V & \dots & V \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J & J & \dots & V \end{pmatrix},$$

где V — нётерова цепная область с ненулевым радикалом Джекобсона J. Наоборот, любое кольцо вида $H_n(V)$, где V — цепная область и $J \neq 0$, является нётеровым полуцепным кольцом.

Замечание. Отметим, что кольцо V является дискретно нормированным кольцом (не обязательно коммутативным) с единственным максимальным идеалом $J \neq 0$ и, наоборот, всякое дискретно нормированное кольцо является нётеровой цепной областью с ненулевым радикалом $J \neq 0$.

Элементы кольца $H_n(V)$ — это квадратные матрицы порядка n, у которых ниже главной диагонали стоят элементы из J, а во всех остальных местах стоят произвольные элементы из V.

Обозначим через $T_n(D)$ кольцо верхних треугольных матриц над телом D.

Из [15, теорема 13.5.2] следует, что кольца $T_n(D)$ и $H_m(V)$ являются наследственными с двух сторон полуцепными кольцами при любых натуральных m и n, т. е. кольцами глобальной размерности 1.

Из теоремы 13.5.1 в [15] получаем следующую теорему.

Теорема 2.11. *Полуцепное наследственное кольцо является нётеровым с двух сторон кольцом.*

Из теоремы 2.10 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.12. *Полуцепное нётерово кольцо эквивалентно в смысле Мориты прямому произведению конечного числа колец следующих двух типов:*

1) *полуцепные артиновы кольца;*
2) *кольца, изоморфные кольцам вида $H_m(V)$.*

Наоборот, все кольца такого вида полуцепные и нётеровы с двух сторон.

Теорема 2.13. *Нётерово справа полуцепное кольцо A, колчан $Q(A)$ которого является цепью, артиново.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся аннуляторная лемма и Q-лемма, доказанные в [15, гл. 11]. Кроме этого, мы приведём формулировку предложения 11.1.1 из [15], в котором даётся двустороннее пирсовское разложение радикала Джекобсона R полусовершенного кольца A.

Пусть $A_A = P_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus P_s^{n_s}$ — разложение полусовершенного кольца A в прямую сумму главных правых A-модулей, и пусть $1 = f_1 + \ldots + f_s$ — соответствующее разложение $1 \in A$ в сумму попарно ортогональных идемпотентов, т. е. $f_i A = P_i^{n_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Отметим, что главные A-модули — это в точности циклические неразложимые проективные A-модули.

Рассмотрим двустороннее пирсовское разложение кольца A:

$$A = \bigoplus_{i,j=1}^{s} A_{ij},$$

где $A_{ij} = f_i A f_j$ $(i, j = 1, \ldots, s)$.

Предложение 2.14. *Обозначим через R_{ij} двустороннюю пирсовскую компоненту $f_i R f_j$ радикала Джекобсона R кольца A. Тогда $R_{ij} = A_{ij}$ для $i \neq j$ и $f_i R f_i = \operatorname{rad} f_i A f_i$ $(i, j = 1, \ldots, s)$.*

Кольцо $f_i A f_i$ изоморфно $\operatorname{End}_A P_i^{n_i} \simeq \mathrm{M}_{n_i}(\operatorname{End}_A P_i)$, где $\operatorname{End}_A P_i = \mathcal{O}_i$ — локальное кольцо $(i = 1, \ldots, s)$. По предложению 3.4.10 из [15] $\operatorname{rad} \mathrm{M}_{n_i}(\mathcal{O}_i) = \mathrm{M}_{n_i}(\operatorname{rad} \mathcal{O}_i)$.

Положим $U_i = P_i / P_i R$. Так как

$$\bar{A} = A/R = U_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus U_s^{n_s},$$

то все простые A-модули исчерпываются модулями $U_1, \ldots, U_s$ и идемпотенты $f_1, \ldots, f_s$ центральны по модулю радикала R.

Определение. Идемпотент $f \in A$ называется *каноническим*, если

$$\bar{f}\bar{A} = \bar{A}\bar{f} = \mathrm{M}_{n_k}(D_k)$$

для некоторого $k = 1, \ldots, s$; $\bar{f} = f + R$, $\mathrm{M}_{n_k}(D_k)$ — кольцо всех квадратных матриц порядка n_k над телом D_k.

Это утверждение эквивалентно тому, что $\bar{f}$ — минимальный центральный идемпотент кольца $\bar{A}$.

Разложение $1 = f_1 + \ldots + f_s$ в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов называется каноническим разложением единицы кольца A. В частности, разложение $1 \in A$, используемое в предложении 2.14 является каноническим. Обозначим через δ_{ij} символ Кронекера $(i, j = 1, \ldots, s)$.

Аннуляторная лемма. *Пусть* $1 = f_1 + \ldots + f_s$ — *каноническое разложение* $1 \in A$. *Для каждого простого* A-*модуля* U_i *и для каждого* f_i *справедливо равенство* $U_i f_j = \delta_{ij} U_j$, *где* $i, j = 1, \ldots, s$.

Пусть A — приведённое полусовершенное кольцо и $1 = e_1 + \ldots + e_s$ — разложение $1 \in A$ в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов. В этом случае простые A-модули исчерпываются модулями

$$U_1 = e_1 A / e_1 R, \ldots, \ U_s = e_s A / e_s R.$$

***Q*-лемма.** *Обозначим* $W_i = e_i R / e_i R^2$ *полупростой* $\bar{A}$-*модуль. Простой модуль* U_k *входит в прямое разложение модуля* W_i *тогда и только тогда, когда* $e_i R^2 e_k$ *строго содержится в* $e_i R e_k$, *где* $i, k = 1, \ldots, s$.

Перейдём к доказательству теоремы 2.13. Без ограничения общности можно считать, что кольцо A приведённое и главные A-модули $P_1, \ldots, P_s$ занумерованы так, что

$$P_1 R / P_1 R^2 = U_2, \ldots, \ P_{s-1} R / P_{s-1} R^2 = U_s, \ P_s = U_s.$$

Пусть $A_A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ и $1 = e_1 + \ldots + e_s$ — соответствующее разложение $1 \in A$ в сумму попарно ортогональных идемпотентов, $P_1 = e_1 A, \ldots, \ P_s = e_s A$. Рассмотрим соответствующее двустороннее пирсовское разложение

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \ldots & A_{ss} \end{pmatrix},$$

где $e_i A e_j = A_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, s$. Модуль $P_s = e_s A$ прост, поэтому по аннуляторной лемме

$$A_{s1} = 0, \ A_{s2} = 0, \ldots, \ A_{ss-1} = 0.$$

Из Q-леммы следует, что $e_i R = A_{ii+1} A + e_i R$ при $i = 1, \ldots, s-1$. По лемме Накаямы получаем, что $e_i R = A_{ii+1} A$. При $i = s-1$

$$e_{s-1} R = (A_{s-11}, \ldots, A_{s-1s}, R_{s-1s-1}, A_{s-1s}) = A_{s-1s} A = (0, \ldots, 0, A_{s-1s}).$$

Продолжая этот процесс, получаем, что $A_{ij} = 0$ при $i > j$ и $R_{ii} = 0$. Из предложения 2.14 следует, что

$$R = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \ldots & A_{1s-1} & A_{1s} \\ 0 & 0 & \ldots & A_{2s-1} & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{s-1s} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $R^s = 0$ и кольцо A артиново с двух сторон по теореме 2.6 и неразложимо по теореме 2.7. Следовательно, нётерово справа полуцепное кольцо A, колчан $Q(A)$ которого — цепь, является артиновым полуцепным кольцом первого типа. $\square$

3. Проективные резольвенты и глобальная размерность колец

Пусть A — кольцо и M — правый модуль.

Определение. Проективной резольвентой M называется точная последовательность A-модулей

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

в которой все модули P_n являются проективными.

Как следует, например, из [15], всякий A-модуль M имеет свободную, а потому и проективную резольвенту.

Мы говорим, что проективная размерность M равна n и пишем $\mathrm{proj.dim}_A M = n$, если существует проективная резольвента длины n

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

и не существует более короткой проективной резольвенты модуля M.

Мы говорим, что модуль M имеет бесконечную проективную резольвенту, если для него не существует проективной резольвенты конечной длины. Этот факт записывается следующим образом: $\mathrm{proj.dim}_A M = \infty$.

Хорошо известно, что $\mathrm{proj.dim}_A M$ не зависит от выбора проективной резольвенты.

Пусть $\mathrm{proj.dim}_A M = n$ и

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0 \text{ —}$$

соответствующая проективная резольвента. Точная последовательность

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

называется началом проективной резольвенты модуля M, а точная последовательность

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \text{ —}$$

концом проективной резольвенты модуля M.

Обозначим через $\mathbb{M}_A$ (${}_A\mathbb{M}$) категорию всех правых (левых) A-модулей.

Определение. Если A — кольцо, то его правая глобальная размерность $\mathrm{r.gl.dim}\, A$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{r.gl.dim}\, A = \sup\{\mathrm{proj.dim}_A M \colon M \in \mathbb{M}_A\}.$$

Аналогично определяется левая глобальная размерность $\mathrm{l.gl.dim}\, A$:

$$\mathrm{l.gl.dim}\, A = \sup\{\mathrm{proj.dim}_A M \colon M \in_A \mathbb{M}\}.$$

Следующие две важные теоремы доказаны М. Ауслендером [8].

Теорема 3.1.

$$\text{r.gl.dim}\, A = \sup\{\text{proj.dim}_A M \colon M \text{ — } \textit{произвольный циклический } A\textit{-модуль}\}.$$

Теорема 3.2. *Если кольцо A нётерово справа и слева, то*

$$\text{r.gl.dim}\, A = \text{l.gl.dim}\, A.$$

Хорошо известное кольцо Херстейна—Смолла является наследственным справа и нётеровым справа полуцепным кольцом и не является нётеровым слева и наследственным слева.

Напомним этот пример. Пусть $p \in \mathbb{Z}$ — простое число, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Обозначим через $\mathbb{Z}_p$ кольцо p-целых чисел:

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \colon (n, p) = 1 \right\}.$$

Следующее кольцо является кольцом Херстейна—Смолла:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}.$$

4. Артиновы полуцепные кольца первого типа

Покажем, что любое артиново кольцо A первого типа имеет конечную глобальную размерность. Мы будем предполагать, что кольцо A является приведённым. Пусть

$$A_A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s.$$

Занумеруем главные A-модули $P_1, \ldots, P_s$ так, чтобы

$$P_1/P_1R^2 = U_2, \ldots,\ P_{s-1}R/P_{s-1}R^2 = U_s,\ P_s = U_s,\ P_sR = 0.$$

Поэтому из вершины s стрелка не выходит.

Существует описание таких фактор-колец, приведённое в [10]. Достаточно рассмотреть двусторонние идеалы I, содержащие R^2. Согласно предложению 2.14 радикал R кольца $T_n(D)$ имеет вид

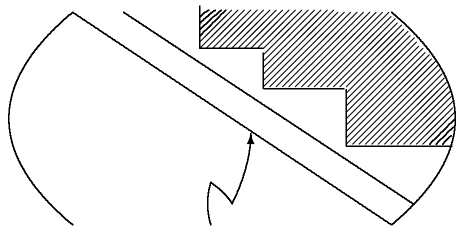
$$R = \begin{pmatrix} 0 & D & \ldots & D & D \\ 0 & 0 & \ldots & D & D \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & D \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D & \ldots & D & D & D \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & D & D & D \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\Omega_n = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}.$$

Подмножество $\Theta \subset \Omega_n$ называется ступенчатым множеством ранга n, если элементы из Θ удовлетворяют следующим условиям:

1) $(i,j) \in \Theta$ влечёт $j \geqslant i+2$ (т. е. Θ не содержит элементов главной диагонали и диагонали над главной);
2) из того, что $(i,j) \in \Theta$, следует, что $(k,l) \in \Theta$ при всех k и l, удовлетворяющих условиям $k \leqslant i$ и $l \geqslant j$.



Ступенчатое множество

На рисунке ступенчатое множество ранга n заштриховано.
Следующее предложение доказано в [10, лемма 3.3].

Предложение 4.1. *Пусть $T_n(D)$ — кольцо всех верхних треугольных $(n \times n)$-матриц с элементами из тела D. Существует взаимно-однозначное соответствие между ступенчатыми множествами ранга n и двусторонними идеалами J, такими что фактор-кольца $T_n(D)/J$ неразложимы. Это соответствие задаётся следующим образом:*

$$\Theta \subset \Omega_n \longleftrightarrow I = \{a_{ij} \in T_n(D) \mid a_{ij} = 0 \text{ для } (i,j) \notin \Theta\}.$$

Таким образом, для каждого n мы имеем, с точностью до изоморфизма, лишь конечное множество приведённых колец первого типа, т. е. артиновых колец A, колчаны которых $Q(A)$ являются простой цепью

$$CH_n = \{ \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \overset{n}{\bullet} \}.$$

Обозначим $P_i = e_{ii}A$, $i = 1, \ldots, n$. Отметим, что $\operatorname{End}_A P_i = D$, $i = 1, \ldots, n$, поэтому модуль P_i не может дважды входить в начало проективной резольвенты модуля M, не являющегося проективным, т. е. не существует точной последовательности вида

$$P_i \xrightarrow{d_1} P_i \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Кроме того, если $j > i$, то $\operatorname{Hom}_A(P_i, P_j) = 0$. Предположим, что M — неразложимый A-модуль, не являющийся проективным A-модулем. По теореме Накаямы—Скорнякова M — фактор-модуль некоторого модуля P_i $(i = 1, \ldots, n-10)$, и мы имеем последовательность

$$P_j \xrightarrow{d_1} P_i \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

где d_1 — ненулевой гомоморфизм. Поэтому при $j > i$ предположим, что существует последовательность

$$P_{i_m} \xrightarrow{d_m} \ldots \longrightarrow P_{i_2} \xrightarrow{d_2} P_{i_1} \xrightarrow{d_1} P_i \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

в которой $d_1, d_2, \ldots, d_m$ не являются мономорфизмами. Поэтому

$$i_m > i_{m-1} > \ldots > i_1 > i.$$

Отметим, что всякий ненулевой гомоморфизм модуля P_n в любой главный A-модуль P_k, $k = 1, \ldots, n-1$, является мономорфизмом. Поэтому

$$1 \leqslant i \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n-1.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{gl.dim}\, A \leqslant n-1$.

Пример. Рассмотрим в качестве примера фактор-кольцо $A = T_n(D)/R^2$ и $P_i = e_{ii}A$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через l_i длину композиционного ряда модуля P_i, $i = 1, \ldots, n$. В этом случае $l_1 = l_2 = \ldots = l_{n-2} = 2$ и $l_n = 1$. Следовательно, $P_iR = U_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, и $P_nR = 0$. Поэтому модуль U_1 имеет проективную резольвенту

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-2}} \ldots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_2} P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{\pi} U_1 \longrightarrow 0.$$

Следовательно, $\mathrm{gl.dim}\, A = n-1$, т. е. для полуцепных колец A первого типа

$$1 \leqslant \mathrm{gl.dim}\, A \leqslant n-1.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть A — нётерово неразложимое полуцепное кольцо и $\mathrm{gl.dim}\, A = \infty$. Тогда кольцо A артиново и его колчан $Q(A)$ является простым циклом C_n.*

5. Глобальная размерность полуцепных артиновых колец второго типа

Пусть A — неразложимое приведённое артиново полуцепное кольцо, R — его радикал Джекобсона, $A_A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$ — разложение регулярного A-модуля A_A в прямую сумму попарно неизоморфных главных A-модулей. Пусть $U_i = P_i/P_iR$, $i = 1, \ldots, n$. Из того, что $Q(A)$ является простым циклом C_n, следует, что

$$P_iR/P_iR^2 \simeq U_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad P_nR/P_nR^2 \simeq U_1.$$

Обозначим через l_i длину $l(P_i)$ композиционного ряда модуля P_i, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, что $l_i \geqslant 2$ и, в отличие от колец первого типа, длины l_i могут быть неограниченными.

Обозначим через $\mathrm{LL}(A)$ длину ряда Лёви кольца A. Это наименьшее натуральное число, такое что $R^{\mathrm{LL}(A)} = 0$. Очевидно, что $\mathrm{LL}(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} l_i$.

Имеет место следующая теорема, доказанная В. Густафсоном [14].

Теорема 5.1. *Пусть A — кольцо, удовлетворяющее сформулированным выше условиям. Если* $\mathrm{gl.dim}\, A < \infty$, *то*

1) $\mathrm{LL}(A) \leqslant 2n-1$;
2) $\mathrm{gl.dim}\, A \leqslant 2n-2$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что длины Лёви всех неразложимых артиновых полуцепных колец с конечной глобальной размерностью не превосходят $2n-1$, где n — число вершин в колчане $Q(A)$.

Из теоремы 5.1 получаем следствие.

Следствие 5.2. *Фактор-кольцо $H_n(V)/R^m$ имеет бесконечную глобальную размерность при $m \geqslant 2n$.*

Мы приведём доказательство теоремы 5.1, использующее праворядные колчаны, которые строятся по отображениям конечного множества в себя.

Нам понадобится хорошо известная лемма о последовательностях чисел $(l_1, \ldots, l_n)$, называемых последовательностями Купиша [19]. Отметим, что $l_i = l(P_i)$, причём модули P_i, $i = 1, \ldots, n$, занумерованы так, как указано в начале раздела.

Лемма 5.3. *Пусть $(l_1, \ldots, l_n)$ — последовательность Купиша артинова приведённого полуцепного кольца A, колчан которого $Q(A)$ является простым циклом C_n. Для чисел $l_1, \ldots, l_n$ справедливы следующие неравенства*:

$$l_i \geqslant 2 \text{ для } i = 1, \ldots, n; \quad l_i \leqslant l_{i+1} + 1 \text{ для } i = 1, \ldots, n-1, \quad l_n \leqslant l_1 + 1.$$

В частности, $|l_i - l_j| \leqslant n-1$.

Доказательство этой леммы можно найти, например, в [23, лемма 8.5.].

Следствие 5.4. *Если* $\mathrm{LL}(A) \geqslant 2n$, *то* $l_i \geqslant n+1$ *при всех* $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим отображение $f\colon N_n \to N_n$, определённое формулой $f(i) = [i + l_i]$, где $[j]$ обозначает наименьший положительный вычет j по модулю n. В частности, $[n] = n$.

Справедливо следующее предложение.

Предложение 5.5. $\mathrm{soc}\, P_i \simeq U_{[i+l_i-1]}$.

Предложение 5.6. *Пусть $l(P_i) \geqslant n+1$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда для любых $i, j = 1, \ldots, n$ существует ненулевой гомоморфизм $g\colon P_i \to P_j$, причём* $\ker g \neq 0$ (*возможно,* $i = j$).

Утверждение следует из предложения 5.5.

Из следствия 5.4 получаем следствие 5.7.

Следствие 5.7. *Если* $\mathrm{LL}(A) \geqslant 2n$, *то для любых $i, j = 1, \ldots, n$ существует ненулевой гомоморфизм $g\colon P_i \to P_j$, причём* $\ker g \neq 0$ (*возможно,* $i = j$).

Обозначим $N_n = \{1, \ldots, n\}$. Нам понадобятся однозначные отображения $\varphi\colon N_n \to N_n$.

Напомним, что колчан Q называется *праворядным*, если из каждой его вершины выходит не более одной стрелки.

Пусть $\varphi\colon N_n \to N_n$ — однозначное отображение. Представим φ праворядным колчаном Q_φ, множеством вершин которого является N_n и мы соединяем вершину i с вершиной $\varphi(i)$ одной стрелкой. Других стрелок в колчане Q_φ нет. Ясно, что колчан Q_φ является праворядным и из каждой вершины Q_φ выходит ровно одна стрелка.

Отметим, что праворядные колчаны рассматривались в [2,3,9,10] и во многих других публикациях.

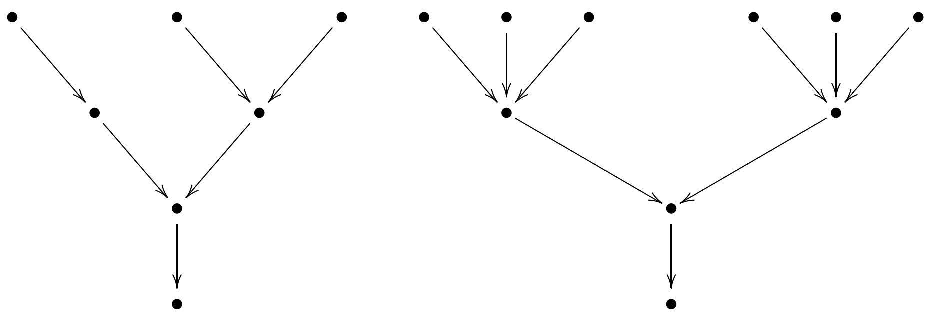
Для того чтобы дать описание праворядных колчанов, приведём следующие определения.

Контуром колчана Q называется последовательность попарно различных вершин $\{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$ и последовательность стрелок $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t\}$, таких что каждая стрелка σ_k соединяет i_k с i_{k+1} или i_{k+1} с i_k, причём стрелка σ_t соединяет i_t с i_1 или i_1 с i_t. Ясно, что каждый ориентированный цикл является контуром, но не наоборот.

Связный колчан без контуров называется *деревом*.

Корнем дерева называется вершина, из которой не выходит стрелка.

Если дерево праворядно, то все стрелки в нём входят в ориентированные пути, идущие к корню. Например, следующие колчаны являются праворядными деревьями.



Наоборот, так ориентированные деревья являются праворядными колчанами.

Приведём две формулировки теорем о праворядных колчанах.

Теорема 5.8 [3, теорема 1, с. 50]. *Каждая компонента связности колчана любого отображения конечного множества в себя содержит один и только один цикл. Вся компонента получается из этого притягивающего цикла-аттрактора добавлением к каждой вершине притягиваемого к ней дерева.*

Замечание. В этой формулировке мы заменили слово «граф» на «колчан».

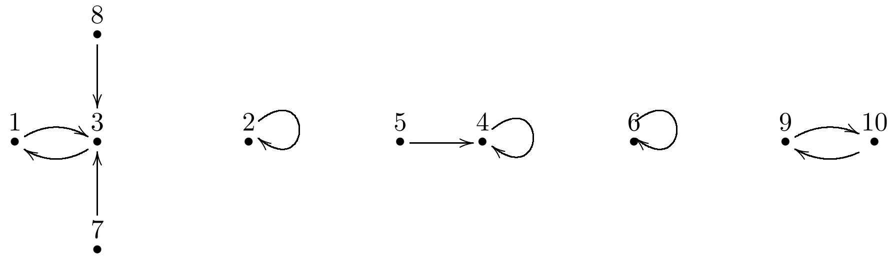
Из следствия 2.3. в [3] получаем описание праворядных колчанов.

Теорема 5.9. *Связная компонента праворядного колчана Q является либо праворядным деревом с одним корнем, либо колчаном с одним контуром — простым циклом. Если из этой связной компоненты удалить простой цикл, то получится несвязное объединение праворядных деревьев, все корни которых — вершины, лежащие на цикле.*

Приведём пример праворядного колчана Q_φ, построенного по отображению

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 4 & 6 & 3 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, Q_φ имеет следующий вид.



Вершины, принадлежащие всем циклам праворядного колчана Q_φ, следуя [14], будем называть φ-регулярными. Множество всех φ-регулярных вершин обозначим через Y_φ.

Предложение 5.10. *Справедливы следующие утверждения*:

1) $Y_\varphi \neq \varnothing$;
2) $\varphi|_{Y_\varphi}$ *— подстановка множества* Y_φ;
3) *для любого отображения* $\varphi\colon N_n \to N_n$ *и для любого* $i \in N_n$ *вершина* $\varphi^{n-1}(i)$ *праворядного колчана* Q_φ *является* φ*-регулярной.*

Доказательство. Из теоремы 5.9 следует, что связная компонента Q_φ не может быть деревом с простым корнем. Поэтому любая связная компонента содержит простой цикл и $Y_\varphi \neq \varnothing$. Утверждение 2 очевидно. Утверждение 3 следует из теоремы 5.9, поскольку все корни деревьев колчана Q_φ лежат на простых циклах. $\square$

В нашем примере

$$Y_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \varphi|_{Y_\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Кроме того,

$$\varphi^9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 4 & 6 & 3 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение $f\colon N_n \to N_n$, определённое по правилу $f(i) = [i + l_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть Y_f — множество всех f-регулярных вершин.

Пусть M и N — модули над кольцом A. Гомоморфизм $\psi\colon M \to N$ будем называть *собственным*, если $\operatorname{Im}\psi$ строго содержится в N.

Напомним, что артиново кольцо A называется кольцом второго типа, если его колчан $Q(A)$ является простым циклом C_n. Пусть P — главный A-модуль, т. е. неразложимый циклический проективный A-модуль.

Отметим, что каждой вершине $i \in N_n$ соответствует главный A-модуль. Все попарно неизоморфные главные A-модули исчерпываются модулями $P_1, \ldots, P_n$.

Ясно, что $f(i) = f(j)$ тогда и только тогда, когда $[i + l_i - 1] = [j + l_j - 1]$, где $i, j \in N_n = \{1, \ldots, n\}$

Предложение 5.11. *Не существует собственных мономорфизмов A-модуля P в себя. Если i и j — две различные f-регулярные вершины, то не существует мономорфизма модуля P_i в модуль P_j.*

Доказательство. Для каждого главного A-модуля P определена длина его композиционного ряда $l(P)$, причём для любого собственного подмодуля $L \subset P$ имеет место строгое неравенство $l(L) < l(P)$. Если $\psi\colon P \to P$ — собственный мономорфизм, то $l(\operatorname{Im}\psi) = l(P) < l(P)$. Получили противоречие.

Пусть $\mu\colon P_i \to P_j$ — мономорфизм. Из предложения 5.5 следует, что $f(i) = f(j)$, поэтому $i = j$. Имеем противоречие. □

Пусть M — A-модуль. Через $\operatorname{top} M$ обозначим фактор-модуль M/MR.

Предложение 5.12. *Пусть $g\colon P_j \to P_i$ — ненулевой гомоморфизм, причём $\ker g \neq 0$. Тогда $\operatorname{top}\ker g = U_{f(i)}$.*

Доказательство. Обозначим через M коядро $\operatorname{Coker} g$, $M \simeq P_i/\operatorname{Im} g$. Имеют место изоморфизм $\operatorname{Im} g \simeq P_j/\ker g$ и вложение $\operatorname{Im} g \subset P_i$. Поэтому $\operatorname{soc}\operatorname{Im} g = \operatorname{soc} P_i = U_{[i+l_i-1]}$, следовательно, $\operatorname{top}\ker g = U_{f(i)}$. □

Пусть M — неразложимый A-модуль, не являющийся главным. По теореме Накаямы—Скорнякова существует точная последовательность

$$P_j \xrightarrow{g} P_i \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Используя предыдущее предложение, мы получаем точную последовательность

$$\ldots \longrightarrow P_{f^2(j)} \longrightarrow P_{f^2(i)} \longrightarrow P_{f(j)} \longrightarrow P_{f(i)} \longrightarrow P_j \longrightarrow P_i \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Предположим, что модуль M имеет конечную проективную размерность. Тогда существует один из мономорфизмов

$$0 \xrightarrow{g} P_{f^k(i)} \longrightarrow P_{f^{k-1}(j)}; \qquad (1)$$

$$0 \longrightarrow P_{f^k(j)} \longrightarrow P_{f^k(i)}. \qquad (2)$$

Основная лемма. *Пусть M — неразложимый A-модуль, не являющийся главным и имеющий конечную проективную размерность. Пусть i и j — две различные f-регулярные точки. Не существует следующих начал проективных резольвент модуля M:*

$$P_i \xrightarrow{g} P_i \longrightarrow M \longrightarrow 0; \qquad (\alpha)$$

$$P_j \xrightarrow{g} P_i \longrightarrow M \longrightarrow 0. \qquad (\beta)$$

Доказательство. В случае (α) конец проективной резольвенты имеет вид либо (1), либо (2). В случае (1) $f\big(f^k_{(i)}\big) = f\big(f^{k-1}_{(j)}\big)$, т. е. $f^k(i) = f^{k-1}(i) = m$ и существует собственный мономорфизм

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow P_m,$$

чего не может быть.

В случае (2) существует собственный мономорфизм

$$0 \longrightarrow P_{f^k(i)} \longrightarrow P_{f^k(i)}.$$

Получаем противоречие.

Рассмотрим случай (β). Снова в случае (1) имеем, что $f^k(i) = f^{k-1}(j)$ — f-регулярные вершины. Поэтому из равенства $f\big(f^k_{(i)}\big) = f\big(f^{k-1}_{(j)}\big)$ следует, что $f^k(i) = f^{k-1}(j) = m$, т. е. в случае (1) существует собственный мономорфизм

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow P_m,$$

чего не может быть.

В случае (2) вершины $f^k(j)$ и $f^k(i)$ являются f-регулярными. Поэтому из равенства $f\big(f^k_{(j)}\big) = f\big(f^k_{(i)}\big)$, следует, что $f^{k+1}(j) = f^{k+1}(i)$. Из f-регулярности вершин i и j получаем, что $i = j$. Снова приходим к противоречию. $\square$

Предположим, что $\mathrm{LL}(A) \geqslant 2k$. Тогда по следствию 5.7 для любых главных A-модулей P_i и P_j существует ненулевой гомоморфизм $g\colon P_i \to P_j$, причём $\ker g \neq 0$ (возможно, $i = j$).

По основной лемме отсюда сразу следует, что для артиновых полуцепных колец A конечной глобальной размерности $\mathrm{LL}(A) \leqslant 2n - 1$.

Используя описание праворядных колчанов, построенных по отображению $\varphi\colon N_n \to N_n$, нетрудно получить верхнюю оценку для $\mathrm{gl.dim}\, A$:

$$\mathrm{gl.dim}\, A \leqslant 2n - 2.$$

Заметим, что число n можно рассматривать как число вершин колчана $Q(A)$ кольца A.

Пример. Рассмотрим кольцо

$$H_4(\mathcal{O}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$R = \begin{pmatrix} \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad R^2 = \begin{pmatrix} \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi^2\mathcal{O} \\ \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим фактор-кольцо $B_4 = H_4(\mathcal{O})/R^2$. Очевидно, что главные B_4-модули — это модули

$$P_1 = \bar{e}_{11}B_4, \quad P_2 = \bar{e}_{22}B_4, \quad P_3 = \bar{e}_{33}B_4, \quad P_4 = \bar{e}_{44}B_4,$$

где $\bar{e}_{ii} = e_{ii} + R^2$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Кольцо B_4 является артиновым кольцом второго типа, и $l(P_1) = l(P_2) = l(P_3) = l(P_4) = 2$.

Рассмотрим отображение $f\colon N_4 \to N_4$, определённое по формуле

$$f(1) = [1+2] = 3, \quad f(2) = [2+2] = 4, \quad f(3) = [3+2] = 1, \quad f(4) = [4+2] = 4.$$

Отображение f задаётся праворядным колчаном Q_f:

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\bullet} \arrow[r, bend left] & \overset{3}{\bullet} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \overset{2}{\bullet} \arrow[r, bend left] & \overset{4}{\bullet} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}.$$

Очевидно,

$$P_1 \supset U_2 \supset 0, \quad P_2 \supset U_3 \supset 0, \quad P_3 \supset U_4 \supset 0, \quad P_4 \supset U_1 \supset 0.$$

Таким образом, существуют ненулевые гомоморфизмы $P_2 \to P_1$ и $P_1 \to P_4$, которые не являются мономорфизмами. По основной лемме $\mathrm{gl.dim}\, B_4 = \infty$.

6. Черепичные порядки ширины 2

Пусть A — ассоциативное кольцо с $1 \neq 0$. A-модуль M называется *модулем без кручения в смысле Басса*, если естественный гомоморфизм модуля M в модуль $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M, A), A)$ является мономорфизмом. Это условие равносильно тому, что модуль является подмодулем полной прямой суммы некоторого числа экземпляров кольца A. Для краткости конечно порождённые модули без кручения в смысле Басса будем называть *допустимыми*.

Черепичным порядком называется первичное нётерово полусовершенное и полудистрибутивное кольцо с ненулевым радикалом Джекобсона [15, гл. 14].

Мы называем SPSD-кольцом полусовершенное полудистрибутивное кольцо.

Имеет место следующая теорема разложения для полупервичных нётеровых справа SPSD-колец.

Теорема 6.1 [15, теорема 14.5.1]. *Для полупервичного полусовершенного нётерова справа кольца A следующие условия эквивалентны*:
1) *кольцо A полудистрибутивно*;
2) *кольцо A является прямым произведением полупростого артинова кольца и конечного числа черепичных порядков.*

Теорема 6.2 [15, теорема 14.5.2]. *Каждый черепичный порядок изоморфен первичному кольцу вида*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

где $n \geqslant 1$, $\mathcal{O}$ является дискретно нормированным кольцом с простым элементом π и α_{ij} — такие целые числа, что $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для всех i, j, k ($\alpha_{ii} = 0$ для любого i).

Дискретно нормированное кольцо $\mathcal{O}$ вкладывается в классическое кольцо частных D, которое является телом, поэтому SPSD-кольцо A вкладывается в классическое кольцо частных $\mathrm{M}_n(D)$ и $e_{ii}Ae_{jj} = \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$, где $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ — матричные идемпотенты $\mathrm{M}_n(D)$.

Обозначим $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ кольцо всех квадратных $(n \times n)$-матриц над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Пусть $\mathcal{E} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Матрица $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ называется *матрицей показателей*, если $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для всех $i, j, k = 1, \ldots, n$ и $\alpha_{ii} = 0$ для $i = 1, \ldots, n$. Если $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \ldots, n$, то матрицу $\mathcal{E}$ называют *приведённой матрицей показателей*.

Введём следующее обозначение: $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$, где $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ — приведённая матрица показателей кольца A, т. е. $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi_{ij}^{\alpha}\mathcal{O}$, где e_{ij} — матричные единицы. Если черепичный порядок является приведённым, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$, для $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, т. е. $\mathcal{E}(A)$ приведённая.

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — дискретно нормированное кольцо. Правый A-модуль M называется *правой A-решёткой*, если M является конечно порождённым свободным $\mathcal{O}$-модулем.

Например, все конечно порождённые проективные A-модули являются A-решётками.

Для заданного черепичного порядка A обозначим $\mathrm{Lat}_{\mathrm{r}}(A)$ категорию правых A-решёток. Легко убедиться, что допустимые модули — это в точности A-решётки. Мы обозначаем $S_{\mathrm{r}}(A)$ частично упорядоченное множество, состоящее из всех A-решёток, лежащих в фиксированном простом $\mathrm{M}_n(D)$-модуле U. Такие A-решётки называются *неприводимыми*.

Отметим, что каждый простой правый $\mathrm{M}_n(D)$-модуль изоморфен простому $\mathrm{M}_n(D)$-модулю U с таким D-базисом $e_1, \ldots, e_n$, что $e_i e_{jk} = \delta_{ij} e_k$, где $e_{jk} \in \mathrm{M}_n(D)$ — матричные единицы.

Пусть $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$ — черепичный порядок, и пусть U — простой правый $\mathrm{M}_n(D)$-модуль. Тогда любая правая неприводимая A-решётка M, лежащая в U является A-модулем с $\mathcal{O}$-базисом $(\pi^{\alpha_1}e_1, \ldots, \pi^{\alpha_n}e_n)$, причём

$$\alpha_i + \alpha_{ij} \geqslant \alpha_j. \tag{$**$}$$

Поэтому неприводимую A-решётку M можно задавать целочисленным вектором $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющим условию $(**)$. Запишем $[M] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Отношение порядка на множестве таких векторов и операции над ними, соответствующие сумме и пересечению неприводимых решёток, очевидны.

Замечание. Две неприводимые A-решётки $M_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $M_2 = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\alpha_i = \beta_i + z$ для $i = 1, \ldots, n$ и $z \in \mathbb{Z}$. Обозначим $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$ вектор-столбец с координатами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Отметим, что частично упорядоченное множество $S_{\mathrm{r}}(A)$ не зависит от выбора простого $\mathrm{M}_n(D)$-модуля U.

Обозначим через $\mathcal{M}_{\mathrm{r}}(A) = \mathcal{M}(A)$ частично упорядоченное подмножество множества $S_{\mathrm{r}}(A)$, состоящее из всех неприводимых проективных правых A-решёток (т. е. неприводимых допустимых модулей). Частично упорядоченное множество $\mathcal{M}(A)$ является множеством конечной ширины, т. е. в нём не существует антицепей, состоящих более чем из n элементов. Напомним, что элементы $p_1, \ldots, p_m$ частично упорядоченного множества P образуют антицепь, если элементы $p_1, \ldots, p_m$ попарно несравнимы.

Теорема 6.3. *Для черепичного порядка A следующие условия равносильны*:

1) *A — наследственное кольцо*;
2) *каждый допустимый A-модуль распадается в прямую сумму неприводимых проективных модулей*;
3) *каждый неприводимый A-модуль имеет ровно один максимальный подмодуль*;
4) *ширина множества $\mathcal{M}(A)$ равна* 1.

Теорема 6.4. *Для черепичного порядка A следующие условия равносильны*:

1) *кольцо эндоморфизмов любого допустимого неразложимого A-модуля — дискретно нормированное кольцо*;
2) *каждый допустимый A-модуль распадается в прямую сумму неприводимых модулей*;
3) *каждый неприводимый A-модуль имеет не более двух максимальных подмодулей*;
4) *ширина множества $\mathcal{M}(A)$ не превосходит* 2.

Описание колец, удовлетворяющих условиям теоремы 6.4, дано в [4]. Введём следующие обозначения:

$$H_n = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad D^0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$H(m,d) = \left(\begin{array}{c|c} H & d \\ \hline 0 & H \end{array}\right), \quad m \geqslant 1, \quad d \geqslant 1.$$

Через D будем обозначать любое кольцо $D = (d_{ij})$, у которого $d_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$, $d_{1n} = 2$, а остальные d_{ij} могут равняться 1 или 2, лишь бы выполнялись кольцевые неравенства $d_{ij} + d_{jk} \geqslant d_{ik}$ $(1 \leqslant i, j, k \leqslant n)$.

Теорема 6.5. *Для черепичного порядка A следующие условия равносильны*:

1) *ширина множества $\mathcal{M}(A)$ не превосходит* 2;
2) *кольцо A изоморфно надкольцу кольца типа D^0 или $H(m,d)$*;
3) *кольцо A эквивалентно в смысле Мориты одному из колец следующих типов*:

а) *черепичные порядки вида*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & H_m & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & 0,1 & & H_{n-m} \\ 0 & \ldots & 0 & \end{array}\right), \quad m \geqslant n-m;$$

б) *черепичные порядки вида* D;

в) *черепичные порядки вида*

$$\left(\begin{array}{cc|c} & D & 0,1 \\ \hline 0 & & \\ \vdots & 0,1 & H \\ 0 & & \end{array}\right).$$

Отметим, что эта теорема приведена в [25, теорема 13.12].

Во всех матрицах а)—в) первый столбец является нулевым.

Имеет место следующее простое предложение.

Предложение 6.6. *Пусть* $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ *— матрица показателей и* $\alpha_{k1} = 0$ *при* $k = 1, \ldots, n$. *Тогда* $\alpha_{ik} \geqslant 0$ *при* $i, k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Из того, что $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ является матрицей показателей, следует, что $\alpha_{ik}+\alpha_{k1} \geqslant \alpha_{i1}$. Из равенства $\alpha_{k1} = \alpha_{i1} = 0$ следует, что $\alpha_{ik} \geqslant 0$. $\square$

Следствие 6.7. *Все элементы в матрицах* а)—в) *теоремы* 6.5 *неотрицательны. Во всех матрицах* б), в) *числа* α_{ij} *не превосходят* 2, *поэтому если* $\alpha_{ij} \geqslant 3$ *в матрице показателей приведённого черепичного порядка ширины* 2, *то эта матрица обязательно имеет вид* а).

Для изучения глобальной размерности черепичных порядков ширины 2 вида а) очень полезной является следующая теорема, доказанная в [18].

Теорема 6.8. *Пусть* A *— черепичный порядок и* e *— идемпотент* A, *причём* eAe *— наследственное кольцо. Тогда* $\mathrm{gl.dim}\, A/I \leqslant \mathrm{gl.dim}\, A \leqslant \mathrm{gl.dim}\, A/I+2$, *где* $I = AeA$. *Такой черепичный порядок* A *имеет конечную глобальную размерность тогда и только тогда, когда* A/I *имеет конечную глобальную размерность.*

Рассмотрим приведённый черепичный порядок A ширины 2 первого типа. Обозначим через e такой идемпотент кольца A, что $eAe = H_m(\mathcal{O})$. Пусть $1 \in A$ и $1 = e + f$. Тогда черепичный порядок A имеет следующее двустороннее пирсовское разложение:

$$A_1 = eAe = H_m(\mathcal{O}), \quad A_2 = fAf = H_{n-m}(\mathcal{O}), \quad X = eAf, \quad Y = fAe.$$

Очевидно,

$$Ae = \begin{pmatrix} eAe & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix}, \quad eA = \begin{pmatrix} eAe & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому
$$I = AeA = \begin{pmatrix} eAe & X \\ Y & YX \end{pmatrix}.$$
Множество YX — двусторонний идеал, лежащий в кольце $H_{n-m}(\mathcal{O})$. Ясно, что $A/I \simeq H_{n-m}(\mathcal{O})/YX$. Кольцо $B = H_{n-m}(\mathcal{O})/YX$ является приведённым полуцепным артиновым кольцом второго типа, $\mathrm{gl.dim}\, B$ и $\mathrm{gl.dim}\, A$ конечны одновременно. Обозначим через R_2 радикал Джекобсона кольца $H_{n-m}(\mathcal{O})$. Из следствия 5.2 получаем следующее предложение.

Предложение 6.9. *Если* $YX \subseteq R_2^{2n-2m}$, *то* $\mathrm{gl.dim}\, A = \infty$.

Из этого предложения следует, что для каждого n существует, с точностью до изоморфизма, конечное число черепичных порядков ширины 2 конечной глобальной размерности. Такая же теорема имеет место и в общем случае.

Теорема 6.10. *Пусть A — первичное нётерово SPSD-кольцо с ненулевым радикалом Джекобсона (A — черепичный порядок), $\mathrm{M}_n(D)$ — его классическое кольцо частных. Для каждого n, с точностью до изоморфизма, существует конечное число черепичных порядков, лежащих в $\mathrm{M}_n(D)$, конечной глобальной размерности.*

Работа была частично поддержана фондами ДФФД и РФФИ, проект № Ф28.1/026.

Литература

[1] Арнольд В. И. Экспериментальное наблюдение математических фактов. — М.: МЦНМО, 2006.

[2] Губарени Н. М., Дрозд Ю. А., Кириченко В. В. Праворядные кольца: Препринт 110. — Киев: Институт электродинамики, Академия наук Украины, 1976.

[3] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В. Конечномерные алгебры. — Киев: Вища школа, 1980.

[4] Завадский А. Г. Строение порядков, над которыми все представления вполне разложимы // Мат. заметки. — 1973. — Т. 13. — С. 325—335.

[5] Завадский А. Г., Кириченко В. В. Модули без кручения над первичными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1976. — Т. 57. — С. 100—116.

[6] Скорняков Л. А. Когда все модули полуцепные? // Мат. заметки — 1969. — Т. 5. — С. 173—182.

[7] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2 — М.: Мир, 1979.

[8] Auslander M. On the dimension of modules and algebras, III. Global dimension // Nagoya Math. J. — 1955. — Vol. 9. — P. 67—77.

[9] Burgess W. D., Fuller K. R., Voss E. R., Zimmermann-Huisgen B. The Cartan matrix as an indicator of finite global dimension for Artinian rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 95. — P. 157—165.

[10] Eizenbud D., Griffith P. The structure of serial rings // Pacific J. Math. — 1971. — Vol. 36. — P. 109—121.

[11] Fujita H. Tiled orders of finite global dimension // Trans. Amer. Math. Soc. — 1990. — Vol. 322. — P. 329—342.

[12] Fujita H. Erratum to «Tiled orders of finite global dimension» // Trans. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 327, no. 2. — P. 919—920.

[13] Goldie A. W. Torsionfree modules and rings // J. Algebra. — 1964. — Vol. 1. — P. 268—287.

[14] Gustafson W. H. Global dimension in serial rings // J. Algebra. — 1985. — Vol. 97. — P. 14—16.

[15] Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras, Rings and Modules. Vol. 1. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2004.

[16] Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras, Rings and Modules. Vol. 2. — Dordrecht: Springer, 2007. — (Math. Its Appl.; Vol. 586).

[17] Jategaonkar V. A. Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 196. — P. 313—330.

[18] Kirkman E., Kuzmanovich J. Global dimensions of a class of tiled order // J. Algebra. — 1989. — Vol. 127. — P. 57—92.

[19] Kupisch H. Beiträge zur Theorie nichthlbeinfacher Ringe mit Minimalbedingung // Crelles J. — 1959. — Vol. 201. — P. 100—112.

[20] Nakayama T. On Frobeniusean algebras, I // Ann. Math. — 1939. — Vol. 40. — P. 611—633.

[21] Nakayama T. Note on uniserial and generalized uniserial rings // Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1940. — Vol. 16 — P. 285—289.

[22] Nakayama T. On Frobeniusean algebras, II // Ann. Math. — 1941. — Vol. 42. — P. 1—21.

[23] Puninski G. Serial Rings. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2001.

[24] Rump W. Discrete posets, cell complexes, and the global dimension of tiled orders // Commun. Algebra. — 1996. — Vol. 24, no. 1. — P. 55—107.

[25] Simson D. Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Categories. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1992. — (Algebra, Logic and Appl.; Vol. 4).

[26] Tarsy R. B. Global dimension of orders // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 151. — P. 335—340.