Изоморфизмы решёток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций

Е. М. ВЕЧТОМОВ
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: vecht@mail.ru

В. В. СИДОРОВ
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: schools@chgk43.ru

УДК 512.556

Ключевые слова: подалгебра полукольца непрерывных функций, решётка подалгебр, решёточный изоморфизм, хьюиттовское пространство.

Аннотация

Описаны решёточные изоморфизмы полуколец $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных функций над произвольным топологическим пространством X. Доказано, что любой изоморфизм решёток всех подалгебр с единицей полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ индуцируется однозначно определённым изоморфизмом самих полуколец. Аналогичный результат верен и для решёток всех подалгебр, за исключением случая двухточечной тихоновизации пространств.

Abstract

E. M. Vechtomov, V. V. Sidorov, Isomorphisms of lattices of subalgebras of semirings of continuous nonnegative functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 63—103.

In this work, lattice isomorphisms of semirings $C^+(X)$ of continuous nonnegative functions over an arbitrary topological space X are characterized. It is proved that any isomorphism of lattices of all subalgebras with a unit of semirings $C^+(X)$ and $C^+(Y)$ is induced by a unique isomorphism of semirings. The same result is also correct for lattices of all subalgebras excepting the case of two-point Tychonovization of spaces.

Введение

Вопросы определяемости топологических пространств производными математическими объектами ставятся в математике достаточно давно. В 1939 г. И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров [6] доказали одну из первых теорем определяемости: произвольный компакт X определяется кольцом $C(X)$ всех заданных на нём непрерывных действительнозначных функций. Эта теорема

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 63—103.

послужила источником и образцом для многочисленных обобщений и углублений как за счёт ослабления ограничений на топологию пространства X, так и за счёт перехода от кольца $C(X)$ к другим функционально-алгебраическим объектам, связанным с X (см. [2]).

Отметим, что классическая теория колец непрерывных функций зародилась в 30-е годы XX века в трудах С. Банаха и М. Стоуна [16]. Большая статья Э. Хьюитта 1948 г. [14] стала основополагающей в становлении теории колец непрерывных действительнозначных функций. Её результаты подытожены в известной монографии Л. Гиллмана и М. Джерисона [12]. Полукольца непрерывных действительнозначных функций представляют собой дальнейший этап в развитии теории колец $C(X)$. Систематическое изучение полуколец непрерывных неотрицательных функций началось в 90-е годы XX столетия (см. [1,4,11]).

В [3] Е. М. Вечтомовым была доказана определяемость любого хьюиттовского пространства X решёткой всех подалгебр кольца $C(X)$. В настоящей работе мы продолжили исследование определяемости произвольного хьюиттовского пространства X, но уже решётками подалгебр полукольца $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных числовых функций на X с поточечными операциями сложения и умножения функций.

Вслед за проблемой определяемости пространств X той или иной алгебраической структурой встаёт задача описания изоморфизмов этих структур. Хьюитт [14] показал, что всякий изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$ над хьюиттовскими пространствами X и Y индуцируется некоторым (единственным) гомеоморфизмом этих пространств. Произвольный изоморфизм решёток всех подалгебр однотипных алгебр называется *решёточным* (или *структурным*) *изоморфизмом* данных алгебр.

Нами решена задача описания решёточных изоморфизмов полуколец $C^+(X)$ для решётки $A(X)$ всех подалгебр и решётки $A_1(X)$ всех подалгебр с единицей в $C^+(X)$. Эти результаты анонсированы в [5, 9].

1. Предварительные сведения

Используемые в данной работе понятия и результаты теории решёток, общей топологии, теории колец непрерывных функций и теории полуколец можно найти в [7, 10, 12, 13].

Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0, 1\rangle$, в которой $\langle S, +, 0\rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S, \cdot, 1\rangle$ — моноид, выполняются законы дистрибутивности операции умножения относительно сложения и тождественно $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$.

Пусть X — топологическое пространство, $\mathbb{R}^+$ — множество всех неотрицательных действительных чисел. Множество всех непрерывных неотрицательных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения функций образует полукольцо $C^+(X)$. На полукольце $C^+(X)$ существуют также операции $\vee$ и $\wedge$:

$$(f\vee g)(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad (f\wedge g)(x)=\min\{f(x),g(x)\}\ \text{ для всех }\ x\in X.$$

Подалгеброй в полукольце $C^+(X)$ называется его произвольное подполукольцо, выдерживающее умножение на числа (константы) из $\mathbb{R}^+$. Простейшими примерами подалгебр служат нулевая подалгебра 0, подалгебра констант $\mathbb{R}^+$ и само полукольцо $C^+(X)$. Обозначим через $A(X)=A\big(C^+(X)\big)$ решётку всех подалгебр полукольца $C^+(X)$ относительно включения $\subseteq$, а через $A_1(X)=A_1\big(C^+(X)\big)$ — её подрешётку, состоящую из всех подалгебр с 1. Решётки $A(X)$ и $A_1(X)$ являются алгебраическими, т. е. полными компактно порождёнными [7, с. 111]. Символ $\subset$ всегда означает строгое включение. Решёточными операциями в $A(X)$ служат $A\wedge B=A\cap B$ и $A\vee B=A+B+AB$, где

$$AB=\Big\{\text{конечная сумма}\sum f_ig_i\colon f_i\in A,\ g_i\in B\Big\}.$$

Минимальные (ненулевые) подалгебры в $C^+(X)$ — это атомы решётки $A(X)$, а максимальные (собственные) подалгебры — её коатомы. Элемент A решётки L с 0 будем называть *предатомом*, если в L существуют ровно два элемента, меньших A: 0 и некоторый атом решётки.

Хаусдорфово пространство X называется *тихоновским*, если для любого замкнутого множества $V\subset X$ и любой точки $x\in X\setminus V$ найдётся такая функция $\lambda\in C^+(X)$, что $\lambda(V)=\{0\}$ и $\lambda(x)=1$. Тихоновские пространства — это, с точностью до гомеоморфизма, подпространства тихоновских степеней числовой прямой $\mathbb{R}$. Топологическое пространство X называется *хьюиттовским*, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени пространства $\mathbb{R}$. Известно [12, теоремы 3.9 и 8.7], что для произвольного топологического пространства X существуют тихоновское пространство τX (называемое иногда *тихоновизацией* пространства X) и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$, для которых канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит, и соответствующие им полукольца $C^+(X)$, $C^+(\tau Z)$ и $C^+(\nu\tau X)$.

Решётки $\langle L,\leqslant\rangle$ и $\langle L',\leqslant\rangle$ изоморфны [7, с. 33], если существует такое взаимно-однозначное отображение α множества L на множество L', что

$$A\leqslant B \text{ в } L \iff \alpha(A)\leqslant\alpha(B) \text{ в } L'.$$

Говорят, что хьюиттовское пространство X *определяется решёткой* $A(X)$, если для любого хьюиттовского пространства Y изоморфность решёток $A(X)$ и $A(Y)$ влечёт гомеоморфность пространств X и Y. Изоморфизм $\alpha\colon C(X)\to C(Y)$ кольца $C(X)$ на кольцо $C(Y)$ *индуцируется гомеоморфизмом* $\varphi\colon X\to Y$ топологических пространств X и Y, если $\alpha(f)(y)=f\big(\varphi(y)\big)$ для любых функции $f\in C(X)$ и точки $y\in Y$.

Заметим, что для всякого топологического пространства X кольцо $C(X)=$ $=C^+(X)-C^+(X)$ есть кольцо разностей полукольца $C^+(X)$, а полукольцо $C^+(X)$ совпадает с множеством всевозможных квадратов элементов кольца

$C(X)$. Поэтому любой изоморфизм полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ однозначно продолжается до изоморфизма колец $C(X)$ и $C(Y)$ и, обратно, любой изоморфизм α колец $C(X)$ и $C(Y)$ является продолжением некоторого единственного изоморфизма — ограничения α на $C^+(X)$ — полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$. Следовательно, задача определяемости произвольного хьюиттовского пространства X полукольцом $C^+(X)$ равносильна задаче определяемости хьюиттовского пространства X кольцом $C(X)$. Для решёток подалгебр в кольцах $C(X)$ и в полукольцах $C^+(X)$ такой явной связи нет.

Множества

$$\mathrm{Z}(f) = \{x \in X \colon f(x) = 0\}, \quad \operatorname{coz} f = X \setminus \mathrm{Z}(f), \quad f \in C(X),$$

называются *нуль-множеством* и *конуль-множеством* соответственно. Топологические пространства считаем тихоновскими ($X = \tau X$), если не оговорено противное.

Напомним *правило знаков Декарта* [8, с. 249]: если мономы многочлена от одной переменной с действительными коэффициентами упорядочены по убыванию показателей степеней, то число положительных корней многочлена равно числу перемен знака между последовательными ненулевыми коэффициентами или на чётное число меньше этого числа. Корни считаются с учётом кратности.

Прямым следствием правила знаков Декарта является следующая технически важная лемма.

Лемма 1.1. *Для функции $f \in C^+(X)$, такой что $1 \in \operatorname{im} f$, верны следующие утверждения*:

а) *пусть $f \notin \mathbb{R}^+$ и*

$$f = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, \quad a_n > 0, \quad n \geqslant 2.$$

Тогда $\operatorname{im} f = \{0, 1\}$, *если* $a_0 = 0$, *и* $\operatorname{im} f = \{r, 1\}$, $r > 0$, *если* $a_0 > 0$;

б) *пусть*

$$f + r = a_1 f + \ldots + a_n f^n, \quad r, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, \quad r > 0, \quad a_n > 0, \quad n \geqslant 1.$$

Тогда $f = 1$. □

Другие специальные термины и обозначения будут вводиться по ходу изложения.

2. Однопорождённые подалгебры

Ключевую роль в работе играют однопорождённые подалгебры. Наименьшую подалгебру $A \in A(X)$, содержащую функцию $f \in C^+(X)$, назовём *однопорождённой* и обозначим $\langle f \rangle$. Она состоит из всевозможных многочленов от f без свободных членов с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$. Подалгебру $[f] = f \vee \mathbb{R}^+ = f + \mathbb{R}^+$ с 1 также будем называть *однопорождённой*.

2.1. Минимальные подалгебры

Пока на топологическое пространство X не накладывается никаких ограничений. Минимальные подалгебры в $C^+(X)$, т. е. атомы решётки $A(X)$, устроены аналогично [3, лемма 1].

Лемма 2.1. *Подалгебра $A \in A(X)$ минимальна тогда и только тогда, когда $A = e\mathbb{R}^+$ для некоторого ненулевого идемпотента $e \in C^+(X)$.*

Доказательство. Очевидно, что подалгебры $e\mathbb{R}^+$, где $e \neq 0$ и $e^2 = e \in C^+(X)$, минимальны. Предположим, что A — минимальная подалгебра на X. Возьмём ненулевую функцию $f \in A$ и рассмотрим подалгебру $\langle f^2 \rangle$. Тогда $A = \langle f^2 \rangle$ и $f = f^2 g$ для подходящего многочлена g от f с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$. Положив $e = fg \in A$, имеем $\mathrm{Z}(e) = \mathrm{Z}(f)$ и $e = 1$ на $\operatorname{coz} f$. Следовательно, $e^2 = e$ и $A = e\mathbb{R}^+$. □

Лемма 2.2. *Для любых различных минимальных подалгебр $A, B \in A(X)$ подалгебра $A \vee B$ включает в себя в точности две или три минимальные подалгебры из $A(X)$.*

Доказательство. Поскольку A и B — различные минимальные подалгебры из $A(X)$, то согласно лемме 2.1 имеем $A = e_1\mathbb{R}^+$ и $B = e_2\mathbb{R}^+$, где e_1 и e_2 — различные ненулевые идемпотенты из $C^+(X)$. Если $\operatorname{coz} e_1 \subset \operatorname{coz} e_2$ или $\operatorname{coz} e_2 \subset \operatorname{coz} e_1$, то подалгебра $A \vee B$ включает в точности две минимальные подалгебры $e_1\mathbb{R}^+$ и $e_2\mathbb{R}^+$. В противном случае она включает три минимальные подалгебры: $e_1\mathbb{R}^+$, $e_2\mathbb{R}^+$, $e_1 e_2\mathbb{R}^+$ (когда $\operatorname{coz} e_1 \cap \operatorname{coz} e_2 \neq \varnothing$) или $e_1\mathbb{R}^+$, $e_2\mathbb{R}^+$, $(e_1 + e_2)\mathbb{R}^+$ (когда $\operatorname{coz} e_1 \cap \operatorname{coz} e_2 = \varnothing$). □

Следствие 2.3. *Минимальная подалгебра $A \in A(X)$ совпадает с $\mathbb{R}^+$ тогда и только тогда, когда для любой минимальной подалгебры $B \in A(X)$, отличной от A, подалгебра $A \vee B$ содержит ровно две минимальные подалгебры из $A(X)$.* □

Подалгебра $\mathbb{R}^+$ решёточно выделяется среди минимальных подалгебр $A(X)$, а значит, решёточно определяется подрешётка $A_1(X)$ решётки $A(X)$.

Лемма 2.4. *Подалгебра $A \in A_1(X)$ является атомом (предатомом) решётки $A_1(X)$ тогда и только тогда, когда $A = [e + 1]$ ($A = [e]$) для подходящего идемпотента $e \in C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$.*

Доказательство. Пусть $A = [e]$ для подходящего идемпотента $e \in C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$. Тогда все функции из A реализуются многочленами не выше первой степени с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$. Подалгебра $B = [e + 1]$ отлична от $\mathbb{R}^+$ и включается в A собственным образом, поскольку не содержит идемпотентов, отличных от 0 и 1. Докажем, что других собственных подалгебр из $A_1(X)$ у A нет, т. е. $[e+1]$ и $[e]$ — атом и предатом решётки $A_1(X)$ соответственно. Для этого покажем, что $[e + r_1] \subseteq [e + r_2]$ для произвольных положительных чисел r_1 и r_2. Последнее верно, поскольку можно подобрать такие $a, b \in \mathbb{R}^+$ и

$n \in \mathbb{N}$, что
$$e + r_1 = a\left(\frac{e + r_2}{1 + r_2}\right)^n + b.$$
В самом деле, записанное равенство равносильно системе
$$\begin{cases} a\left(\dfrac{r_2}{1 + r_2}\right)^n + b = r_1 & \text{на } \mathrm{Z}(e), \\ a + b = 1 + r_1 & \text{на } \mathrm{coz}\, e. \end{cases}$$
Эта система будет совместна, если для подходящих $a, b \in \mathbb{R}^+$ и $n \in \mathbb{N}$ верно
$$\begin{cases} a\left[1 - \left(\dfrac{r_2}{1 + r_2}\right)^n\right] = 1, \\ b = 1 + r_1 - a. \end{cases}$$
Очевидно, можно выбрать значение натурального показателя n таким образом, чтобы числа a и b были положительными, а значит, добиться совместности исходной системы.

Обратно, пусть $B \subset A$, где подалгебры B и A — атом и предатом решётки $A_1(X)$ соответственно. Выберем такую функцию $f \in B \setminus \mathbb{R}^+$, что $1 \in \mathrm{im}\, f$. Поскольку подалгебра B — атом, то $B = [f] = [f^2]$. Следовательно,
$$f = a_0 + a_1 f^2 + \ldots + a_m f^{2m}, \quad a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^+, \quad a_m > 0, \quad m \geqslant 1.$$
Тогда $\mathrm{im}\, f = \{r, 1\}$ в силу леммы 1.1. Если $r = 0$, то $[f+1] \subset B$, что невозможно. Поэтому $r > 0$. Выберем такую функцию $g \in A \setminus B$, что $1 \in \mathrm{im}\, g$. Поскольку A — предатом и $[g] \neq B$, то $A = [g] = [g^2]$. Как и для функции f, получаем, что $\mathrm{im}\, g = \{r, s\}$, $0 \leqslant r < s$. Если $r > 0$, то $[g] = [(s - r)e + r] = [e + 1]$ для идемпотента $e = \frac{g - r}{s - r} \in C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$, т. е. A — атом. Противоречие. Значит, g — идемпотент, отличный от константы. $\square$

Функцию $f \in C^+(X)$, для которой $\sup f = 1$, будем называть *нормированной*. Если множество $X = \{x, y, \ldots, z\}$ конечное, то функцию $f \in C^+(X)$, задающую подалгебру $[f]$, удобно считать нормированной и записывать в виде n-ки $\big(f(x), f(y), \ldots, f(z)\big)$.

Пример 2.5.

I. Если $X = \{x\}$, то $A(X) = \{0, \mathbb{R}^+\}$ и $A_1(X) = \mathbb{R}^+$.

II. Рассмотрим несвязное двоеточие $X = \{x, y\}$. Тогда $C^+(X) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, и решётка $A_1(\{x, y\})$ конечная, так как согласно лемме 2.4 содержит ровно пять однопорождённых подалгебр:
$$[(1,1)] \equiv \mathbb{R}^+, \quad \left[\left(1, \frac{1}{2}\right)\right], \quad \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right], \quad [(1,0)], \quad [(0,1)].$$
Выпишем всевозможные подалгебры вида $[f] \vee [g]$:

1) $[(1,1)] \equiv \mathbb{R}^+$;
2) $[(1, \frac{1}{2})] \equiv \{(r, s) \colon r \geqslant s > 0$ или $r = s = 0\}$;

3) $[(\frac{1}{2},1)] \equiv \{(r,s)\colon 0<r\leqslant s$ или $r=s=0\}$;
4) $[(1,0)] \equiv \{(r,s)\colon r\geqslant s\geqslant 0\}$;
5) $[(0,1)] \equiv \{(r,s)\colon 0\leqslant r\leqslant s\}$;
6) $[(1,\frac{1}{2})]\vee[(\frac{1}{2},1)] \equiv \{(r,s)\colon r>0,\ s>0$ или $r=s=0\}$;
7) $[(1,\frac{1}{2})]\vee[(0,1)] \equiv \{(r,s)\colon r=0$ или $s>0\}$;
8) $[(\frac{1}{2},1)]\vee[(1,0)] \equiv \{(r,s)\colon r>0$ или $s=0\}$;
9) $[(1,0)]\vee[(0,1)] = \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$.

Получаем, что решётка $A_1(\{x,y\})$ девятиэлементная (образована пятью однопорождёнными и четырьмя двупорождёнными подалгебрами) и является прямым произведением двух трёхэлементных цепей.

Приступим к описанию решётки $A(\{x,y\})$. Докажем вспомогательное утверждение: для произвольных подалгебр

$$\langle f\rangle = \langle(1,r_1)\rangle,\quad 0<r_1<1,\qquad \langle g\rangle=\langle(1,r_2)\rangle,\quad 0<r_2<1,$$

верно

$$\langle f\rangle\subset\langle g\rangle \iff r_1<r_2. \tag{2.1}$$

В самом деле, пусть $r_1<r_2$. Выберем натуральный показатель n так, чтобы $r_2^n\leqslant r_1$. Имеем

$$f=\frac{r_1-r_2^n}{r_2-r_2^n}\cdot g+\frac{r_2-r_1}{r_2-r_2^n}\cdot g^n.$$

Тогда $\langle f\rangle\subseteq\langle g\rangle$. Допустим, что $\langle f\rangle=\langle g\rangle$. Тогда

$$g=a_1f+\ldots+a_mf^m,\quad a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{R}^+,\quad a_m>0,\quad m\geqslant 2,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} a_1+\ldots+a_m=1,\\ a_1r_1+\ldots+a_mr_1^m=r_2,\end{cases}$$

которая несовместна, так как

$$r_2=a_1r_1+\ldots+a_mr_1^m<a_1r_1+\ldots+a_mr_1=r_1,$$

хотя $r_1<r_2$. Значит, $\langle f\rangle\subset\langle g\rangle$.

Для произвольных чисел r, r_1, r_2 из интервала $(0,1)$ с учётом соотношения (2.1) имеем:

1) $\langle(0,0)\rangle\equiv 0$;
2) $\langle(1,1)\rangle=[(1,1)]\equiv\mathbb{R}^+$;
3) $\langle(1,r)\rangle\equiv\{(s,t)\colon 0<\frac{t}{s}\leqslant r\}$;
4) $\langle(r,1)\rangle\equiv\{(s,t)\colon 0<\frac{s}{t}\leqslant r\}$;
5) $\langle(1,0)\rangle\equiv\{(s,0)\colon s>0\}$;
6) $\langle(0,1)\rangle\equiv\{(0,t)\colon t>0\}$;
7) $\langle(1,r)\rangle\vee\mathbb{R}^+=[(1,\frac{1}{2})]\equiv\{(s,t)\colon s\geqslant t>0$ или $s=t=0\}$;
8) $\langle(r,1)\rangle\vee\mathbb{R}^+=[(\frac{1}{2},1)]\equiv\{(s,t)\colon 0<s\leqslant t$ или $s=t=0\}$;

9) $\langle(1,0)\rangle \vee \mathbb{R}^+ = [(1,0)] \equiv \{(s,t)\colon s \geqslant t \geqslant 0\}$;
10) $\langle(0,1)\rangle \vee \mathbb{R}^+ = [(0,1)] \equiv \{(s,t)\colon 0 \leqslant s \leqslant t\}$;
11) $\langle(1,r_1)\rangle \vee \langle(r_2,1)\rangle = [(1,\frac{1}{2})] \vee [(\frac{1}{2},1)] \equiv \{(s,t)\colon s > 0,\ t > 0$ или $s = t = 0\}$;
12) $\langle(1,r)\rangle \vee \langle(1,0)\rangle \equiv \{(s,t)\colon 0 \leqslant \frac{t}{s} \leqslant r\}$;
13) $\langle(r,1)\rangle \vee \langle(0,1)\rangle \equiv \{(s,t)\colon 0 \leqslant \frac{s}{t} \leqslant r\}$;
14) $\langle(1,r)\rangle \vee \langle(0,1)\rangle = [(1,\frac{1}{2})] \vee [(0,1)] \equiv \{(s,t)\colon s = 0$ или $t > 0\}$;
15) $\langle(r,1)\rangle \vee \langle(1,0)\rangle = [(\frac{1}{2},1)] \vee [(1,0)] \equiv \{(s,t)\colon s > 0$ или $t = 0\}$;
16) $\langle(1,0)\rangle \vee \langle(0,1)\rangle = [(1,0)] \vee [(0,1)] = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Таким образом, решётка $A(\{x,y\})$, в отличие от её подрешётки $A_1(\{x,y\})$, является бесконечной (континуальной). □

Напомним определения $\vee$-неразложимого (см. [7, с. 75]) и компактного (см. [7, с. 110]) элементов решётки. Элемент A решётки L называется $\vee$-*неразложимым*, если из того, что $A = B \vee C$ для $B, C \in L$, следует, что $A = B$ или $A = C$. Элемент A полной решётки называется *компактным*, если для любого непустого семейства $(A_i)_{i\in J}$ её элементов из того, что $A \leqslant \bigvee_{j\in J} A_j$, следует, что $A \leqslant \bigvee_{i\in I} A_i$ для некоторого конечного подмножества $I \subseteq J$. Очевидно, в решётке $A(X)$ компактность элемента A равносильна его конечнопорождённости.

Решёточное описание однопорождённых подалгебр полукольца $C^+(X)$ даёт следующая теорема.

Теорема 2.6. *Однопорождённые подалгебры из $A(X)$ и $A_1(X)$ — это в точности $\vee$-неразложимые компактные элементы решёток $A(X)$ и $A_1(X)$ соответственно.*

Доказательство. Пусть $[f] = A \vee B$, где $A, B \in A_1(X)$ и $A, B \subset [f]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $1 \in \operatorname{im} f$. Элементами подалгебр A и B служат многочлены от f с неотрицательными коэффициентами и с ненулевым свободным членом или без свободного члена и степени не ниже двух. Поэтому функция f как элемент $A \vee B$ имеет вид

$$f = a_0 + \ldots + a_n f^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, \quad a_n > 0,$$

причём $n \geqslant 2$ в случае $a_0 = 0$. Если $n = 0$ или $n = 1$, то $|\operatorname{im} f| = 1$, а при $n \geqslant 2$ согласно лемме 1.1 имеем $|\operatorname{im} f| \leqslant 2$. Следовательно, подалгебра $[f]$ совпадает с $\mathbb{R}^+$ или в силу леммы 2.4 есть атом или предатом решётки $A_1(X)$. Во всех перечисленных случаях подалгебра $[f]$ $\vee$-неразложима в $A_1(X)$.

Аналогично устанавливается $\vee$-неразложимость подалгебры $\langle f\rangle$ в $A(X)$.

Компактность подалгебр $\langle f\rangle$ и $[f]$ очевидна. Для завершения доказательства осталось заметить, что если любая система образующих конечно порождённой подалгебры содержит больше одного элемента, то такая подалгебра $\vee$-разложима. □

Лемма 2.7. *Коуль-множества различных идемпотентов e_1 и e_2 из $C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$ образуют разбиение пространства X тогда и только тогда, когда* *подалгебра* $[e_1] \vee [e_2]$ *не содержит предатомов решётки* $A_1(X)$*, отличных от* $[e_1]$ *и* $[e_2]$*, и для произвольного предатома* $[e_3]$ *решётки* $A_1(X)$*, отличного от* $[e_1]$ *и* $[e_2]$*, неверны включения* $[e_1] \subset [e_2] \vee [e_3]$ *и* $[e_2] \subset [e_1] \vee [e_3]$.

Доказательство. Пусть коnуль-множества различных идемпотентов e_1 и e_2 из $C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$ образуют разбиение X. Тогда подалгебра $[e_1] \vee [e_2]$ не включает предатомов решётки $A_1(X)$, отличных от $[e_1]$ и $[e_2]$. Допустим, что нашёлся предатом $[e_3] \in A_1(X)$, отличный от $[e_1]$ и $[e_2]$, такой что $[e_1] \subset [e_2] \vee [e_3]$. Тогда $\operatorname{coz} e_2 \cap \operatorname{coz} e_3 = \varnothing$, поскольку $\operatorname{coz} e_1 \cap \operatorname{coz} e_2 = \varnothing$. Следовательно, $\operatorname{coz} e_3 \subset \operatorname{coz} e_1$. Поэтому $\mathrm{Z}(e_2) \cap \mathrm{Z}(e_3) \cap \operatorname{coz} e_1 \neq \varnothing$, что противоречит $[e_1] \subset [e_2] \vee [e_3]$. Аналогично устанавливается невозможность включения $[e_2] \subset [e_1] \vee [e_3]$.

Обратно, пусть подалгебра $[e_1] \vee [e_2]$ не включает предатомов решётки $A_1(X)$, отличных от $[e_1]$ и $[e_2]$. Тогда если коnуль-множества идемпотентов e_1 и e_2 не образуют разбиения X, то $\operatorname{coz} e_1 \subset \operatorname{coz} e_2$ или $\operatorname{coz} e_2 \subset \operatorname{coz} e_1$. В обоих случаях для предатома $[e_3] = [|e_1 - e_2|] \in A_1(X)$, отличного от $[e_1]$ и $[e_2]$, верно одно из следующих включений: $[e_1] \subset [e_2] \vee [e_3]$ или $[e_2] \subset [e_1] \vee [e_3]$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Для предатома $[e] \in A_1(X)$, соответствующего идемпотенту $e \in C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$, лемма 2.7 позволяет решёточно выделить предатом $[1 - e] \in A_1(X)$.

Лемма 2.8. *Для различных идемпотентов* e_1 *и* e_2 *из* $C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$*, коnуль-множества* $\operatorname{coz} e_1$ *и* $\operatorname{coz} e_2$ *которых не образуют разбиение* X*,* $\operatorname{coz} e_1 \cap \operatorname{coz} e_2 = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда подалгебры* $[e_1] \vee [e_2]$ *и* $[e_1] \vee [1 - e_2]$ *включают три и два предатома решётки* $A_1(X)$ *соответственно.*

Доказательство. Пусть e_1 и e_2 из $C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$, коnуль-множества $\operatorname{coz} e_1$ и $\operatorname{coz} e_2$ не образуют разбиения X и $\operatorname{coz} e_1 \cap \operatorname{coz} e_2 = \varnothing$. Тогда подалгебра $[e_1] \vee [e_2]$ включает три предатома решётки $A_1(X)$: $[e_1]$, $[e_2]$ и $[e_1 + e_2]$, а подалгебра $[e_1] \vee [1 - e_2]$ — ровно два, поскольку $\operatorname{coz} e_1 \subset \operatorname{coz}(1 - e_2)$.

Обратно, пусть подалгебры $[e_1] \vee [e_2]$ и $[e_1] \vee [1 - e_2]$ включают три и два предатома решётки $A_1(X)$ соответственно. Первое означает, что $\operatorname{coz} e_1 \cap \operatorname{coz} e_2 = \varnothing$ или $\operatorname{coz} e_1 \cap \operatorname{coz} e_2 \subset \operatorname{coz} e_1$ и $\operatorname{coz} e_1 \cap \operatorname{coz} e_2 \neq \varnothing$. Последнее невозможно, так как тогда подалгебра $[e_1] \vee [1 - e_2]$ включала бы три предатома: $[e_1]$, $[1 - e_2]$, $[e_1(1 - e_2)]$. □

Лемма 2.9. *Коnуль-множества идемпотентов* $e_1, \ldots, e_n \in C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$ *образуют разбиение* X *тогда и только тогда, когда они попарно дизъюнктны, но при добавлении любого другого идемпотента* $e \in C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$ *свойство дизъюнктности коnуль-множеств нарушается.* □

При $f \in C^+(X)$ подалгебру $\langle f \rangle$, а также $[f]$ будем называть n*-значной* (n — натуральное число), если $|\operatorname{im} f| = n$, и *конечнозначной* (*бесконечнозначной*), если образ $\operatorname{im} f$ конечен (бесконечен). Функцию f и соответствующие ей подалгебры $\langle f \rangle$ и $[f]$ будем называть *многозначными*, если $|\operatorname{im} f| \geqslant 3$. Множества $\langle 0 \rangle = \{0\}$ и $\mathbb{R}^+ = [0] = [1] = \langle 1 \rangle$ являются единственными однозначными (1-значными) подалгебрами в $C^+(X)$.

Лемма 2.4 решёточно выделяет двухзначные однопорождённые подалгебры решётки $A_1(X)$ среди всех её однопорождённых подалгебр: это её атомы и предатомы. С учётом теоремы 2.6 и лемм 2.8 и 2.9 это даёт решёточную характеризацию n-значных подалгебр этой решётки.

Лемма 2.10. *Подалгебра $[f]$ n-значна тогда и только тогда, когда условие $[f] \subseteq [e_1] \vee \ldots \vee [e_m]$ для m ненулевых идемпотентов $e_1, \ldots, e_m$, конуль-множества которых образуют разбиение X, влечёт $m \geqslant n$.*

Доказательство. Пусть $[f]$ — n-значная подалгебра и $\operatorname{im} f = \{r_1, \ldots, r_n\}$. Открыто-замкнутые множества $f^{-1}(r_i)$, $i = 1, \ldots, n$, образуют разбиение X и $f = r_1e_1 + \ldots + r_ne_n$, где $e_i \in C^+(X)$, $e_i(\{f^{-1}(r_i)\}) = \{1\}$ и $e_i(X \setminus \{f^{-1}(r_i)\}) = \{0\}$. Поэтому $[f] \subseteq [e_1] \vee \ldots \vee [e_n]$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что если конуль-множества попарно различных идемпотентов $e'_1, \ldots, e'_m \in C^+(X)$ образуют разбиение X, то все функции подалгебры $[e'_1] \vee \ldots \vee [e'_m]$ не более чем m-значны. Поэтому включение $[f] \subseteq [e'_1] \vee \ldots \vee [e'_m]$ влечёт $m \geqslant n$. □

Из леммы 2.10 выводим следующее утверждение.

Предложение 2.11. *Для произвольной функции $f \in C^+(X)$ мощность $|\operatorname{im} f|$ множества значений может быть установлена решёточными свойствами подалгебры $\langle f \rangle$ или $[f]$ в решётке $A(X)$ или $A_1(X)$ соответственно.* □

Очевидно, что пропорциональность функций f и g из $C^+(X)$ влечёт $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ и $[f] = [g]$.

Лемма 2.12. *Для многозначных функций $f, g \in C^+(X)$*

$$\langle f \rangle = \langle g \rangle \iff [f] = [g] \iff f = kg \text{ для некоторого числа } k > 0.$$

Доказательство. Пусть $[f] = [g]$ и $|\operatorname{im} f| \geqslant 3$. Равенство подалгебр означает, что $f = Q(g)$ и $g = P(f)$, где Q и P — многочлены с неотрицательными коэффициентами. Поэтому $f = (Q \circ P)(f)$. Если многочлены Q и P отличны от мономов первой степени, то многочлен $Q \circ P$ не константа и не моном первой степени. Можно считать, что $1 \in \operatorname{im} f$. Тогда $|\operatorname{im} f| \leqslant 2$ по лемме 1.1, что противоречит условию $|\operatorname{im} f| \geqslant 3$. Значит, функции f и g пропорциональны.

Пропорциональность функций f и g в случае, когда $\langle f \rangle = \langle g \rangle$, доказывается аналогично. □

2.2. sp-, b-, u- и z-подалгебры

Подалгебру $A \in A(X)$ назовём

— *sp-подалгеброй*, если любая ненулевая функция $f \in A$ строго положительна, т. е. $\inf f > 0$;
— *b-подалгеброй*, если все её функции являются ограниченными сверху;
— *u-подалгеброй*, если нуль-множества всех её ненулевых функций пустые;

— *z-подалгеброй*, если каждая её функция представима в виде $g + r$, где $r \in \mathbb{R}^+$ и $g \in A$ имеет непустое нуль-множество.

Ясно, что все sp-подалгебры являются u-подалгебрами, а в случае компакта X (т. е. компактного хаусдорфова пространства) верно и обратное, при этом все подалгебры будут b-подалгебрами. $\mathbb{R}^+$ — единственная подалгебра в $A(X)$, являющаяся u-, z-подалгеброй.

Предложение 2.13. *Для функции $f \in C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$ верны следующие утверждения*:

1) $[f]$ — *u-подалгебра тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Z}(f) = \varnothing$;
2) $[f]$ — *z-подалгебра тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Z}(f) \neq \varnothing$, *что справедливо тогда и только тогда, когда* $[f]$ *не u-подалгебра.* □

Заметим, что подалгебра $A \in A_1(X)$ обладает свойством P (быть sp-, b- или u-подалгеброй) тогда и только тогда, когда любая $[f] \subseteq A$ обладает свойством P; подалгебра $A \in A_1(X)$ будет z-подалгеброй тогда и только тогда, когда любая $[f] \subseteq A$ включается в некоторую z-подалгебру $[g] \in A$. Таким образом, свойство $A \in A_1(X)$ быть z-подалгеброй не является наследственным, в отличие от свойств быть sp-, b- или u-подалгеброй. Это верно и для подалгебр решётки $A(X)$.

Покажем, что свойства подалгебры $[f]$ быть sp-подалгеброй, b-подалгеброй, u-подалгеброй, z-подалгеброй являются решёточными. В случае конечнозначных $[f]$ задачу решает следующее предложение.

Предложение 2.14. *Для конечнозначной подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}^+$ справедливы следующие утверждения*:

1) $[f]$ — *b-подалгебра*;
2) $[f]$ — *sp-подалгебра тогда и только тогда, когда* $[f] \subseteq [f_1] \vee \ldots \vee [f_n]$ *для конечного числа атомов* $[f_1], \ldots, [f_n]$;
3) $[f]$ — *u-подалгебра тогда и только тогда, когда* $[f]$ — *sp-подалгебра*;
4) $[f]$ — *z-подалгебра тогда и только тогда, когда* $[f]$ *не sp-подалгебра.*

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь второе утверждение.

Пусть $[f]$ — конечнозначная подалгебра, отличная от $\mathbb{R}^+$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\operatorname{im} f = \{r_1, \ldots, r_n\}$, где $0 < r_1 < \ldots < r_n < 1$ и $n \geqslant 2$. Тогда $f = \prod\limits_{i=1}^{n} f_i$, где

$$f_i = \begin{cases} r_i & \text{на } f^{-1}(r_i), \\ 1 & \text{на } X \setminus f^{-1}(r_i). \end{cases}$$

Каждая функция f_i является непрерывной, двухзначной и положительной, а потому в силу леммы 2.4 $[f_i]$ — атом решётки $A_1(X)$.

Обратное очевидно. □

Решёточную характеризацию бесконечнозначных sp-подалгебр $[f]$ даёт следующее предложение.

Предложение 2.15. *Бесконечнозначная подалгебра $[f]$ является sp-подалгеброй тогда и только тогда, когда*

$$[f] \subset \ldots \subset [f_{i+1}] \subset [f_i] \subset \ldots \subset [f_1]$$

для счётного числа некоторых подалгебр $[f_i]$, $i \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $[f]$ — бесконечнозначная sp-подалгебра. Выберем $r > 0$ так, чтобы $\inf f > r$. Для каждого натурального номера i положим $f_i = f - r + s_i$, где s_i — i-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{r}{2^k}$. Тогда функция f_i принадлежит $C^+(X)$ и бесконечнозначна вместе с f. Разности $f - f_i$ и $f_i - f_j$, $i > j$, — положительные константы, а потому бесконечнозначные функции f, f_i и f_j попарно не пропорциональны. Согласно лемме 2.12 это означает, что $[f] \subset [f_i]$ и $[f_i] \subset [f_j]$.

Обратно, пусть для бесконечнозначной подалгебры $[f]$ нашлось счётное число таких подалгебр $[f_i]$, $i \in \mathbb{N}$, что

$$[f] \subset \ldots \subset [f_{i+1}] \subset [f_i] \subset \ldots \subset [f_1].$$

Допустим, среди подалгебр $[f], [f_1], \ldots, [f_i], [f_{i+1}], \ldots$ нет sp-подалгебр. Тогда из $[f] \subset [f_1]$ и $f_{i+1} \subset [f_i]$ получаем

$$f = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_1^n, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, \quad a_n > 0, \quad n \geqslant 2,$$
$$f_{i+1} = b_1 f_i + \ldots + b_m f_i^m, \quad b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^+, \quad b_m > 0, \quad m \geqslant 2.$$

Поэтому функция f_n реализуется ненулевым многочленом от f_1 степени не ниже 2^{n-1}. Получается, что функция f, будучи многочленом от f_n степени не ниже 2, представима ненулевым многочленом от f_1 степени не ниже $2^n > n$. Последнее невозможно ввиду бесконечнозначности f. Значит, подалгебра $[f]$ включается в некоторую sp-подалгебру, т. е. сама является sp-подалгеброй. □

Получим описание бесконечнозначных b-подалгебр.

Предложение 2.16. *$[f]$ является b-подалгеброй тогда и только тогда, когда любая sp-подалгебра $[g] \subseteq [f]$ является b-подалгеброй.* □

Таким образом, для описания бесконечнозначных b-подалгебр $[f]$ достаточно описать бесконечнозначные sp-, b-подалгебры $[f]$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.17.

1. *Для многозначной не sp-подалгебры $[f]$ sp-подалгебра $[g] \subset [f]$ имеет вид $[f + r]$, $r > 0$, если и только если $[g] \not\subseteq [l]$ для любой не sp-подалгебры $[l] \subset [f]$.*
2. *Для многозначной sp-подалгебры $[f]$ sp-подалгебра $[g] \subset [f]$ имеет вид $[f + r]$, $r > 0$, если и только если найдётся такая многозначная не sp-подалгебра $[h]$, что $[f] \subset [h]$, $[f] \not\subseteq [l]$ и $[g] \not\subseteq [l]$ для любой не sp-подалгебры $[l] \subset [h]$.*

Доказательство. 1. Пусть $[f]$ — многозначная не sp-подалгебра. Не ограничивая общности, можно считать, что $1 \in \operatorname{im} f$. Все функции произвольной не sp-подалгебры $[l] \subset [f]$ реализуются многочленами степени не ниже 2 от f с неотрицательными коэффициентами. Согласно лемме 1.1 для произвольного числа $r > 0$ среди них нет функции $f + r$.

Обратно, пусть $[g] \subset [f]$ и $[g] \nsubseteq [l]$ для любой не sp-подалгебры $[l] \subset [f]$. Функция g равна

$$g = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, \quad a_n > 0, \quad n \geqslant 1.$$

Поскольку $\inf g > 0$ и $\inf f = 0$, то $a_0 > 0$. Допустим, $n \geqslant 2$. Положим

$$l = a_1 f + \ldots + a_n f^n.$$

Тогда $[l]$ не sp-подалгебра, $[l] \subset [f]$ и $[g] \subset [l]$ в силу леммы 2.12, что противоречит условию. Значит, $[g] = [f + r]$ для подходящего числа $r > 0$.

2. Пусть $[f]$ — многозначная sp-подалгебра и $[f + r] \subset [f]$ для некоторого числа $r > 0$. Положим $h = f - \inf f$. Тогда $[h]$ — многозначная не sp-подалгебра и $[f] \subset [h]$ по лемме 2.12. Так как $f = h + \inf f$ и $g = h + \inf f + r$, то согласно пункту 1 в подалгебре $[h]$ нет собственных однопорождённых не sp-подалгебр, включающих $[f]$ и $[f + r]$.

Обратно, пусть $[g] \subset [f]$ и нашлась многозначная не sp-подалгебра $[h]$, такая что $[f] \subset [h]$ и $[f] \nsubseteq [l]$, $[g] \nsubseteq [l]$ для любой не sp-подалгебры $[l] \subset [h]$. Тогда согласно пункту 1 подалгебра $[f]$ имеет вид $[h + r']$ для подходящего числа $r' > 0$. Допустим, $[g] \neq [f + r]$ для любого числа $r > 0$. Это означает, что функция g представима многочленом $P(f)$ степени не ниже 2 с неотрицательными коэффициентами. Поскольку $f = h + r'$, то

$$g = P(h+r') = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, \quad a_0 > 0, \quad a_n > 0, \quad n \geqslant 2.$$

Положим

$$l = a_1 h + \ldots + a_n h^n.$$

Тогда $[l]$ — многозначная не sp-подалгебра, и $[l] \subset [h]$ в силу леммы 2.12. Имеем $[g] \subset [l] \subset [h]$, что противоречит условию. Значит, $[g] = [f + r]$ для подходящего числа $r > 0$. □

Предложение 2.18. *Для бесконечнозначной sp-подалгебры $[f]$ эквивалентны следующие условия:*

1) *$[f]$ не b-подалгебра;*
2) *существует бесконечнозначная не sp-подалгебра $[g]$, такая что*
   а) *все однопорождённые не sp-подалгебры из $[f] \vee [g]$ включены в $[g]$;*
   б) *включение $[f] \subseteq [f_1] \vee \ldots \vee [f_n] \vee [g]$ неверно для конечного числа произвольных двухзначных подалгебр $[f_1], \ldots, [f_n]$ (утверждение справедливо и при $n = 0$);*
   в) *найдутся такие подалгебра $[l] \subset [f]$, где l — многочлен от f степени не ниже 2 с неотрицательными коэффициентами, и число $r > 0$, что $[f + r] \subseteq [l] \vee [g]$.*

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству, отметим, что в силу леммы 2.17 условие в) решёточное; для условий а) и б) это очевидно.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Положим $g = f^{-1}$ и докажем, что подалгебра $[f^{-1}]$ искомая. В самом деле, бесконечнозначность f^{-1} вытекает из бесконечнозначности f, а равенство $\inf f^{-1} = 0$ следует из неограниченности сверху функции f.

а) Произвольная функция $h \in [f] \vee [f^{-1}]$ имеет вид

$$h = a_0 + b_1 f + \ldots + b_n f^n + c_1 f^{-1} + \ldots + c_m (f^{-1})^m, \quad a_0, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}^+.$$

Поэтому равенство $\inf h = 0$ ввиду $\inf f > 0$ возможно лишь тогда, когда $a_0 = b_1 = \ldots = b_n = 0$.

б) Допустим, что нашлись двухзначные подалгебры $[f_1], \ldots, [f_n]$, $n \geqslant 1$, такие что

$$[f] \subseteq [f_1] \vee \ldots \vee [f_n] \vee [f^{-1}], \quad \operatorname{im} f_i = \{r_{i1}, r_{i2}\} \text{ для } i = 1, \ldots, n.$$

Тогда всевозможные замкнутые множества вида

$$X_{j_1, \ldots, j_n} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(r_{ij_i}), \quad j_1, \ldots, j_n \in \{1, 2\},$$

образуют конечное разбиение X и на каждом из них функции $f_1, \ldots, f_n$ постоянны. Поэтому

$$f = a_0 + a_1 f^{-1} + \ldots + a_m (f^{-1})^m \text{ на } X_{j_1, \ldots, j_n}, \quad a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно,

$$f^{m+1} = a_0 f^m + a_1 f^{m-1} + \ldots + a_m \text{ на } X_{j_1, \ldots, j_n}, \quad a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^+.$$

Видим, что функция f на каждом множестве $X_{j_1, \ldots, j_n}$ конечного разбиения X является конечнозначной, что невозможно ввиду её бесконечнозначности. Аналогичными рассуждениями показывается, что включение $[f] \subseteq [f^{-1}]$ влечёт конечнозначность функции f.

в) Рассмотрим подалгебру $[f + f^2] \subset [f]$. Очевидно, $[f + 1] \subseteq [f + f^2] \vee [f^{-1}]$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Допустим, что существует такая бесконечнозначная не sp-подалгебра $[g]$, что выполняются условия а)—в), но $[f]$ — b-подалгебра. Так как функция f является ограниченной сверху и $\inf g = 0$, то $\inf(fg) = 0$, а потому в силу пункта а)

$$fg = a_0 + a_1 g + \ldots + a_n g^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+.$$

Поскольку $\inf f > 0$, $\inf g = 0$ и функция g бесконечнозначная, то $a_0 = 0$, $a_n > 0$, $n \geqslant 1$. Следовательно, на $\operatorname{coz} g$ функция f равна

$$f = a_1 + \ldots + a_n g^{n-1}. \tag{2.2}$$

Согласно пункту б) $f \notin [g]$. Поэтому $\mathrm{Z}(g) \neq \varnothing$.

Докажем, что на $\mathrm{Z}(g)$ функция f однозначная или двухзначная. Для этого обратимся к условию в). Так как $l \in [f]$, то функция l является ограниченной сверху. Поэтому с учётом условия а) имеем

$$f + r = r' + P(l) + Q(g), \quad r' \in \mathbb{R}^+,$$

где P и Q — многочлены без свободных членов с неотрицательными коэффициентами. Допустим, что $P = 0$. Тогда $f = r' - r + Q(g)$, причём $r' - r > 0$, так как $\inf g = 0$, $\inf f > 0$. Получаем, что $f \in [g]$, что противоречит условию б). Итак, многочлен $P(l)$ ненулевой и как многочлен от f имеет степень не ниже 2. Не ограничивая общности, можно считать, что $1 \in \operatorname{im} f$. Тогда по лемме 1.1 на $\mathrm{Z}(g)$ функция f принимает не более двух различных значений.

I. Пусть $\operatorname{im} f = \{r_1, r_2\}$, $r_1 \neq r_2$ на $\mathrm{Z}(g)$ ($r_1, r_2 > 0$, так как $\inf f > 0$). Замкнутые множества $X_1 = f^{-1}(r_1) \cap \mathrm{Z}(g)$ и $X_2 = f^{-1}(r_2) \cap \mathrm{Z}(g)$ образуют разбиение $\mathrm{Z}(g)$.

Если множество $\operatorname{coz} g$ открыто-замкнуто, то положим

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{на } \mathrm{Z}(g), \\ 1 & \text{на } \operatorname{coz} g, \end{cases} \qquad \lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{на } X \setminus X_i, \\ r_i & \text{на } X_i \end{cases} \qquad \text{для} \quad i = 1, 2.$$

Тогда λ, λ_1, λ_2 — двухзначные функции из $C^+(X)$. С учётом равенства (2.2) получаем, что

$$f = \lambda_1 + \lambda_2 + (a_1 + \ldots + a_n g^{n-1})\lambda,$$

что противоречит условию б).

Рассмотрим случай, когда множество граничных точек $\operatorname{coz} g$ непусто. Равенство (2.2) показывает, что на $\overline{\operatorname{coz} g} \setminus \operatorname{coz} g$ функция f принимает значение a_1. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1 = r_1$, т. е. $\overline{\operatorname{coz} g} \setminus \operatorname{coz} g \subseteq X_1$. Следовательно, множество $X \setminus X_2$ замкнуто. Положим

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{на } X_2, \\ 1 & \text{на } X \setminus X_2, \end{cases} \qquad \lambda_2 = \begin{cases} 0 & \text{на } X \setminus X_2, \\ r_2 & \text{на } X_2. \end{cases}$$

Тогда λ, λ_2 — двухзначные функции из $C^+(X)$. С учётом равенства (2.2) получаем, что

$$f = \lambda_2 + (a_1 + \ldots + a_n g^{n-1})\lambda,$$

что противоречит условию б).

II. Пусть теперь $\operatorname{im} f = \{r_1\}$ на $\mathrm{Z}(g)$ ($r_1 > 0$, так как $\inf f > 0$).

Если множество $\operatorname{coz} g$ открыто-замкнуто, положим

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{на } \mathrm{Z}(g), \\ 1 & \text{на } \operatorname{coz} g, \end{cases} \qquad \lambda_1 = \begin{cases} 0 & \text{на } \operatorname{coz} g, \\ r_1 & \text{на } \mathrm{Z}(g). \end{cases}$$

Тогда λ, λ_1 — двухзначные функции из $C^+(X)$. С учётом равенства (2.2) получаем, что

$$f = \lambda_1 + (a_1 + \ldots + a_n g^{n-1})\lambda,$$

что противоречит условию б).

В случае когда множество граничных точек $\operatorname{coz} g$ непусто, необходимо $r_1 = a_1$. Поэтому $f = a_1 + \ldots + a_n g^{n-1}$, что вновь противоречит условию б).

Значит, $[f]$ не b-подалгебра. □

Итак, решёточно охарактеризованы sp-подалгебры $[f]$ и b-подалгебры $[f]$. Приступим к описанию бесконечнозначных u-подалгебр. Поскольку любая sp-подалгебра является u-подалгеброй, то остаётся описать бесконечнозначные u-подалгебры $[f]$, не являющиеся sp-подалгебрами. Для этого мы среди бесконечнозначных не sp-подалгебр $[f]$ вначале опишем подалгебры, являющиеся b- и u-подалгебрами, а затем u-подалгебры, не являющиеся b-подалгебрами.

Предложение 2.19. *Для бесконечнозначной b-подалгебры $[f]$, не являющейся u-подалгеброй, эквивалентны следующие условия*:

1) $[f]$ — *u-подалгебра*;
2) *существует бесконечнозначная sp-подалгебра $[g]$, не являющаяся b-подалгеброй, такая что*
   а) *все однопорождённые не sp-подалгебры из $[f] \vee [g]$ включены в $[f]$*;
   б) *найдутся такие подалгебра $[l] \subset [g]$, где l — многочлен от g степени не ниже 2 с неотрицательными коэффициентами, и число $r > 0$, что $[g + r] \subseteq [l] \vee [f]$.*

Доказательство. Заметим, что согласно лемме 2.17 условие б) имеет решёточную характеризацию.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $[f]$ — бесконечнозначная подалгебра, не являющаяся sp-подалгеброй, но являющаяся b- и u-подалгеброй. Тогда $[f^{-1}]$ — бесконечнозначная sp-подалгебра, не являющаяся b-подалгеброй. Покажем, что для $[g] = [f^{-1}]$ выполняются условия а) и б).

а) Произвольная функция $h \in [f] \vee [f^{-1}]$ имеет вид

$$h = a_0 + b_1 f + \ldots + b_n f^n + c_1 f^{-1} + \ldots + c_m (f^{-1})^m, \quad a_0, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, l_m \in \mathbb{R}^+.$$

Поэтому равенство $\inf h = 0$ ввиду $\inf f^{-1} > 0$ возможно лишь тогда, когда $a_0 = c_1 = \ldots = c_m = 0$, т. е. $[h] \subseteq [f]$.

б) Рассмотрим подалгебру $[f^{-2}] \subset [f^{-1}]$. Очевидно, $[f^{-1}+1] \subset [f^{-2}] \vee [f+f^2]$.

Докажем импликацию 2) $\Longleftarrow$ 1). Допустим, существует бесконечнозначная sp-подалгебра $[g]$, не являющаяся b-подалгеброй, такая что условия а) и б) выполняются, но $[f]$ не u-подалгебра. Согласно пункту б) $g + r \in [l] \vee [f]$ для некоторого числа $r > 0$. Поэтому

$$g + r = r' + P_0(l) + Q_0(f) + P_1(l)Q_1(f) + \ldots + P_n(l)Q_n(f),$$

где P_i и Q_i — многочлены без свободных членов с неотрицательными коэффициентами, $r' \in \mathbb{R}^+$. Так как $P_i(l)Q_i(f) = 0$ на $\mathrm{Z}(f)$, то $P_i(l)Q_i(f) \in [f]$ согласно пункту а). Следовательно,

$$g + r = r' + P_0(l) + Q(f), \tag{2.3}$$

где Q — многочлен без свободного члена с неотрицательными коэффициентами, $P_0 \neq 0$, так как функция f является ограниченной сверху, в отличие от g. По условию функция l есть многочлен от g степени не ниже 2. Поэтому многочлен $P_0(l)$ как многочлен от g содержит моном $a_k g^k$, $a_k > 0$, $k \geqslant 2$. В силу неограниченности функции g сверху найдётся такая точка $x_0 \in X$, что $a_k g^k(x_0) > g(x_0) + r$. Следовательно, равенство (2.3) в точке x_0 не выполняется. Противоречие. Значит, $[f]$ — u-подалгебра. □

Опираясь на доказанное предложение, охарактеризуем бесконечнозначные u-подалгебры $[f]$, не являющиеся ни sp-, ни b-подалгебрами.

Предложение 2.20. *Бесконечнозначная подалгебра $[f]$, не являющаяся ни sp-, ни b-подалгеброй, будет u-подалгеброй, если и только если для произвольной b- и u-подалгебры $[g]$ все однопорождённые b-подалгебры, не являющиеся sp-подалгебрами, из $[f] \vee [g]$ будут u-подалгебрами.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Доказательство достаточности проведём методом от противного. Пусть для произвольной b- и u-подалгебры $[g]$ все однопорождённые b-подалгебры, не являющиеся sp-подалгебрами, из $[f] \vee [g]$ будут u-подалгебрами, но бесконечнозначная подалгебра $[f]$, не являющаяся ни b-, ни sp-подалгеброй, будет z-подалгеброй. Для функции из $C^+(X)$

$$g = \begin{cases} 1 & \text{на } \{x \in X \colon f(x) \leqslant 1\}, \\ f^{-1} & \text{на } \{x \in X \colon f(x) > 1\} \end{cases}$$

необходимо $\inf g = 0$, поскольку f является неограниченной сверху. Тогда подалгебра $[fg] \in [f] \vee [g]$ является b- и z-подалгеброй, что невозможно. □

Итогом предложений 2.13—2.20 служит следующая принципиально важная теорема.

Теорема 2.21. *Свойства подалгебры решётки $A_1(X)$ быть sp-подалгеброй, b-подалгеброй, u-подалгеброй или z-подалгеброй являются решёточными.* □

Следствие 2.22. *Свойства подалгебры решётки $A(X)$ быть sp-подалгеброй, b-подалгеброй, u-подалгеброй или z-подалгеброй также являются решёточными.* □

3. Определяемость

С каждой точкой $x \in X$ естественным образом связана подалгебра

$$M_x = \{f \in C^+(X) \colon f(x) = 0\} \in A(X)$$

всех функций из $C^+(X)$, равных нулю в этой точке. Подалгебра

$$M_x \vee \mathbb{R}^+ = M_x + \mathbb{R}^+ \in A_1(X)$$

образована всеми функциями $C^+(X)$, принимающими в точке x наименьшее значение.

Предложение 3.1. *Для подалгебры $M_x+\mathbb{R}^+$ справедливы следующие утверждения*:

а) *для произвольных z-подалгебр $[f], [g] \subset M_x+\mathbb{R}^+$, отличных от $\mathbb{R}^+$, и произвольной подалгебры $[h] \subseteq [f]\vee[g]$ найдётся z-подалгебра $[l] \subseteq [f]\vee[g]$, включающая $[h]$*;

б) *для произвольной z-подалгебры $[f] \subset M_x+\mathbb{R}^+$, $[f] \neq \mathbb{R}^+$, и произвольной sp-подалгебры $[g]$ каждая z-подалгебра $[h] \subseteq [f]\vee[g]$ включается в $M_x+\mathbb{R}^+$*;

в) $\mathrm{Z}(e_1) \cap \mathrm{Z}(e_2) \neq \varnothing$ *для произвольных предатомов $[e_1], [e_2] \subset M_x+\mathbb{R}^+$*;

г) *каждая подалгебра $[f] \subset M_x+\mathbb{R}^+$ включается в некоторую z-подалгебру $[g] \subset M_x+\mathbb{R}^+$.*

Доказательство. Функция $h \in [f] \vee [g]$ имеет вид

$$h = r + P_0(f) + Q_0(g) + P_1(f)Q_1(g) + \ldots + P_n(f)Q_n(g),$$

где P_i, Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами без свободных членов, $r \in \mathbb{R}^+$.

а) Положим

$$l = P_0(f) + Q_0(g) + P_1(f)Q_1(g) + \ldots + P_n(f)Q_n(g).$$

Тогда $[h] \subseteq [l]$, причём $l(x) = 0$, так как по условию $f(x) = g(x) = 0$.

б) Если $[g] = \mathbb{R}^+$, то доказывать нечего. Пусть sp-подалгебра $[g]$ отлична от $\mathbb{R}^+$. Поскольку $\inf h = 0$, то $r = Q_0 = 0$. Так как $f(x) = 0$, то и $h(x) = 0$.

Утверждения в) и г) очевидны. □

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть X — компакт. Тогда никакая подалгебра $A \in A_1(X)$, для которой верны условия* а)—в) *предложения* 3.1, *не содержит функций f и g, таких что $\mathrm{Z}(f) \neq \varnothing$, $\mathrm{Z}(g) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Z}(f) \cap \mathrm{Z}(g) = \varnothing$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, можно считать, что существуют такие подалгебра A со свойствами а)—в), функции $f, g \in A$ и точки $x, y \in X$, что

$$\mathrm{Z}(f) \cap \mathrm{Z}(g) = \varnothing, \quad f(x) = g(y) = 0, \quad f(y) = g(x) = 1.$$

Докажем, что $f+g \geqslant 1$. Если $f+g = 1$, то доказывать нечего. Пусть $f+g =\neq 1$. Функция $f+g$ является строго положительной, так как $\mathrm{Z}(f) \cap \mathrm{Z}(g) = \varnothing$ и X — компакт. Поэтому согласно пункту а) функция $f+g$ содержится в z-подалгебре $[l] \subseteq [f]\vee[g]$, которая отлична от $\mathbb{R}^+$ ввиду $f+g \neq 1$. Тогда $\mathrm{Z}(l) \neq \varnothing$, и функция l имеет вид

$$l = P_0(f) + Q_0(g) + P_1(f)Q_1(g) + \ldots + P_n(f)Q_n(g),$$

где P_i, Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами без свободных членов. Так как $\mathrm{Z}(f) \cap \mathrm{Z}(g) = \varnothing$, то $P_0 = 0$ или $Q_0 = 0$. Поскольку $(f+g)(x) = (f+g)(y) = 1$, то $l(x) = l(y)$, а значит, $P_0 = Q_0 = 0$. Получается, что функция $f+g$, будучи многочленом от l, имеет вид

$$f + g = r + M_1(f)N_1(g) + \ldots + M_m(f)N_m(g),$$

где M_i, N_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами без свободных членов, $r \in \mathbb{R}^+$. Принимая во внимание равенства $(f+g)(x) = g(x) = 1$ и $f(x) = 0$, имеем $r = 1$. Следовательно, $f\big(\mathrm{Z}(g)\big) = g\big(\mathrm{Z}(f)\big) = \{1\}$ и $f + g \geqslant 1$.

Допустим, что $\operatorname{coz} f \cap \operatorname{coz} g = \varnothing$. Тогда $[f]$ и $[g]$ — предатомы и $\mathrm{Z}(f) \cap \cap\, \mathrm{Z}(g) = \varnothing$, что противоречит условию в). Значит, $\operatorname{coz} f \cap \operatorname{coz} g \neq \varnothing$. Выберем $z \in \operatorname{coz} f \cap \operatorname{coz} g$. Поскольку пространство X тихоновское, найдутся такие функции $\lambda_f, \lambda_g \in C^+(X)$, что

$$\frac{1}{2} \leqslant \lambda_f, \lambda_g \leqslant 1, \quad \lambda_f\big(\mathrm{Z}(f)\big) = \lambda_g\big(\mathrm{Z}(g)\big) = \{1\}, \quad \lambda_f(z) = \lambda_g(z) = \frac{1}{2}.$$

Так как $[\lambda_f]$ и $[\lambda_g]$ — sp-подалгебры, то согласно условию б) все z-подалгебры из $[\lambda_f] \vee [f]$ и $[\lambda_g] \vee [g]$ содержатся в A, в том числе подалгебры $[f\lambda_g^n]$ и $[g\lambda_f^m]$, где натуральные показатели n и m таковы, что $(f\lambda_g^n + g\lambda_f^m)(z) < 1$. Однако $f\lambda_g^n(y) = g\lambda_f^m(x) = 1$ и $\mathrm{Z}(f\lambda_g^n) \cap \mathrm{Z}(g\lambda_f^m) = \varnothing$. Но тогда, как было показано ранее, $f\lambda_g^n + g\lambda_f^m \geqslant 1$, что противоречит условию $(f\lambda_g^n + g\lambda_f^m)(z) < 1$. $\square$

Дадим решёточное описание подалгебр вида $M_x + \mathbb{R}^+$ для компакта X.

Теорема 3.3. *Пусть X — компакт. Тогда подалгебра $A \in A_1(X)$ имеет вид $M_x + \mathbb{R}^+$ для некоторой точки $x \in X$, если и только если A — максимальная z-подалгебра со свойствами* а)—г).

Доказательство. Пусть $A = M_x + \mathbb{R}^+$ для некоторой точки $x \in X$. Согласно предложению 3.1 подалгебра $M_x + \mathbb{R}^+$ обладает свойствами а)—г). Установим максимальность подалгебры $M_x + \mathbb{R}^+$ среди всех подалгебр решётки $A_1(X)$ со свойствами а)—г). Допустим противное, т. е. нашлась подалгебра $B \in A_1(X)$ со свойствами а)—г) и $M_x + \mathbb{R}^+ \subset B$. Выберем функцию $p \in B \setminus (M_x + \mathbb{R}^+)$. Согласно пункту г) найдётся такая z-подалгебра $[g]$, что $[p] \subseteq [g]$. Поскольку $[p] \neq \mathbb{R}^+$, справедливо $g(x) > 0$ и $g(y) = 0$ для некоторой точки $y \in X$. Выберем в $M_x + \mathbb{R}^+$ такую функцию f, что $f(x) = 0$ и $f = 1$ на $\mathrm{Z}(g)$. Наличие функций f и g в подалгебре B противоречит лемме 3.2.

Обратно, пусть $A \in A_1(X)$ — максимальная z-подалгебра со свойствами а)—г). Докажем существование точки $x \in X$, в которой все функции из A принимают наименьшее значение. Предположим противное, т. е. для каждой точки $x \in X$ существует функция $f \in A$, не достигающая в ней своего минимума. Согласно условию г) f содержится в некоторой z-подалгебре $[f_x] \in A$. Очевидно, что $f_x(x) > 0$. Тогда и в некоторой открытой окрестности V_x точки x функция f_x будет положительна. Открытые множества вида V_x покрывают компакт X. Поэтому найдётся конечное число точек $x, y, \ldots, z$ в X, такое что множества $V_x, V_y, \ldots, V_z$ также будут покрывать X. Функция $f_x + f_y + \ldots + f_z$ строго положительна на X и принадлежит A. Отсюда следует, что в A можно выбрать пару функций g и h, для которых $\mathrm{Z}(g) \neq \varnothing$, $\mathrm{Z}(h) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Z}(g) \cap \mathrm{Z}(h) = \varnothing$. Последнее противоречит лемме 3.2. Значит, можно выбрать точку $x \in X$, в которой все функции из A достигают минимума. Поэтому $A \subseteq M_x + \mathbb{R}^+$. Согласно предложению 3.1 для подалгебры $M_x + \mathbb{R}^+$ выполняются свойства а)—г). Поэтому $A = M_x + \mathbb{R}^+$ в силу максимальности подалгебры A среди подалгебр решётки $A_1(X)$ со свойствами а)—г). $\square$

С этого момента считаем тихоновское пространство X хьюиттовским, т. е. $X = \nu X$. Пусть βX — стоун-чеховская компактификация хьюиттовского пространства X. Множество всех ограниченных функций полукольца $C^+(X)$ образует b-подалгебру $bC^+(X)$, канонически изоморфную $\mathbb{R}^+$-алгебре $C^+(\beta X)$. Поэтому решётка $A_1\big(bC^+(X)\big)$ канонически изоморфна решётке $A_1(\beta X)$.

Лемма 3.4. *Точка $x \in \beta X$ лежит в X тогда и только тогда, когда прообразом подалгебры $M_x + \mathbb{R}^+ \in A_1(\beta X)$ при каноническом изоморфизме решётки $A_1\big(bC^+(X)\big)$ на решётку $A_1(\beta X)$ является z-подалгебра.*

Доказательство. Если $x \in X$, то прообразом подалгебры $M_x + \mathbb{R}^+ \in A_1(\beta X)$ при каноническом изоморфизме решётки $A_1\big(bC^+(X)\big)$ на решётку $A_1(\beta X)$ служит z-подалгебра $(M_x + \mathbb{R}^+) \cap bC^+(X)$.

Пусть $x \in \beta X \setminus X$. Тогда согласно [10, теорема 3.11.10] найдётся такая функция $f \in C^+(\beta X)$, что $f(x) = 0$ и $f > 0$ на X. Значит, прообраз подалгебры $M_x + \mathbb{R}^+ \in A_1(\beta X)$ при каноническом изоморфизме решётки $A_1\big(bC^+(X)\big)$ на решётку $A_1(\beta X)$ содержит u-подалгебру $[f|_X]$, не являющуюся sp-подалгеброй, а потому не будет z-подалгеброй. $\square$

Следующий результат занимает центральное место в работе.

Теорема 3.5. *Всякое хьюиттовское пространство X определяется решёткой $A_1(X)$.*

Доказательство. Пусть для произвольных хьюиттовских пространств X и Y имеется изоморфизм α решётки $A_1(X)$ на решётку $A_1(Y)$. Согласно теореме 2.21 α изоморфно отображает решётку $A_1\big(bC^+(X)\big)$ на решётку $A_1\big(bC^+(Y)\big)$. Если ψ_X и ψ_Y — канонические изоморфизмы решёток $A_1\big(bC^+(X)\big)$ и $A_1\big(bC^+(Y)\big)$ на $A_1(\beta X)$ и $A_1(\beta Y)$ соответственно, то отображение $\gamma = \psi_Y \circ \alpha \circ \psi_X^{-1}$ является изоморфизмом решёток $A_1(\beta X)$ и $A_1(\beta Y)$. Тогда соответствие

$$\varphi(x) = y \iff \gamma(M_x + \mathbb{R}^+) = M_y + \mathbb{R}^+ \text{ для любых } x \in \beta X \text{ и } y \in \beta Y$$

согласно теореме 3.3 будет биекцией пространства βX на пространство βY.

Докажем, что φ — гомеоморфизм. Покажем, что φ сохраняет нуль-множества. Для этого возьмём произвольную функцию $f \in C^+(\beta X)$. Тогда $\gamma([f]) = [g]$ для некоторой $g \in C^+(\beta Y)$ и

$$\begin{aligned}\varphi\big(\mathrm{Z}(f)\big) = \varphi(\{x \in \beta X : [f] \text{ — z-подалгебра из } M_x + \mathbb{R}^+\}) = \\ = \{y \in \beta Y : [g] \text{ — z-подалгебра из } M_y + \mathbb{R}^+\} = \mathrm{Z}(g).\end{aligned}$$

Точно так же показывается, что φ^{-1} сохраняет нуль-множества. Поскольку нуль-множества образуют базу замкнутых множеств в любом тихоновском пространстве, то φ — гомеоморфизм пространств βX и βY. По лемме 3.4 ограничение $\varphi|_X$ гомеоморфно отображает X на Y. $\square$

Из теоремы 3.5 аналогично [3, теорема 2] выводится следующая теорема.

Теорема 3.6. *Для произвольных топологических пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения*:

1) $A(X) \cong A(Y)$;
2) $A_1(X) \cong A_1(Y)$;
3) $C^+(X) \cong C^+(Y)$.

Доказательство. Поскольку по следствию 2.3 подалгебра констант $\mathbb{R}^+$ в $A(X)$ определяется решёточным свойством, верна импликация 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть теперь $A_1(X) \cong A_1(Y)$. Тогда $A_1(\nu\tau X) \cong A_1(\nu\tau Y)$. По теореме 3.5 $\nu\tau X \approx \nu\tau Y$. Следовательно,

$$C^+(X) \cong C^+(\nu\tau X) \cong C^+(\nu\tau Y) \cong C^+(Y).$$

Значит, условие 2) влечёт условие 3). Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. $\square$

4. Изоморфизмы решёток $A_1(X)$

Теорема 3.5 позволяет описать изоморфизмы решёток $A_1(X)$.

Теорема 4.1. *Для произвольных топологических пространств X и Y любой изоморфизм решёток $A_1(X)$ и $A_1(Y)$ индуцируется однозначно определённым изоморфизмом полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$.*

Доказательство теоремы опирается на следующие соображения.

1. Как и в теореме 3.6, пространства X и Y можно считать хьюиттовскими.
2. Согласно теореме 3.5 изоморфизм α решётки $A_1(X)$ на решётку $A_1(Y)$ определяет гомеоморфизм φ хьюиттовских пространств X и Y, действующий по правилу

$$\varphi(x) = y \iff \alpha\big((M_x + \mathbb{R}^+) \cap bC^+(X)\big) = (M_y + \mathbb{R}^+) \cap bC^+(Y) \quad \text{для любых } x \in X \text{ и } y \in Y.$$

   Отождествляя точки пространств X и Y гомеоморфизмом φ, получаем тождественный автоморфизм полукольца $C^+(X)$, индуцирующий тождественный автоморфизм решётки $A(X)$. При этом отождествлении изоморфизм α становится автоморфизмом решётки $A_1(X)$, оставляющим на месте b-подалгебры вида $(M_x + \mathbb{R}^+) \cap bC^+(X)$, $x \in X$.
3. Покажем, что α — тождественный автоморфизм. Для этого достаточно установить, что $\alpha([f]) = [f]$ для произвольной $[f] \in A_1(X)$, поскольку любая подалгебра $A \in A_1(X)$ есть верхняя грань своих однопорождённых подалгебр. Вначале рассматривается случай $|X| \leqslant 2$. При $|X| \geqslant 3$ нам потребуется установить, что для пары произвольных функций $f, g \in C^+(X)$ и любых точек $x, y \in X$ равенство $f(x) = g(y)$ и неравенство $f(x) < g(y)$ устанавливаются свойствами элементов $[f]$ и $[g]$ решётки $A(X)$.

Доказательство этого факта существенно использует наличие в X минимум четырёх различных точек, поэтому случай $X = \{x, y, z\}$ выделяется и для него используется особая техника доказательства. Наконец, разбор случая $|X| \geqslant 4$ проводится в два этапа: на первом считаем X компактом, а затем анализируем общую ситуацию, применяя стоун-чеховскую компактификацию βX.

4.1. Автоморфизмы решёток $A_1(\{x\})$ и $A_1(\{x, y\})$

Для $X = \{x\}$ и $X = \{x, y\}$ (см. пример 2.5) теорема 4.1 является прямым следствием следующего предложения.

Предложение 4.2. $\alpha([f]) = [f]$ *для произвольной одно- или двухзначной подалгебры* $[f]$.

Доказательство. Если $[f] = \mathbb{R}^+$, то $\alpha([f]) = [f]$ в силу леммы 2.3. Пусть теперь $[f]$ — предатом решётки $A_1(X)$ и $[f'] = \alpha([f])$. Поскольку для произвольного $x \in X$

$$\alpha\big((M_x + \mathbb{R}^+) \cap bC^+(X)\big) = (M_x + \mathbb{R}^+) \cap bC^+(X)$$

и

$$x \in \mathrm{Z}(f) \iff [f] \subseteq M_x + \mathbb{R}^+ \cap bC^+(X),$$

то $\mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(f')$. Значит, $[f] = [f']$.

Если $[f]$ — атом, то существует единственный предатом $[e]$, такой что $[f] \subset \subset [e]$. Как только что было показано, $\alpha([e]) = [e]$. Поэтому $\alpha([f]) = [f'] \subset [e]$. Значит, $[f] = [f']$. $\square$

4.2. Автоморфизмы решётки $A_1(\{x, y, z\})$

Пусть $X = \{x, y, z\}$. Для подалгебры $[f]$ и её образа $[f'] = \alpha([f])$ функции $f = (r_x, r_y, r_z)$ и $f' = (r'_x, r'_y, r'_z)$ будем считать нормированными. С учётом леммы 2.4 подалгебру $[f]$ можно отнести к одному из следующих семи типов (с точностью до перестановки точек x, y и z):

1) однозначная: $[(1, 1, 1)] \equiv \mathbb{R}^+$;
2) двухзначные: $[(1, 1, \frac{1}{2})]$, $[(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$, $[(1, 1, 0)]$, $[(1, 0, 0)]$;
3) трёхзначные: $[(1, r_1, r_2)]$ при $0 < r_2 < r_1 < 1$, $[(1, \Delta, 0)]$ при $0 < \Delta < 1$.

Лемма 4.3. *Для произвольной трёхзначной подалгебры* $[f]$ $f(x) > f(y) > > f(z)$ *тогда и только тогда, когда* $[f] \subset [e_1] \vee [e_2]$, *где* $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$.

Доказательство. Пусть $f(x) > f(y) > f(z)$. Тогда

$$f = f(z) + \big(f(x) - f(y)\big)e_1 + \big(f(y) - f(z)\big)e_2.$$

Следовательно, $[f] \subset [e_1] \vee [e_2]$.

Обратно, пусть $[f] \subset [e_1] \vee [e_2]$. Тогда

$$f = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, $f = (a_0+a_1+a_2, a_0+a_1, a_0)$. Поскольку функция f трёхзначная, $f(x) > f(y) > f(z)$. □

Лемма 4.3 показывает, что автоморфизм α сохраняет шестиэлементное разбиение множества всех трёхзначных подалгебр $[f]$:

$$A_{x,y,z} = \{[f] \in A_1(X)\colon f(x) > f(y) > f(z)\}, \ldots,$$
$$A_{z,y,x} = \{[f] \in A_1(X)\colon f(z) > f(y) > f(x)\}.$$

Поэтому теорема 4.1 для решётки $A_1(\{x,y,z\})$ будет доказана, если мы установим, что $\alpha([f]) = [f]$ для произвольной трёхзначной подалгебры $[f] \in A_{x,y,z}$, и учтём предложение 4.2.

Лемма 4.4. *Для произвольной подалгебры* $[(1, r_1, r_2)]$, $0 < r_2 < r_1 < 1$, *найдутся единственные числа* Δ, $0 < \Delta < 1$, *и* $r > 0$, *такие что* $[(1, r_1, r_2)] = [(1, \Delta, 0) + r]$, *причём* $\Delta = \frac{r_1 - r_2}{1 - r_2}$, $r = \frac{r_2}{1 - r_2}$.

Доказательство. Согласно лемме 2.12 равенство $[(1, r_1, r_2)] = [(1, \Delta, 0) + r]$ равносильно системе

$$\begin{cases} 1 = k(1 + r), \\ r_1 = k(\Delta + r), \\ r_2 = kr, \\ r > 0 \end{cases}$$

для некоторого числа $k > 0$. Эта система, в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{r_1 - r_2}{1 - r_2}, \\ r = \dfrac{r_2}{1 - r_2}, \\ k = 1 - r_2, \\ 0 < r_2 < 1. \end{cases}$$

Лемма доказана. □

Обозначим через Δ_f число $\Delta = \frac{r_1 - r_2}{1 - r_2}$, соответствующее функции $f = (1, r_1, r_2)$, $0 < r_2 < r_1 < 1$.

Лемма 4.5. *Для нормированных трёхзначных функций* $f = (1, \Delta_2, 0)$ *и* $g = (1, \Delta_1, 0)$ $[f] \subset [g]$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta_2 < \Delta_1$.

Доказательство. Пусть $0 < \Delta_2 < \Delta_1 < 1$. Выберем натуральный показатель n так, чтобы $\Delta_1^n \leqslant \Delta_2$. Тогда

$$f = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_1^n} \cdot g^n + \frac{\Delta_2 - \Delta_1^n}{\Delta_1 - \Delta_1^n} \cdot g.$$

Значит, $[f] \subseteq [g]$. Поскольку трёхзначная функция f не пропорциональна g, то $[f] \subset [g]$ согласно лемме 2.12. $\square$

Лемма 4.6. *Для произвольных функции $f = (1, r_1, r_2)$, $0 < r_2 < r_1 < 1$, и показателей $n, m \in \mathbb{N}$ $[f^n] \subset [f^m]$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{f^n} < \Delta_{f^m}$, что имеет место тогда и только тогда, когда $n > m$.*

Доказательство. По леммам 4.4 и 4.5 достаточно показать, что

$$\frac{r_1^n - r_2^n}{1 - r_2^n} > \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{1 - r_2^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

что равносильно очевидному соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} r_1^{n-i}(1 - r_1^i) r_2^{i-1} > 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\frac{r_1^n - r_2^n}{1 - r_2^n} > \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{1 - r_2^{n+1}} \iff \\
&\quad \iff (r_1^n - r_2^n) - (r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) + r_1^n r_2^n (r_1 - r_2) > 0 \iff \\
&\quad \iff (r_1 - r_2)\sum_{i=1}^{n} r_1^{n-i} r_2^{i-1} - (r_1 - r_2)\sum_{i=0}^{n} r_1^{n-i} r_2^{i} + r_1^n r_2^n (r_1 - r_2) > 0 \iff \\
&\quad \iff \sum_{i=1}^{n} r_1^{n-i} r_2^{i-1} - r_1^n - r_2 \sum_{i=1}^{n} r_1^{n-i} r_2^{i-1} + r_1^n r_2^n > 0 \iff \\
&\quad \iff (1 - r_2)\sum_{i=1}^{n} r_1^{n-i} r_2^{i-1} - r_1^n (1 - r_2^n) > 0 \iff \\
&\quad \iff \sum_{i=1}^{n} r_1^{n-i} r_2^{i-1} - r_1^n \sum_{i=1}^{n} r_2^{i-1} > 0 \iff \sum_{i=1}^{n} r_1^{n-i}(1 - r_1^i) r_2^{i-1} > 0.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Предложение 4.7. *Для любой подалгебры $[f]$ и для любого числа $n \in \mathbb{N}$ имеется решёточная характеризация подалгебры $[f^n]$.*

Доказательство. I. Пусть $[f]$ — однозначная или двухзначная подалгебра. Тогда $[f^n] = [f]$ для любого $n \in \mathbb{N}$ на основании примера 2.5.

II. Пусть $[f]$ — трёхзначная sp-подалгебра. Через M обозначим множество всех подалгебр вида $[f^k]$, $k \in \mathbb{N}$, а через M_n — его подмножество, образованное подалгебрами $[f^k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Поскольку $[f^n] \neq [f^m]$ при $n \neq m$ в силу леммы 2.12, то $|M_n| = n$. Докажем, что любая подалгебра $[g] \subset [f]$, $[g] \notin M_n$, такая что для произвольных подалгебр $[f_1]$, $[f_2]$ из $[f]$, отличных от $[g]$, $[g] \subset [f_1] \vee [f_2]$ тогда и только тогда, когда $[f_1] \in M_n$ или $[f_2] \in M_n$, лежит в $M \setminus M_n$, т. е.

$[g] = [f^k]$ для некоторого $k \geqslant n+1$. Действительно, рассуждая от противного, имеем

$$g = a_i f^i + \ldots + a_j f^j, \quad a_i, \ldots, a_j \in \mathbb{R}^+, \quad a_i > 0, \quad a_j > 0, \quad 0 \leqslant i < j.$$

Рассмотрим функции

$$f_1 = \frac{1}{2}(a_i f^i + \ldots + a_{j-1} f^{j-1}) + \frac{2}{3} a_j f^j, \quad f_2 = g - f_1.$$

Очевидно, что $f_1, f_2 \in [f]$ и $g = f_1 + f_2$. Используя лемму 2.12 и правило знаков Декарта, несложно показать, что подалгебры $[f_1]$, $[f_2]$ отличны от $[g]$ и не лежат в M_n (существенно используется положительность функции f).

Множество всех таких подалгебр $[g]$ обозначим через M'_n. Как только что было показано, $M'_n \subseteq M \setminus M_n$. С помощью леммы 2.12 и правила знаков Декарта несложно проверить, что $[f^{n+1}] \in M'_n$. По лемме 4.6 $\Delta_{f^{n+1}} > \Delta_{f^k}$ для всех $k \geqslant n+2$. Последнее согласно лемме 4.5 означает, что в случае $f > 0$ подалгебра $[f^{n+1}]$ имеет решёточную характеризацию для всех $n \in \mathbb{N}$.

III. Пусть $[f]$ — трёхзначная z-подалгебра. Можно считать, что $f = (1, \Delta, 0)$, где $0 < \Delta < 1$. Для произвольных числа $r > 0$ и натурального показателя n согласно лемме 2.17 и пункту II решёточно выделяется подалгебра

$$[(f+r)^n] = \left[\left(1, \frac{\Delta^n + C_n^1 r \Delta^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} r^{n-1} \Delta + r^n}{1 + C_n^1 r + \ldots + C_n^{n-1} r^{n-1} + r^n}, 0\right)\right].$$

Используя лемму 2.17, найдём z-подалгебру

$$[g_r] = \left[\frac{f^n + C_n^1 f^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} f}{1 + C_n^1 r + \ldots + C_n^{n-1} r^{n-1}}\right].$$

Очевидно, что для каждого значения $r > 0$

$$g_r(y) = \frac{\Delta^n + C_n^1 r \Delta^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} r^{n-1} \Delta}{1 + C_n^1 r + \ldots + C_n^{n-1} r^{n-1}} \in (\Delta^n, \Delta).$$

Более того, для каждого $\Delta_1 \in (\Delta^n, \Delta)$ найдётся единственное число $r > 0$, такое что $g_r(y) = \Delta_1$. Пусть $M_{\geqslant n}$ — множество всех таких z-подалгебр $[g] \subset [f]$ (функцию g считаем нормированной), что $[g] \subset [g_r]$ для всех $r > 0$. Из рассуждений, приведённых выше, получаем, что $[f^n] \in M_{\geqslant n}$ и $g(y) \leqslant f^n(y)$ для всех $[g] \in M_{\geqslant n}$. Значит, подалгебра $[f^n]$ согласно лемме 4.5 имеет решёточную характеризацию. □

Лемма 4.8. *Пусть $f = (1, r_1, r_2)$, $0 < r_2 < r_1 < 1$. Тогда $\Delta_{f^3} = \Delta_f^2$, если и только если $r_1 = \frac{2r_2^2 + r_2}{1 - r_2}$, $r_2 < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.*

Доказательство. Выполним следующие преобразования:

$$\Delta_{f^3} = \Delta_f^2 \iff \frac{r_1^3 - r_2^3}{1 - r_2^3} = \left(\frac{r_1 - r_2}{1 - r_2}\right)^2 \iff \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{1 + r_2 + r_2^2} = \frac{r_1 - r_2}{1 - r_2} \iff$$
$$\iff r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - r_1^2 r_2 - r_1 r_2^2 - r_2^3 = r_1 + r_1 r_2 + r_1 r_2^2 - r_2 - r_2^2 - r_2^3 \iff$$

$$\iff r_1(1-r_1) - 2r_2^2(1-r_1) - r_2(1-r_1)(1+r_1) = 0 \iff$$
$$\iff r_1 - 2r_2^2 - r_2(1+r_1) = 0 \iff r_1 = \frac{2r_2^2 + r_2}{1-r_2}.$$

Следовательно,

$$0 < r_2 < \frac{2r_2^2 + r_2}{1-r_2} < 1 \iff 0 < r_2 < \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4.9. *Пусть* $\alpha([(1,1/2,0)]) = [(1,(1/2)^t,0)]$, $t > 0$. *Тогда* $\alpha([(1,\Delta,0)]) = [(1,\Delta^t,0)]$ *для всех* $0 < \Delta < 1$.

Доказательство. Пусть $[(1,\Delta',0)] = \alpha([(1,\Delta,0)])$. Тогда согласно предложению 4.7

$$\alpha([(1,\Delta,0)^n]) = [(1,\Delta',0)^n]$$

для любого показателя $n \in \mathbb{N}$.

Для чисел Δ и $1/2$ существует единственная последовательность неотрицательных целых чисел $(t_m)_{\Delta,1/2}$, такая что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t_m+1} < \Delta^m \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{t_m} \text{ для всех } m \in \mathbb{N}.$$

Мы утверждаем, что $(t_m)_{\Delta,1/2} \neq (t_m)_{b,1/2}$ для $b \in (\Delta, 1)$. Действительно, найдутся такие неотрицательные целые числа i и j, что

$$\Delta^i < \left(\frac{1}{2}\right)^j < b^i,$$

поскольку

$$\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\Delta} < \frac{i}{j} < \frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln b}.$$

Принимая во внимание лемму 4.5 и предложение 4.7, имеем

$$(t_m)_{\Delta',(\frac{1}{2})^t} = (t_m)_{\Delta,\frac{1}{2}}.$$

Кроме того, легко заметить, что

$$(t_m)_{\Delta^t,(\frac{1}{2})^t} = (t_m)_{\Delta,\frac{1}{2}}.$$

Значит, $\Delta' = \Delta^t$. □

Замечание 4.10. При доказательстве леммы 4.9 фактически описаны все порядковые автоморфизмы γ отрезка $[0,1]$ со свойством $\gamma(r^n) = \gamma^n(r)$ при любых $r \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$: для некоторого числа $t > 0$ имеем $\gamma(r) = r^t$ при всех

$r \in [0,1]$. Отметим близкий результат [15, лемма 2.1], дающий полное описание мультипликативных отображений m отрезка $[0,1]$ в себя:

$$\left[\begin{array}{l} m(x) = 0 \text{ для всех } x \in [0,1]; \\ m(x) = 1 \text{ для всех } x \in [0,1]; \\ \text{существует число } k > 0, \text{ такое что } m(x) = x^k \text{ для всех } x \in [0,1]; \\ m(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x = 0, \\ 1 & \text{для } x \in (0,1]; \end{cases} \\ m(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in [0,1), \\ 1 & \text{для } x = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Предложение 4.11. *Пусть* $\alpha([(1,1/2,0)]) = [(1,(1/2)^t,0)]$, $t > 0$. *Тогда* $t = 1$.

Доказательство. Пусть $\alpha([(1,1/2,0)]) = [(1,(1/2)^t,0)]$, но $t \neq 1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $t > 1$ (если $t < 1$ для α, то $t > 1$ для α^{-1}). Непосредственной проверкой убеждаемся (см. леммы 4.4 и 4.8), что $\Delta_{f^3} = \Delta_f^2$ для $f = (1,1/2,1/4)$. Согласно предложению 4.9 для подалгебры $[f'] = \alpha([f])$ имеем систему

$$\begin{cases} \Delta_{f'} = \Delta_f^t, \\ \Delta_{(f')^2} = \Delta_{f^2}^t, \\ \Delta_{(f')^4} = \Delta_{f^4}^t. \end{cases}$$

Перепишем её в развёрнутом виде, полагая $f' = (1, r_1, r_2)$, $0 < r_2 < r_1 < 1$:

$$\begin{cases} \dfrac{r_1 - r_2}{1 - r_2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^t, \\ \dfrac{r_1^2 - r_2^2}{1 - r_2^2} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^t, \\ \dfrac{r_1^4 - r_2^4}{1 - r_2^4} = \left(\dfrac{1}{17}\right)^t, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{r_1 - r_2}{1 - r_2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^t, \\ \dfrac{r_1 + r_2}{1 + r_2} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^t, \\ \dfrac{r_1^2 + r_2^2}{1 + r_2^2} = \left(\dfrac{5}{17}\right)^t. \end{cases}$$

$\Delta_{(f')^3} = \Delta_{f'}^2$, поскольку $\Delta_{f^3} = \Delta_f^2$. Согласно лемме 4.8 это означает, что

$$r_1 = \frac{2r_2^2 + r_2}{1 - r_2}, \quad r_2 < \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Воспользуемся этим и перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{3r_2^2}{(1 - r_2)^2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^t, \\ \dfrac{r_2^2 + 2r_2}{1 - r_2^2} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^t, \\ \dfrac{r_2^2}{(1 - r_2)^2} \cdot \dfrac{5r_2^2 + 2r_2 + 2}{1 + r_2^2} = \left(\dfrac{5}{17}\right)^t. \end{cases}$$

Докажем, что эта система несовместна. Используя первое уравнение, получаем

$$\begin{cases} r_2 = \dfrac{1}{1+3^{\frac{t+1}{2}}}, \\ \dfrac{3+2\cdot 3^{\frac{t+1}{2}}}{2\cdot 3^{\frac{t+1}{2}}+3\cdot 3^t} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^t, \\ \dfrac{3+2\cdot 3^{\frac{t+1}{2}}+2\cdot 3^t}{2+2\cdot 3^{\frac{t+1}{2}}+3\cdot 3^t} = \left(\dfrac{15}{17}\right)^t. \end{cases}$$

Далее,

$$\begin{cases} r_2 = \dfrac{1}{1+3^{\frac{t+1}{2}}}, \\ 2\cdot 3^{\frac{t+1}{2}} = \dfrac{3\cdot 3^t\cdot(\frac{3}{5})^t-3}{1-(\frac{3}{5})^t}, \\ 2\cdot 3^{\frac{t+1}{2}} = \dfrac{2\cdot(\frac{15}{17})^t+3\cdot 3^t\cdot(\frac{15}{17})^t-3-2\cdot 3^t}{1-(\frac{15}{17})^t}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{3\cdot 3^t\cdot(\frac{3}{5})^t-3}{1-(\frac{3}{5})^t} = \frac{2\cdot(\frac{15}{17})^t+3\cdot 3^t\cdot(\frac{15}{17})^t-3-2\cdot 3^t}{1-(\frac{15}{17})^t},$$

что эквивалентно равенству $d(t)=0$, где

$$d(t) = 2\cdot 85^t - 3\cdot 75^t + 51^t + 25^t - 3\cdot 17^t + 2\cdot 15^t, \quad t>0.$$

Кроме того, $d(1)=0$. Докажем, что $d>0$ при $t>1$. Для этого достаточно показать, что производная функции

$$d_1(t) = \frac{d(t)}{15^t}$$

при $t>1$ принимает положительные значения. Имеем

$$d_1'(t) = 2\cdot\left(\frac{17}{3}\right)^t\cdot\ln\frac{17}{3} - 3\cdot 5^t\cdot\ln 5 + \left(\frac{17}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{17}{5} + \left(\frac{5}{3}\right)^t\cdot\ln\frac{5}{3} - 3\cdot\left(\frac{17}{15}\right)^t\cdot\ln\frac{17}{15},$$

откуда следует, что $d_1'(1) > \frac{1}{10}$ (все вычисления выполнены в системе компьютерной алгебры «Mathematica»).

Для доказательства того, что $d_1'(t)>0$ при $t>1$, обратимся к функции

$$d_2(t) = \left(\frac{15}{17}\right)^t d_1'(t).$$

Имеем

$$d_2'(t) = 2\cdot 5^t\cdot\ln\frac{17}{3}\cdot\ln 5 - 3\cdot\left(\frac{75}{17}\right)^t\cdot\ln 5\cdot\ln\frac{75}{17} + 3^t\cdot\ln\frac{17}{5}\cdot\ln 3 + \left(\frac{25}{17}\right)^t\cdot\ln\frac{5}{3}\cdot\ln\frac{25}{17}.$$

Следовательно, $d_2'(1) > \frac{1}{2}$.

Далее,

$$d_3(t) = \left(\frac{17}{25}\right)^t d_2'(t).$$

Имеем

$$d_3'(t) = 2 \cdot \left(\frac{17}{5}\right)^t \cdot \ln\frac{17}{3} \cdot \ln 5 \cdot \ln\frac{17}{5} - 3 \cdot 3^t \cdot \ln 5 \cdot \ln\frac{75}{17} \cdot \ln 3 + \left(\frac{51}{25}\right)^t \cdot \ln\frac{17}{5} \cdot \ln 3 \cdot \ln\frac{51}{25}.$$

Значит, $d_3'(1) > \frac{3}{2}$.

Для функции

$$d_4(t) = \left(\frac{25}{51}\right)^t d_3'(t)$$

имеем

$$d_4'(t) = 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^t \cdot \ln\frac{17}{3} \cdot \ln 5 \cdot \ln\frac{17}{5} \cdot \ln\frac{5}{3} - 3 \cdot \left(\frac{25}{17}\right)^t \cdot \ln 5 \cdot \ln\frac{75}{17} \cdot \ln 3 \cdot \ln\frac{25}{17},$$

т. е. $d_4'(1) > 1$.

Наконец, для функции

$$d_5(t) = \left(\frac{17}{25}\right)^t d_4'(t)$$

получаем

$$d_5'(t) = 2 \cdot \left(\frac{17}{15}\right)^t \cdot \ln\frac{17}{3} \cdot \ln 5 \cdot \ln\frac{17}{5} \cdot \ln\frac{5}{3} \cdot \ln\frac{17}{15} > 0$$

для всех $t > 0$. Поэтому $d(t) > 0$ при $t > 1$. Значит, исходная система несовместна и $t = 1$. □

Предложение 4.12. $\alpha([f]) = [f]$ *для произвольной функции* $f = (1, r_1, r_2)$, $0 < r_2 < r_1 < 1$.

Доказательство. Пусть $[f'] = \alpha([f])$, где $f = (1, r_1, r_2)$, $0 < r_2 < r_1 < 1$. Покажем, что значения r_1 и r_2 однозначно определяются числами Δ_f и Δ_{f^2} (см. лемму 4.4):

$$\begin{cases} \dfrac{r_1 - r_2}{1 - r_2} = \Delta_f, \\ \dfrac{r_1^2 - r_2^2}{1 - r_2^2} = \Delta_{f^2}, \\ 0 < r_2 < r_1 < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} r_1 = \dfrac{\Delta_{f^2} - 2\Delta_f \Delta_{f^2} + \Delta_f^2}{2\Delta_f - \Delta_{f^2} - \Delta_f^2}, \\ r_2 = \dfrac{\Delta_{f^2} - \Delta_f^2}{2\Delta_f - \Delta_{f^2} - \Delta_f^2}, \\ 0 < r_2 < r_1 < 1. \end{cases}$$

По лемме 4.11 $\Delta_{f'} = \Delta_f$ и $\Delta_{(f')^2} = \Delta_{f^2}$. Значит, $[f'] = [f]$. □

Из предложений 4.2, 4.11 и 4.12 вытекает, что теорема 4.1 верна для пространств X с трёхточечной тихоновизацией τX.

4.3. Автоморфизмы решёток $A_1(X)$, $|X| \geqslant 4$

Пусть X — произвольное хьюиттовское пространство, $|X| \geqslant 4$. Покажем, что и в этом случае автоморфизм α является тождественным. Согласно предложению 4.2 для этого достаточно установить, что $\alpha([f]) = [f]$ для произвольной многозначной подалгебры $[f]$.

Лемма 4.13. *Для произвольной z-подалгебры $[f]$, не являющейся b-подалгеброй, $[f] \subset M_x + \mathbb{R}^+$ тогда и только тогда, когда $[f] \subset [g] \vee [h]$ для некоторой sp-подалгебры $[h]$ и b- и z-подалгебры $[g] \subset M_x + \mathbb{R}^+$.*

Доказательство. Пусть $[f]$ — z-подалгебра, не являющаяся b-подалгеброй. Положим $h = f \vee 1$ и $g = f \wedge 1$. Тогда $f = gh$ и $[f] \subset [g] \vee [h]$, причём $[h]$ — sp-подалгебра и $\mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(g)$.

Обратно, пусть $[f] \subset [g] \vee [h]$ для некоторой sp-подалгебры $[h]$ и b- и z-подалгебры $[g] \subset M_x + \mathbb{R}^+$. Тогда

$$f = r + P_0(g) + Q_0(h) + P_1(g)Q_1(h) + \ldots + P_m(g)Q_m(h),$$

где P_i, Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободного члена, $r \in \mathbb{R}^+$. Поскольку $\inf f = 0$ и $\inf h > 0$, то $r = Q_0 = 0$. Значит, $\mathrm{Z}(f) = \mathrm{Z}(g)$. □

Следствие 4.14. *$\alpha(M_x + \mathbb{R}^+) = M_x + \mathbb{R}^+$ для произвольной подалгебры $M_x + \mathbb{R}^+$.* □

Пусть X — тихоновское пространство. Для произвольного замкнутого множества $V \subset X$ и точки $x \in X \setminus V$ обозначим через $\lambda(V, x)$ нормированную функцию $\lambda \in C^+(X)$, такую что $\lambda(\{V\}) = 0$ и $\lambda(x) = 1$. Отметим также, что для произвольных конечного множества $\{x, y, \ldots, z\} \subseteq X$ и чисел $r_x, r_y, \ldots, r_z \in \mathbb{R}^+$ найдётся функция $f \in C^+(X)$, такая что

$$f(x) = r_x,\ f(y) = r_y, \ldots,\ f(z) = r_z.$$

Будем говорить, что *автоморфизм α сохраняет некоторое соотношение для функций $f, g \in C^+(X)$*, если это соотношение верно для функций f', g' отвечающих образам $[f'] = \alpha([f])$ и $[g'] = \alpha([g])$ (если функции f и g нормированные, то f' и g' также считаем нормированными).

Лемма 4.15. *Для произвольных подалгебры $[f]$ и точек $x \neq y$ из X автоморфизм α сохраняет равенство $f(x) = f(y)$ и неравенство $f(x) < f(y)$.*

Доказательство. Рассмотрим подалгебры $M_x + \mathbb{R}^+$ и $M_y + \mathbb{R}^+$. Для произвольной подалгебры $[f]$ очевидны импликации

$$[f] \subseteq (M_x + \mathbb{R}^+) \cap (M_y + \mathbb{R}^+) \Longrightarrow f(x) = f(y),$$
$$[f] \subseteq M_x + \mathbb{R}^+,\ [f] \nsubseteq M_y + \mathbb{R}^+ \Longrightarrow f(x) < f(y),$$
$$[f] \nsubseteq M_x + \mathbb{R}^+,\ [f] \subseteq M_y + \mathbb{R}^+ \Longrightarrow f(x) > f(y),$$
$$[f] \text{ двухзначная},\ [f] \nsubseteq M_x + \mathbb{R}^+,\ [f] \nsubseteq M_y + \mathbb{R}^+ \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Поэтому с учётом следствия 4.14 остаётся рассмотреть случай такой многозначной подалгебры $[f]$, что

$$[f] \nsubseteq M_x + \mathbb{R}^+, \quad [f] \nsubseteq M_y + \mathbb{R}^+.$$

I. Пусть $f(x) = f(y) = r$. Тогда

$$f(x) = f(y) \iff [g + r_1] \subseteq [h + r_2] \vee [f] \tag{4.1}$$

для некоторых чисел $r_1, r_2 > 0$ и подалгебр $[h]$, $[g]$, отличных от $\mathbb{R}^+$, таких что

а) $g(x) = g(y) = h(x) = h(y) = 0$;

б) $g(z) = 0$ и $h(z) > 0$ для некоторой точки $z \in X$.

Действительно, пусть $f(x) = f(y) = r$. Поскольку $[f] \nsubseteq M_x + \mathbb{R}^+$ и $[f] \nsubseteq M_y + \mathbb{R}^+$, то $f(z) < r$ для некоторой точки $z \in X \setminus \{x, y\}$. Выберем теперь точку $w \in X \setminus \{x, y, z\}$ (такая точка существует в силу многозначности подалгебры $[f]$) и рассмотрим функцию $\lambda = \lambda(\{x, y, z\}, w)$. Положим

$$g = \lambda + (f \vee r) - r, \quad h = \lambda + (f \vee r) - f.$$

Тогда $g, h \in C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$ и выполняются условия а) и б). Кроме того, $g + r + 1 = (h + 1) + f$, поэтому верно включение (4.1).

Обратно, предположим, что нашлись числа $r_1, r_2 > 0$ и подалгебры $[h]$, $[g]$, отличные от $\mathbb{R}^+$, такие что верны включение (4.1) и условия а), б). Тогда

$$g + r_1 = r_3 + P_0(h + r_2) + Q_0(f) + P_1(h + r_2)Q_1(f) + \ldots + P_m(h + r_2)Q_m(f),$$

где P_i, Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободных членов, $r_3 \in \mathbb{R}^+$.

Допустим, что сумма

$$Q_0 + P_1 Q_1 + \ldots + P_m Q_m \tag{4.2}$$

равна нулю. Тогда $g + r_1 = r_3 + P_0(h + r_2)$, причём $P_0 \neq 0$, так как $[g] \neq \mathbb{R}^+$. Условие б) означает, что $P_0(h(x) + r_2) < P_0(h(z) + r_2)$. Следовательно, $g(x) < g(z)$, но $g(x) = g(z) = 0$ согласно условию а). Значит, в сумме (4.2) имеются ненулевые слагаемые. Для ненулевых слагаемых Q_i и $P_i Q_i$, используя условия а) и б), получаем

$$\begin{aligned}
&Q_i\big(f(x)\big) = Q_i\big(f(y)\big) \iff f(x) = f(y),\\
&Q_i\big(f(x)\big) > Q_i\big(f(y)\big) \iff f(x) > f(y),\\
&P_i(h(x) + r_2)Q_i\big(f(x)\big) = P_i(h(y) + r_2)Q_i\big(f(y)\big) \iff f(x) = f(y),\\
&P_i(h(x) + r_2)Q_i\big(f(x)\big) > P_i(h(y) + r_2)Q_i\big(f(y)\big) \iff f(x) > f(y).
\end{aligned}$$

Значит, $f(x) = f(y)$.

II. Пусть $f(x) \neq f(y)$. Тогда

$$f(x) > f(y) \iff [g + r] \subset [h] \vee [f]$$

для некоторого числа $r > 0$ и подалгебр $[g]$ и $[h]$, отличных от $\mathbb{R}^+$, таких что а) $g(x) = g(y) = 0$;

б) $h(x) = 0$, $h(y) > 0$.

Действительно, пусть $f(x) = r$ и $f(y) < r$. Тогда $X \setminus \{x, y\} \neq \varnothing$, поскольку функция f многозначная. Выберем точку $z \in X \setminus \{x, y\}$ и для некоторой функции $\lambda = \lambda(\{x, y\}, z)$ положим

$$g = \lambda + (f \vee r) - r, \quad h = \lambda + (f \vee r) - f.$$

Тогда $g, h \in C^+(X) \setminus \mathbb{R}^+$ и выполняются условия а), б). Кроме того, $g + r = h + f$. Поэтому $[g + r] \subset [h] \vee [f]$.

Обратно, пусть нашлись число $r > 0$ и подалгебры $[h]$, $[g]$, отличные от $\mathbb{R}^+$, такие что выполняются условия а), б) и $[g + r] \subset [h] \vee [f]$. Тогда

$$g + r = r_3 + P_0(h) + Q_0(f) + P_1(h)Q_1(f) + \ldots + P_m(h)Q_m(f),$$

где P_i, Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободных членов, $r_3 \in \mathbb{R}^+$. Функция g отлична от константы, поэтому

$$P_0 + Q_0 + P_1Q_1 + \ldots + P_mQ_m \neq 0.$$

По условию б) $h(x) < h(y)$. Следовательно, если $f(x) < f(y)$, то $g(x) < g(y)$, что противоречит условию а). Значит, $f(x) > f(y)$. $\square$

Лемма 4.16. *Для любых различных точек $x, y, z \in X$ и произвольных многозначных функций f и g из $C^+(X)$, принимающих в этих точках попарно различные значения, соотношение $f \geqslant kg$ для некоторого числа $k > 0$ с условием $f = kg$ на $\{x, y, z\}$ сохраняется при автоморфизме α.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно установить, что

$$[f] \subseteq [g] \vee [h]$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f \geqslant kg, \\ f = kg \text{ на } \{x, y, z\} \end{cases} \quad \text{при некотором числе } k > 0$$

для некоторой подалгебры $[h]$, такой что $x, y, z \in \mathrm{Z}(h)$, но $[f] \nsubseteq [l] \vee [s]$ для произвольных подалгебры $[l] \subset [g]$ и подалгебры $[s]$ со свойством $\mathrm{Z}(h) \subseteq \mathrm{Z}(s)$ (см. следствие 4.14).

Пусть $f \geqslant kg$ и $f = kg$ на $\{x, y, z\}$ для некоторого числа $k > 0$. Положим $h = f - kg$. Тогда $h \in C^+(X)$, $x, y, z \in \mathrm{Z}(h)$ и $[f] \subseteq [g] \vee [h]$.

Допустим, что $[f] \subseteq [l] \vee [s]$ для некоторых подалгебр $[l]$ и $[s]$, таких что $[l] \subset [g]$ и $\mathrm{Z}(h) \subseteq \mathrm{Z}(s)$. Тогда

$$f = r + P_0(l) + Q_0(s) + P_1(l)Q_1(s) + \ldots + P_m(l)Q_m(s),$$

где P_i, Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободного члена, $r \in \mathbb{R}^+$. Учитывая, что $h(x) = h(y) = h(z) = 0$ и $\mathrm{Z}(h) \subseteq \mathrm{Z}(s)$, получаем, что $kg = r + P_0(l)$ на $\{x, y, z\}$. Поскольку $[l] \subset [g]$, то

$$kg = a_0 + a_1g + \ldots + a_ng^n, \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^+, \quad a_n > 0, \quad n \geqslant 1,$$

в точках множества $\{x, y, z\}$, причём или $a_0 > 0$, или $a_0 = 0$ и $n \geqslant 2$. Не ограничивая общности, можно считать, что $g(x) = 1$. Тогда $|\operatorname{im} g| \leqslant 1$ на $\{x, y, z\}$ по лемме 1.1, что противоречит условию. Значит, таких подалгебр $[l]$ и $[s]$ не существует.

Обратно, пусть $[f] \subseteq [g] \vee [h]$. Тогда

$$f = r + P_0(g) + Q_0(h) + P_1(g)Q_1(h) + \ldots + P_m(g)Q_m(h),$$

где P_i, Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободного члена, $r \in \mathbb{R}^+$. Поскольку $h(x) = h(y) = h(z) = 0$ и $f(x) \neq f(y)$, то $P_0 \neq 0$. Положим

$$s = Q_0(h) + P_1(g)Q_1(h) + \ldots + P_m(g)Q_m(h).$$

Тогда $[f] \subset [P_0(g) + r] \vee [s]$ и $\mathrm{Z}(h) \subseteq \mathrm{Z}(s)$. Следовательно, $r = 0$ и $P_0(g) = kg$ для подходящего числа $k > 0$. Значит, $f \geqslant kg$ и $f = kg$ на $\{x, y, z\}$. □

Доказательство теоремы 4.1.

А. Пусть вначале X — произвольный компакт, $|X| \geqslant 4$. Тогда согласно теореме 3.3 и лемме 4.15 для любых нормированной функции f и точки $x \in X$ равенство $f(x) = 1$ имеет решёточную характеризацию.

Лемма 4.17. *Для любых различных точек $x, y, z \in X$ и произвольной нормированной многозначной функции $f \in C^+(X)$, $f(x) = 1$ и $0 < f(y) < 1$, найдётся такая многозначная нормированная функция g, что соотношения*

$$f \geqslant g, \quad f(x) = g(x) = 1, \quad f(y) = g(y), \quad g(z) = 0$$

сохраняются при автоморфизме α.

Доказательство. Выберем такую точку $w \in X \setminus \{x, y\}$, что $f(w) \neq f(x)$ и $f(w) \neq f(y)$. Для произвольной точки $v \in X \setminus \{x, y, w\}$ и некоторой функции $\lambda(\{x, y, w\}, v)$ положим

$$f_v = f\bigl(1 - \lambda(\{x, y, w\}, v)\bigr).$$

Тогда $f_v \in C^+(X)$ — многозначная нормированная функция и верны равенства $f_v(v) = 0$, $f = f_v$ на $\{x, y, w\}$, которые сохраняются при автоморфизме α в силу леммы 4.16. Если $f_v(z) = 0$, то возьмём $g = f_v$. Иначе, действуя аналогично ($w = v$, $v = z$), по функции f_v выберем такую многозначную нормированную функцию $f_z \in C^+(X)$, что $f_z(z) = 0$, $f_z = f_v$ на $\{x, y, v\}$. Функция $g = f_z$ будет искомой. □

Предложение 4.18. *Для любых точек $y_1, y_2 \in X$ и произвольных многозначных нормированных функций f и g из $C^+(X)$ равенство $f(y_1) = g(y_2)$ сохраняется при автоморфизме α.*

Доказательство. Пусть $f(y_1) = g(y_2) = r$. Если $r = 0$ или $r = 1$, то предложение верно в силу следствия 4.14 и леммы 4.15. Рассмотрим случай, когда $0 < r < 1$.

I. $y = y_1 = y_2$.

а) Пусть $f(x) = g(x) = 1$ в некоторой точке $x \in X$. Воспользуемся леммой 4.17 и для некоторой точки $z \in X \setminus \{x, y\}$ выберем многозначные нормированные функции $f_0, g_0 \in C^+(X)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$f_0\colon \begin{cases} x \to 1, \\ y \to r, \\ z \to 0, \\ f_0 \leqslant f, \end{cases} \qquad g_0\colon \begin{cases} x \to 1, \\ y \to r, \\ z \to 0, \\ g_0 \leqslant g, \end{cases}$$

которые α сохраняет. Тогда функция $f_0 \vee g_0$ будет многозначной и нормированной. Согласно лемме 4.16 α сохраняет равенства $f_0(y) = (f_0 \vee g_0)(y)$ и $g_0(y) = (f_0 \vee g_0)(y)$, а значит, и $f(y) = g(y)$.

б) Пусть $f^{-1}(1) \cap g^{-1}(1) = \varnothing$ и $f(x_1) = g(x_2) = 1$. Воспользуемся леммой 4.17 и для некоторой точки $z \in X \setminus \{x_1, x_2, y\}$ найдём такие многозначные нормированные функции $f_0, g_0 \in C^+(X)$, что верны соотношения

$$f_0\colon \begin{cases} x_1 \to 1, \\ y \to r, \\ z \to 0, \\ f_0 \leqslant f, \end{cases} \qquad g_0\colon \begin{cases} x_2 \to 1, \\ y \to r, \\ z \to 0, \\ g_0 \leqslant g, \end{cases}$$

которые α сохраняет. Рассмотрим многозначную нормированную функцию $h \in C^+(X)$:

$$h\colon \begin{cases} x_1 \to 1, \\ x_2 \to 1, \\ y \to r, \\ z \to 0. \end{cases}$$

Согласно пункту I а) автоморфизм α сохраняет равенства $h(y) = f_0(y)$ и $h(y) = g_0(y)$, а значит, и равенство $f(y) = g(y)$.

II. $y_1 \neq y_2$.

Выберем различные точки $x, z \in X \setminus \{y_1, y_2\}$ и такую многозначную нормированную функцию $h \in C^+(X)$, что

$$h\colon \begin{cases} x \to 1, \\ y_1 \to r, \\ y_2 \to r, \\ z \to 0. \end{cases}$$

Согласно пункту I и лемме 4.15 автоморфизм α сохраняет равенства $f(y_1) = h(y_1)$, $h(y_1) = h(y_2)$ и $h(y_2) = g(y_2)$, а значит, и равенство $f(y_1) = g(y_2)$. $\square$

Предложение 4.19. *Для любых точек $y_1, y_2 \in X$ и произвольных многозначных нормированных функций f и g из $C^+(X)$ неравенство $f(y_1) < g(y_2)$ сохраняется при автоморфизме α.*

Доказательство. В случае когда $f(y_1) = 1$ или $g(y_2) = 1$, предложение следует из леммы 4.15.

Пусть $0 < f(y_1) < g(y_2) < 1$. Выберем пару различных точек $x, z \in X \setminus \{y_1, y_2\}$ (возможно, $y_1 = y_2$) и такую многозначную нормированную функцию $h \in C^+(X)$, что

$$h\colon \begin{cases} x \to 1, \\ y_1 \to f(y_1), \\ z \to g(y_2). \end{cases}$$

Согласно лемме 4.15 и предложению 4.18 автоморфизм α сохраняет равенства $h(y_1) = f(y_1)$, $h(z) = g(y_2)$ и неравенство $h(y_1) < h(z)$, а значит, и неравенство $f(y_1) < g(y_2)$. □

Рассмотрим соответствие γ, действующее по правилу $\gamma\colon r \to r'$, где r и r' — значения произвольных нормированных многозначных функций f и f', $[f'] = \alpha([f])$ в некоторой точке $x \in X$. Предложения 4.18 и 4.19 показывают, что данное определение корректно (значение r' не зависит от выбора функции f и точки x) и соответствие γ является порядковым автоморфизмом цепи $[0, 1]$.

Зафиксируем четыре различные точки x, y, z, w из X. Для произвольной нормированной функции $u \in C^+(X)$, такой что

$$u(x) = r_x, \quad u(y) = r_y, \quad u(z) = r_z, \quad u(w) = r_w,$$

будем писать $u = (r_x, r_y, r_z, r_w, \ldots)$.

Предложение 4.20. *γ — мультипликативный автоморфизм, т. е. $\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b)$ для любых чисел $a, b \in [0, 1]$.*

Доказательство. Непосредственно из определения γ получаем, что $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(1) = 1$. Поэтому равенство $\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b)$ верно, если хотя бы одно из чисел a или b равно 0 или 1.

Пусть $0 < a \leqslant b < 1$. Выберем нормированные функции f и λ из $C^+(X)$, такие что

$$f = (1, a, b, 0, \ldots), \quad \lambda = (0, 0, 1, 0, \ldots).$$

Положим

$$h = \lambda \wedge \frac{1 - bf}{1 - b^2}.$$

Тогда функции

$$h = (0, 0, 1, 0, \ldots), \quad bf + (1 - b^2)h = (b, ab, 1, 0, \ldots)$$

принадлежат $C^+(X)$ и являются нормированными.

Докажем, что для подалгебр $[f]$ и $[h]$ следующие условия эквиваленты:

1) $c = ab$;
2) существует подалгебра $[g]$, где $g = (b, c, 1, 0, \ldots)$ — такая нормированная функция, что $[g] \subset [f] \vee [h]$, но для любой подалгебры $[l]$, где $l = (b, d, 1, 0, \ldots)$, $d > c$, — нормированная функция, имеем $[l] \nsubseteq [f] \vee [h]$.

Пусть $c = ab$. Положим $g = bf + (1 - b^2)h$. Тогда $[g] \subset [f] \vee [h]$.

Допустим, что $[l] \subseteq [f] \vee [h]$ для некоторой нормированной функции $l = (b, d, 1, 0, \ldots)$, $d > c$. Тогда

$$l = r + P_0(f) + Q_0(h) + P_1(f)Q_1(h) + \ldots + P_m(f)Q_m(h),$$

где P_i, Q_i — многочлены с неотрицательными коэффициентами и без свободных членов, $r \in \mathbb{R}^+$. Поскольку $l(w) = f(w) = h(w) = 0$ и $h(x) = h(y) = 0$, то $r = 0$. Следовательно, $l(x) = P_0\big(f(x)\big)$ и $l(y) = P_0\big(f(y)\big)$. Пусть

$$P_0(f) = a_1 f + \ldots + a_n f^n, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда

$$\begin{cases} a_1 + \ldots + a_n = b, \\ a_1 a + \ldots + a_n a^n = d. \end{cases}$$

Следовательно,

$$d = a_1 a + \ldots + a_n a^n \leqslant a_1 a + \ldots + a_n a = a(a_1 + \ldots + a_n) = ab = c.$$

Значит, $d \leqslant c$, что противоречит выбору функции l.

С учётом проведённых рассуждений обратное утверждение очевидно. □

Из предложения 4.20 и замечания 4.10 получаем следующее утверждение.

Следствие 4.21. *Найдётся такое число $t > 0$, что $\gamma(r) = r^t$ для всех $r \in [0, 1]$.* □

Предложение 4.22. γ — *тождественный автоморфизм.*

Доказательство. Согласно следствию 4.21 найдётся такое число $t > 0$, что $\gamma(r) = r^t$ для всех $r \in [0, 1]$. Рассуждая от противного, можно считать, что $t > 1$ (иначе рассмотрим автоморфизм γ^{-1}, соответствующий α^{-1}). Выберем нормированные функции f и g из $C^+(X)$, такие что

$$f = (1, 1, 1, 0, \ldots), \quad g = (1, a, a^2, 0, \ldots), \quad 0 < a < \frac{1}{2}.$$

Тогда функция

$$h = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g$$

будет нормированной и

$$\begin{aligned} f' &= (1, 1, 1, 0, \ldots), \\ g' &= (1, a^t, a^{2t}, 0, \ldots), \\ h' &= \left(1, \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right)^t, \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2\right)^t, 0, \ldots\right), \end{aligned}$$

где

$$[f'] = \alpha([f]), \quad [g'] = \alpha([g]), \quad [h'] = \alpha([h]).$$

Очевидно, $[h] \subset [f] \vee [g]$. Поэтому $[h'] \subset [f'] \vee [g']$. Последнее означает, что

$$h' = r + c_1(f')^{n_1}(g')^{m_1} + \ldots + c_k(f')^{n_k}(g')^{m_k}, \quad r, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}^+,$$

где n_i, m_i — неотрицательные целые показатели и $n_i + m_i \geqslant 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Поскольку $f(w) = g(w) = h(w) = 0$, то $r = 0$. Вычислив значения функции h' в точках x, y и z, получим систему

$$\begin{cases} c_1 + \ldots + c_k = 1, \\ c_1 a^{tm_1} + \ldots + c_k a^{tm_k} = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}a\right)^t, \\ c_1 a^{2tm_1} + \ldots + c_k a^{2tm_k} = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}a^2\right)^t. \end{cases}$$

Тогда

$$c_1 a^{tm_1}(1 - a^{tm_1}) + \ldots + c_k a^{tm_k}(1 - a^{tm_k}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right)^t - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2\right)^t.$$

Поскольку $0 \leqslant a < \frac{1}{2}$ и $t > 1$, то $(a^t - a^{tm_i})(1 - a^t - a^{tm_i}) \geqslant 0$ при $m_i \in \mathbb{N}$. Записанное неравенство позволяет оценить сверху слагаемое $c_i a^{tm_i}(1 - a^{tm_i})$:

$$c_i a^{tm_i}(1 - a^{tm_i}) \leqslant c_i a^t (1 - a^t)$$

(очевидно, оценка верна при $m_i = 0$). Тогда

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right)^t - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2\right)^t \leqslant c_1 a^t(1 - a^t) + \ldots + c_k a^t(1 - a^t) = a^t(1 - a^t). \quad (4.3)$$

Рассмотрим функцию

$$d(a) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right)^t - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2\right)^t - a^t(1 - a^t), \quad a \geqslant 0.$$

Вычислим её производную:

$$d'(a) = \frac{1}{2}t\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right)^{t-1} - at\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2\right)^{t-1} - ta^{t-1} + 2ta^{2t-1}.$$

Поскольку

$$d(0) = 0, \quad \lim_{a \to 0} d'(a) = \frac{t}{2^t} > 0,$$

то $d(a_0) > 0$ для некоторого значения $0 < a_0 < \frac{1}{2}$, что противоречит соотношению (4.3). Получается, что для каждого $t > 0$ найдётся такое значение $a = a_0$, что автоморфизм α не сохраняет включения $[h] \subset [f] \vee [g]$. Значит, $t = 1$. □

Таким образом, теорема 4.1 верна для произвольных компактов.

Б. Пусть X — произвольное хьюиттовское пространство. Принимая во внимание компактификационную теорему (см. [12, с. 86]), получаем, что решётки $A_1(\beta X)$ и $A_1\big(bC^+(X)\big)$ канонически изоморфны, т. е. существует такой изоморфизм ψ, что $\psi([f]) = [f|_X]$ для произвольной функции $f \in C^+(\beta X)$.

Теорема 2.21 показывает, что α является автоморфизмом подрешётки всех b-подалгебр $A_1\big(bC^+(X)\big)$. Следовательно, отображение $\alpha_{\beta X}=\psi^{-1}\circ\alpha\circ\psi$ — автоморфизм решётки $A_1(\beta X)$, оставляющий на месте подалгебры вида $M_x+\mathbb{R}^+$, а потому согласно пункту A автоморфизм $\alpha_{\beta X}$ тождественный. Значит, α оставляет на месте все b-подалгебры решётки $A_1(X)$.

Рассмотрим подалгебру $[f']=\alpha([f])$, где $[f]$ — произвольная не b-подалгебра. Зафиксируем точку $x\in\operatorname{coz} f$. Пусть $f(x)=r$. Для каждой пары точек $y,z\in X$, в которых функция f принимает различные положительные значения, отличные от r, выберем такую b-подалгебру $[g]$, что $g\leqslant f$ и $f=g$ на $\{x,y,z\}$. Тогда по лемме 4.16

$$\frac{f'(z)}{f'(x)}=\frac{g'(z)}{g'(x)},\ \text{где } [g']=\alpha([g]).$$

Поскольку $[g]$ — b-подалгебра,

$$\frac{g'(z)}{g'(x)}=\frac{g(z)}{g(x)}.$$

Следовательно,

$$f'(z)=f(z)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Аналогично

$$f'(z)=f(z)\cdot\frac{f'(y)}{f(y)}.$$

Поэтому $f'(y)=f(y)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$. По следствию 4.14 $\mathrm{Z}(f)=\mathrm{Z}(f')$, а по лемме 4.15 $f^{-1}(r)=(f')^{-1}(r)$. Значит, $[f']=[f]$ и α — тождественное отображение. □

5. Изоморфизмы решёток $A(X)$

Задача описания изоморфизмов решёток $A(X)$ во многом сводится к случаю изоморфизмов подрешёток $A_1(X)$, однако для решёток $A(X)$ теорема 4.1, вообще говоря, неверна.

Теорема 5.1. *Любой изоморфизм решёток $A(X)$ и $A(Y)$ индуцируется однозначно определённым изоморфизмом полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$, за исключением случая, когда $X=\{x,y\}$ — несвязное двоеточие. В этом случае существует взаимно-однозначное соответствие между изоморфизмами решёток $A(X)$ и $A(Y)$ и парами автоморфизмов (γ_x,γ_y) цепи $[0,1]$.*

Доказательство. Пусть α — произвольный изоморфизм решёток $A(X)$ и $A(Y)$. Как было отмечено при доказательстве теоремы 4.1, пространства X и Y можно считать хьюиттовскими и вместо изоморфизма α рассматривать индуцированный им автоморфизм решётки $A(X)$, который оставляет на месте подалгебры вида $M_x+\mathbb{R}^+$ согласно следствию 4.14. Этот автоморфизм также будем обозначать α. Дальнейшие рассуждения будут зависеть от мощности $|X|$ пространства X.

А. При $X = \{x\}$ получаем двухэлементную цепь $A(\{x\}) = \{0, \mathbb{R}^+\}$. Очевидно, $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, т. е. автоморфизм α тождественный.

Б. Рассмотрим случай, когда $X = \{x, y\}$ — несвязное двоеточие (см. пример 2.5). Для произвольной ненулевой подалгебры $\langle f \rangle$ и её образа $\langle f' \rangle = \alpha(\langle f \rangle)$ функции $f = (r_x, r_y)$ и $f' = (r'_x, r'_y)$ будем считать нормированными.

Отметим, что
$$\alpha\colon \langle (1,0) \rangle \to \langle (1,0) \rangle$$
и для произвольного числа $0 < r < 1$
$$\alpha\colon \langle (1,r) \rangle \to \langle (1,r') \rangle, \quad 0 < r' < 1.$$
Отсюда с учётом соотношения (2.1) получаем, что соответствие γ_y, действующее по правилу
$$\gamma_y\colon r \to r', \quad 0 \leqslant r \leqslant 1 \iff \alpha\colon \langle (1,r) \rangle \to \langle (1,r') \rangle,$$
будет порядковым автоморфизмом цепи $[0,1]$. Аналогичным образом по α определяется автоморфизм γ_x.

Таким образом, произвольный автоморфизм α решётки $A(\{x,y\})$ задаёт пару порядковых автоморфизмов (γ_x, γ_y).

Докажем обратное утверждение: произвольная пара порядковых автоморфизмов (γ_x, γ_y) цепи $[0,1]$ определяет единственный автоморфизм α решётки $A(X)$, такой что
$$\alpha\colon \langle (a,1) \rangle \to \langle (\gamma_x(a), 1) \rangle, \quad \alpha\colon \langle (1,b) \rangle \to \big\langle \big(1, \gamma_y(b)\big) \big\rangle,$$
где $(a,1)$ и $(1,b)$ — произвольные нормированные функции из $C^+(X)$.

Вначале заметим, что соответствие α, индуцированное парой автоморфизмов (γ_x, γ_y), взаимно-однозначно отображает однопорождённые подалгебры решётки $A(\{x,y\})$ на себя. Поэтому если мы покажем, что $A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда $\alpha(A) \leqslant \alpha(B)$ для произвольных подалгебр $A, B \in A(\{x,y\})$, то α будет автоморфизмом. Это проверяется непосредственно с учётом равенств
$$\gamma_x(r_1 \vee r_2) = \gamma_x(r_1) \vee \gamma_x(r_2), \quad \gamma_x(r_1 \wedge r_2) = \gamma_x(r_1) \wedge \gamma_x(r_2),$$
$$\gamma_y(r_1 \vee r_2) = \gamma_y(r_1) \vee \gamma_y(r_2), \quad \gamma_y(r_1 \wedge r_2) = \gamma_y(r_1) \wedge \gamma_y(r_2)$$
для произвольных чисел r_1, r_2 из отрезка $[0,1]$.

В. Пусть $|X| \geqslant 3$. Докажем тождественность автоморфизма α. Очевидно, $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Лемма 2.12 показывает, что для произвольных многозначных подалгебр $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$ $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ тогда и только тогда, когда $[f] = [g]$. С другой стороны, в силу теоремы 4.1 $\alpha([f]) = [f]$ для произвольной подалгебры $[f]$. Значит, $\alpha(\langle f \rangle) = \langle f \rangle$ для произвольной многозначной подалгебры $\langle f \rangle$.

Остаётся показать, что $\alpha(\langle f \rangle) = \langle f \rangle$ для произвольной двухзначной нормированной подалгебры $\langle f \rangle$, где
$$f = \begin{cases} r & \text{на } X_1, \\ 1 & \text{на } X \setminus X_1. \end{cases}$$

Для доказательства этого утверждения применим следующую лемму, устанавливаемую аналогично лемме 4.16.

Лемма 5.2. *Для любых различных точек $x, y \in X$ и произвольных отличных от констант функций f и g из $C^+(X)$, принимающих в этих точках попарно различные ненулевые значения, соотношение $f \geqslant kg$ для некоторого числа $k > 0$ с условием $f = kg$ на $\{x, y\}$ сохраняется при автоморфизме α.* □

Выберем точки $x \in X_1, y \in X \setminus X_1$ и многозначную функцию g так, чтобы

$$\begin{cases} f \geqslant g, \\ f = g \text{ на } \{x, y\}. \end{cases}$$

Пусть $[g'] = \alpha([g])$. Тогда с учётом леммы 5.2

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{g(x)}{g(y)} = r, \quad \frac{f'(x)}{f'(y)} = \frac{g'(x)}{g'(y)}.$$

Поскольку g — многозначная функция, то

$$\frac{g'(x)}{g'(y)} = \frac{g(x)}{g(y)} = r.$$

Следовательно, $f'(x) = f(x) = r$. Значит, $\langle f' \rangle = \langle f \rangle$, и α — тождественный автоморфизм. □

Литература

[1] Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семёнова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 2. — С. 493—510.

[2] Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1990. — Т. 28. — С. 3—46.

[3] Вечтомов Е. М. Решётка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Мат. заметки. — 1997. — Т. 62, вып. 5. — С. 687—693.

[4] Вечтомов Е. М. Полукольца непрерывных отображений // Вестник ВятГГУ. — 2004. — № 10. — С. 57—64.

[5] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. О решёточном изоморфизме полуколец непрерывных функций // Тезисы докладов Междунар. алгебраич. конф. — Новосибирск: Мат. ин-т им. С. Л. Соболева, НГУ, 2009. — С. 113.

[6] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // ДАН СССР. — 1939. — Т. 22, № 1. — С. 11—15.

[7] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[8] Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Физматлит, 2000.

[9] Сидоров В. В. О строении решёточных изоморфизмов полуколец непрерывных функций // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2009. — Т. 39. — С. 339—341.

[10] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[11] Artamonova I. I., Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Varankina V. I., Vechtomov E. M. Semirings: sheaves and continuous functions // Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings. — Sankt-Petersburg, 1999. — P. 23—58.

[12] Gillman L., Jerison M. Rings of Continuous Functions. – New York: Springer, 1976.

[13] Golan J. F. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[14] Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 64, no. 1. — P. 45—99.

[15] Marovt J. Multiplicative bijections of $C(X, I)$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 134, no. 4. — P. 1065—1075.

[16] Stone M. Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. — 1937. — Vol. 41, no. 3. — P. 375—481.