

Минимальная бесконечно базлируемая полугруппа с полиномиально распознаваемым многообразием

М. В. ВОЛКОВ

Уральский государственный университет
e-mail: Mikhail.Volkov@usu.ru

С. В. ГОЛЬДБЕРГ

Уральский государственный университет
e-mail: Svetlana.Goldberg@usu.ru

С. И. КУБЛАНОВСКИЙ

ТПО «Северный очаг»
e-mail: stas@norths.spb.su

УДК 512.552

Ключевые слова: полугруппа, тождество, многообразие, псевдомногообразие, конечная базлируемость, проблема вхождения, полиномиальный алгоритм.

Аннотация

Указана шестиэлементная полугруппа, не имеющая конечного базиса тождеств, но тем не менее порождающая многообразие, проблема принадлежности конечных полугрупп которому допускает полиномиальный алгоритм.

Abstract

M. V. Volkov, S. V. Goldberg, S. I. Kublanovsky, A minimal infinitely based semigroup whose variety is polynomially recognizable, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 105–122.

We exhibit a six-element semigroup that has no finite identity basis but nevertheless generates a variety whose finite membership problem admits a polynomial algorithm.

1. Постановка задачи и обзор результатов

Развитие теории сложности вычислений привело к определённому переосмыслению алгоритмических аспектов алгебры. Выяснилось, что многие фундаментальные алгоритмические задачи, разрешимость которых была давно известна и/или очевидна, приводят к интересным и зачастую весьма трудным проблемам, если задаться вопросом о вычислительной сложности соответствующих алгоритмов¹. Характерным примером здесь может служить рассматриваемая в данной работе задача VAR-МЕМВ: для двух конечных алгебр A и B

¹Сложность алгоритмов в настоящей заметке понимается в смысле монографий [2, 30]; там же читатель сможет найти определения упоминаемых ниже классов сложности P, NP, EXPSPACE, 2-EXPTIME.

одинаковой сигнатуры определить, принадлежит ли алгебра A многообразию, порождённому алгеброй B . Понятно значение задачи VAR-МЕМВ для современной универсальной алгебры, в которой, как хорошо известно, классификация алгебр с помощью тождеств занимает одно из центральных мест. В то же время указанная задача интересна и для компьютерных наук, в частности для теории спецификаций (см. [12, § 1]), а также для теории формальных языков (см. обсуждение ниже). Алгоритмическая разрешимость задачи VAR-МЕМВ легко выводится из HSP-теоремы Тарского и отмечалась ещё в пионерской работе Дж. Калицкого [18]. Вопрос о вычислительной сложности этой задачи был поставлен в явном виде значительно позднее, а именно в известном обзоре О. Г. Харлампович и М. В. Сапира [19] (см. там проблему 2.5). Последующие исследования привели к интересным и довольно неожиданным результатам. Верхнюю оценку вычислительной сложности задачи VAR-МЕМВ получили К. Бергман и Г. Слуцки [12], извлекающие из анализа доказательства Дж. Калицкого принадлежность этой задачи классу сложности **2-EXPTIME** (класс задач, разрешимых за дважды экспоненциальное время). Эта оценка сперва представлялась сильно завышенной, но затем З. Секели [35] показал, что обсуждаемая задача **NP**-трудна, а М. Козик [21, 22] установил, что она является даже **EXPSpace**-трудной. Позже Козик [23] доказал **2-EXPTIME**-полноту задачи VAR-МЕМВ, подтвердив тем самым, что оценка К. Бергмана и Г. Слуцки в общем случае является неулучшаемой. Таким образом, задача VAR-МЕМВ оказалась одной из наиболее труднорешаемых алгоритмических задач универсальной алгебры.

Особый интерес задача VAR-МЕМВ представляет для полугрупп благодаря известному соответствию Эйленберга [14] между многообразиями регулярных языков и псевдомногообразиями конечных полугрупп¹. В силу этого соответствия принадлежность данного регулярного языка к некоторому многообразию языков L равносильна принадлежности синтаксической полугруппы этого языка к псевдомногообразию конечных полугрупп, отвечающему L . Поэтому, оценивая вычислительную сложность задачи полугруппового варианта задачи VAR-МЕМВ, можно делать содержательные выводы о вычислительной сложности ряда актуальных задач теории формальных языков. На данный момент точная оценка вычислительной сложности задачи VAR-МЕМВ для полугрупп ещё не найдена, но известно, что эта задача **NP**-трудна [17]. Ниже мы будем говорить о задаче VAR-МЕМВ применительно именно к полугруппам.

Для более тонкого анализа задачи VAR-МЕМВ целесообразно рассмотреть её вариант, в котором полугруппа B является параметром, а в роли входных данных выступает только полугруппа A . Такой подход расщепляет VAR-МЕМВ на серию задач VAR-МЕМВ(B), параметризованных всевозможными конечными полугруппами, и позволяет ставить вопрос о классификации конечных полугрупп

¹Напомним, что *псевдомногообразием полугрупп* называют класс полугрупп, замкнутый относительно взятия подполугрупп и гомоморфных образов, а также образования прямых произведений с конечным числом множителей. В частности, класс $\mathcal{V}_{fin}$ всех конечных полугрупп из данного многообразия $\mathcal{V}$ является псевдомногообразием.

по вычислительной сложности проблемы принадлежности для порождаемых ими многообразий. Дадим соответствующие формальные определения.

Пусть B — произвольная, но фиксированная конечная полугруппа, $\text{var } B$ — многообразие, порождённое B . Задача $\text{VAR-МЕМВ}(B)$ — это комбинаторная задача распознавания, входными данными которой служат всевозможные конечные полугруппы A , а ответами — «ДА» или «НЕТ» в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит полугруппа A многообразию $\text{var } B$. Если существует многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, зависящий только от полугруппы B и такой, что для любой конечной полугруппы A верный ответ на вопрос задачи $\text{VAR-МЕМВ}(B)$ может быть получен на детерминированной машине Тьюринга за время, не превосходящее $p(|A|)$, будем говорить, что B есть *полугруппа с полиномиально распознаваемым многообразием*. Аналогично, если такого многочлена нет, но существует такая действительная константа $\alpha > 1$, что для любой конечной полугруппы A верный ответ на вопрос задачи $\text{VAR-МЕМВ}(B)$ может быть получен на детерминированной машине Тьюринга за время, не превосходящее $\alpha^{|A|}$, можно назвать B *полугруппой с экспоненциально распознаваемым многообразием*, и т. д. Классификационный вопрос, упомянутый в предыдущем абзаце, есть по существу вопрос об эффективной характеристизации конечных полугрупп с полиномиально (экспоненциально и т. д.) распознаваемыми многообразиями. Отметим, что М. Джексон и Р. Маккензи [17] указали 56-элементную полугруппу JM , для которой задача $\text{VAR-МЕМВ}(JM)$ является NP -трудной. Это означает, что при стандартном предположении $P \neq \text{NP}$ полугруппа JM не является полугруппой с полиномиально распознаваемым многообразием.

Полугруппы с полиномиально распознаваемыми многообразиями можно было бы иначе назвать полугруппами с легко проверяемыми тождествами. Действительно, поскольку многообразие $\text{var } B$ по определению состоит из всех полугрупп, удовлетворяющих всем тождествам, выполненным в B , проверка того, принадлежит или не принадлежит данная полугруппа A многообразию $\text{var } B$, есть не что иное, как проверка того, выполнены или не выполнены в A все тождества полугруппы B . Из этого наблюдения сразу же вытекает простое, но важное заключение.

Лемма 1. Если все тождества полугруппы B вытекают из некоторого конечного множества Σ таких тождеств, то B является полугруппой с полиномиально распознаваемым многообразием.

Доказательство. В условиях леммы для проверки того, принадлежит ли данная конечная полугруппа A многообразию $\text{var } B$, достаточно проверить, выполнены ли в A все тождества из Σ . Для проверки в A такого тождества $u = v$ из Σ , что слова u и v в совокупности зависят от m переменных, достаточно поочередно подставлять вместо переменных всевозможные m -ки элементов полугруппы A и проверять, приводят ли такие подстановки к равным значениям слов u и v . Число m -ок, подлежащих перебору, равно $|A|^m$, время вычисления значений слов u и v зависит только от длин этих слов и не зависит от размера полугруппы A . Поэтому суммарное время работы такого алгоритма ограниче-

но многочленом m -й степени от $|A|$. Так как количество тождеств в Σ также не зависит от размера A , получаем, что включение $A \in \text{var } B$ проверяемо за полиномиальное от $|A|$ время. $\square$

Полугруппы, удовлетворяющие посылке леммы 1, называются *конечно базлируемыми*. Вопрос о том, какие конечные полугруппы конечно базлируемы, а какие нет, вот уже более 40 лет остаётся одним из центральных в теории многообразий полугрупп (см. обзор соответствующего массива исследований в [38]). Лемма 1 увязывает этот вопрос с задачей характеристики конечных полугрупп с полиномиально распознаваемыми многообразиями.

Легко понять, что в общем случае полиномиально распознаваемое многообразие не обязано быть конечно базлируемым. Простым примером такого рода может служить изучавшееся Ю. Г. Клейманом [3] многообразие B_4B_2 всех расширений групп экспоненты 4 с помощью групп экспоненты 2. (Поскольку этот класс состоит из периодических групп, он является многообразием и в полугрупповой сигнатуре.) Действительно, в [3] показано, что многообразие B_4B_2 бесконечно базлируемо. С другой стороны, если A — конечная полугруппа, то для того чтобы узнать, лежит ли A в B_4B_2 , достаточно проверить, является ли A группой, и если это так, то проверить, имеет ли нормальная подгруппа, порождённая квадратами всех элементов из A , экспоненту 4. Ясно, что обе указанные проверки можно проделать за время, полиномиальное (в действительности кубическое) от $|A|$.

Положение существенно меняется, если рассматривать многообразия, порождаемые конечной полугруппой. Здесь уже, конечно, не удастся отыскать соответствующий пример среди многообразий, состоящих только из групп, так как в силу классического результата С. Оутс и М. Б. Пауэлла [29] любая конечная группа конечно базлируема. В [19, теорема 3.53] описывается некоторое многообразие полугрупп $\mathcal{S}$ и утверждается, что $\mathcal{S}$ полиномиально распознаваемо и что из результатов работы М. В. Сапира [33] можно извлечь, что $\mathcal{S}$ бесконечно базлируемо и порождается некоторой конечной полугруппой. Однако никакой алгоритм для проверки принадлежности конечной полугруппы многообразию $\mathcal{S}$ ни в [19], ни в последующих публикациях не приведён; никакая конечная полугруппа, порождающая $\mathcal{S}$, явно не указана. Более того, отсылка к работе [33] не кажется вполне легитимной, поскольку из описания многообразия $\mathcal{S}$ в [19, теорема 3.53] видно, что все группы из $\mathcal{S}$ имеют экспоненту 4, в то время как многообразия полугрупп, анализируемые в [33], содержат только группы нечётной экспоненты. Не подвергая сомнению справедливость результата, анонсированного в [19, теорема 3.53], мы тем не менее считаем, что для прояснения соотношения между свойствами конечной полугруппы «быть конечно базлируемой» и «порождать полиномиально распознаваемое многообразие» весьма желательно привести более прозрачный пример и снабдить его полным доказательством. В этом и состоит цель данной работы.

Мы указываем шестиэлементную полугруппу AC_2 , которая бесконечно базлируема и в то же порождает полиномиально распознаваемое многообразие. При

этом явно выписывается бесконечный базис тождеств для AC_2 и детально излагается полиномиальный алгоритм для проверки принадлежности произвольной конечной полугруппы многообразию $\text{var } AC_2$.

Отметим, что число элементов в нашем примере наименьшее возможное, поскольку хорошо известно, что любая полугруппа с пятью или менее элементами конечно базлируема (см. [10, 36]). При этом полугруппа AC_2 , по-видимому, раньше не встречалась в литературе. Читателю, возможно, известна другая шестиэлементная бесконечно базлируемая полугруппа: так называемый *моноид Брандта* B_2^1 , состоящий из (2×2) -матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Моноид Брандта, начиная с пионерской работы П. Перкинса [31], постоянно возникает в публикациях по теории полугрупповых многообразий на протяжении более 40 лет. Известно, что B_2^1 обладает многими примечательными свойствами (в том числе связанными с теорией сложности вычислений, см. [20, 34]), однако вопрос о сложности задачи $\text{VAR-МЕМВ}(B_2^1)$ пока остаётся открытым (и, на наш взгляд, представляет существенный интерес). Соответственно, на сегодняшний день моноид Брандта не может быть использован в качестве искомого примера.

Ещё одно любопытное свойство полугруппы AC_2 состоит в том, что многообразие $\text{var } AC_2$ является *предельным*, т. е. минимальным по включению бесконечно базлируемым многообразием (см. [26]). Таким образом, наш пример минимален не только в смысле числа элементов, но и в смысле упорядоченности многообразий по включению.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 строится полугруппа AC_2 , выписывается её базис тождеств и даётся структурная характеристика полугрупп из многообразия $\text{var } AC_2$. В разделе 3 показывается, что на основе упомянутой характеристики для конечной полугруппы S можно проверить включение $S \in \text{var } AC_2$ за время порядка $O(|S|^3)$.

Предполагается, что читатель знаком с начальными сведениями из теории полугрупп в пределах трёх первых глав книги [4], а также с основами теории многообразий (см. [13, гл. II]). Для удобства читателя напомним здесь важное для понимания работы понятие рисовской полугруппы матричного типа.

Пусть G — группа, 0 — символ, не принадлежащий G . Пусть I, Λ — непустые множества, $P = (p_{\lambda,i})$ — некоторая $(\Lambda \times I)$ -матрица над множеством $G \cup \{0\}$. *Рисовская полугруппа матричного типа* $M^0(G; I, \Lambda; P)$ над группой G с сэндвич-матрицей P — это полугруппа на множестве $(I \times G \times \Lambda) \cup \{0\}$ с умножением

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad \text{для всех } x \in (I \times G \times \Lambda) \cup \{0\},$$

$$(i, g, \lambda) \cdot (j, h, \mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_{\lambda,j} = 0, \\ (i, gp_{\lambda,j}h, \mu), & \text{если } p_{\lambda,j} \neq 0. \end{cases}$$

2. Полугруппа AC_2 и её базис тождеств

Через A_2 обозначим пятиэлементную идемпотентно порождённую 0-простую полугруппу. Её можно задать в классе полугрупп с нулём копредставлением

$$A_2 = \langle a, b \mid a^2 = aba = a, bab = b, b^2 = 0 \rangle = \{a, b, ab, ba, 0\}.$$

Можно также мыслить себе A_2 как полугруппу, образованную (2×2) -матрицами (над произвольным полем)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

относительно обычного матричного умножения, или как рисовскую полугруппу матричного типа над тривиальной группой $E = \{1\}$ с сэндвич-матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полугруппа AC_2 получается при добавлении к полугруппе A_2 нового элемента c . Умножение в AC_2 продолжает умножение в A_2 , а произведения, в которых участвует добавленный элемент c , задаются следующими правилами:

$$xc = cx = c \text{ для всех } x \in A_2, \quad c^2 = 0.$$

(Во избежание недоразумений подчеркнём, что элемент 0 *не* является нулём в AC_2 , поскольку $0c = c0 = c$.) Тот факт, что так определённое умножение ассоциативно, можно проверить непосредственно, но можно обойтись и без вычислений, если заметить, что группоид AC_2 изоморфен некоторой подполугруппе прямого произведения полугруппы A_2 и циклической группы $C_2 = \langle c \mid c^2 = 1 \rangle = \{c, 1\}$, а именно подполугруппе, состоящей из всех пар вида $(x, 1)$, где $x \in A_2$, и пары $(0, c)$.

По построению A_2 является подполугруппой в AC_2 . С другой стороны, элементы 0 и c образуют в AC_2 подгруппу, изоморфную группе C_2 . (Таким образом, AC_2 получается при своеобразном «слиянии» A_2 и C_2 , при котором нуль полугруппы A_2 отождествляется с единицей группы C_2 .) Поскольку $A_2, C_2 \in \text{var } AC_2$, имеем $A_2 \times C_2 \in \text{var } AC_2$. Как отмечено выше, полугруппа AC_2 вкладывается в прямое произведение $A_2 \times C_2$, откуда следует, что $AC_2 \in \text{var}(A_2 \times C_2)$. Мы видим, что полугруппы AC_2 и $A_2 \times C_2$ порождают одно и то же многообразие, иначе говоря, удовлетворяют одним и тем же тождествам. Из результатов работы [1] (см. там замечание 2 в обсуждении основной теоремы) вытекает, что для любой группы G конечной экспоненты прямое произведение $A_2 \times G$ бесконечно базлируемо. Отсюда мы получаем первое из интересующих нас свойств полугруппы AC_2 .

Лемма 2. Полугруппа AC_2 бесконечно базлируема.

Замечание 1. В кратком сообщении [6] анонсировалась (с наброском доказательства) бесконечная базлируемость рисовской полугруппы матричного типа

над группой C_2 с сэндвич-матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Несложно показать, что эта девятиэлементная полугруппа порождает то же многообразие, что и полугруппы AC_2 и $A_2 \times C_2$. Таким образом, лемму 2 можно было бы вывести и из результатов [6].

Опишем тождества полугруппы AC_2 . Для слова w через $\text{alph}(w)$ обозначается множество переменных, участвующих в его записи, а через $|w_x|$ — число вхождений переменной x в w . Каждому слову w мы поставим в соответствие ориентированный граф $G(w)$ на множестве $\text{alph}(w)$, в котором тогда и только тогда имеется ребро из x в y , когда в w некоторое вхождение переменной x непосредственно предшествует некоторому вхождению переменной y . В $G(w)$ выделяются две специальные вершины (не обязательно различные): *начальная*, отвечающая первой переменной в w , и *конечная*, соответствующая последней переменной. Слово w задаёт некоторый обход графа $G(w)$ от начальной вершины до конечной, проходящий через все рёбра (некоторые из рёбер проходятся многократно).

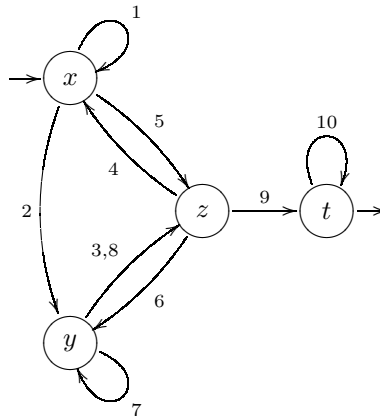


Рис. 1. Граф слова $w = x^2 y z x z y^2 z t^2$ и соответствующий w обход этого графа

На рис. 1 показан граф $G(w)$ для слова $w = x^2 y z x z y^2 z t^2$. Начальная и конечная вершины помечены соответственно входящей и исходящей стрелками. Кроме того, на рис. 1 каждое ребро помечено одним или несколькими числами, показывающими порядок прохождения рёбер при обходе, соответствующем слову w . Подчеркнём, что, в отличие от меток вершин, метки рёбер *не* входят в тот набор данных, который понимается под графом $G(w)$. Соответственно, граф не определяет слово однозначно. Например, слово $xy^3zyzx^2zyzt^3$ имеет в точности тот же граф, что и w , но задаёт другой обход этого графа (рис. 2).

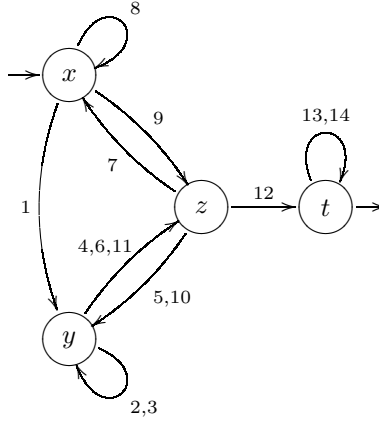


Рис. 2. Другой обход графа, изображённого на рис. 1

Заметим ещё, что в терминах графа $G(w)$ число $|w_x|$ интерпретируется как число посещений вершины x при обходе, индуцированном словом w .

Предложение 3. Тожество $u = v$ выполнено в полугруппе AC_2 тогда и только тогда, когда графы $G(u)$ и $G(v)$ совпадают и для любой переменной x числа $|u_x|$ и $|v_x|$ имеют одинаковую чётность.

Доказательство. Выше отмечалось, что полугруппы AC_2 и $A_2 \times C_2$ удовлетворяют одним и тем же тождествам. Ясно, что тождество выполнено в полугруппе $A_2 \times C_2$ тогда и только тогда, когда оно выполняется в каждой из полугрупп A_2 и C_2 . Известно, что тождество $u = v$ справедливо в полугруппе A_2 тогда и только тогда, когда совпадают графы $G(u)$ и $G(v)$ [9]¹. Также известно (и легко проверяется), что тождество $u = v$ верно в группе C_2 тогда и только тогда, когда числа $|u_x|$ и $|v_x|$ имеют одинаковую чётность для любой переменной x . $\square$

Из предложения 3 немедленно вытекает следствие.

Следствие 4. Тожества

$$x^2 = x^4, \quad (1)$$

$$xux = (xy)^3x, \quad (2)$$

$$xuxzx = xzxux, \quad (3)$$

$$(x_1^2x_2^2 \cdots x_n^2)^2 = (x_1^2x_2^2 \cdots x_n^2)^3, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (4)$$

выполняются в полугруппе AC_2 .

¹В литературе (см., например, [24,37]) можно встретить утверждение, что данный результат был получен в [5], хотя в действительности в этой статье полугруппа A_2 даже не упоминается. По всей вероятности, источником недоразумения послужила ошибочная ссылка в обзоре [11].

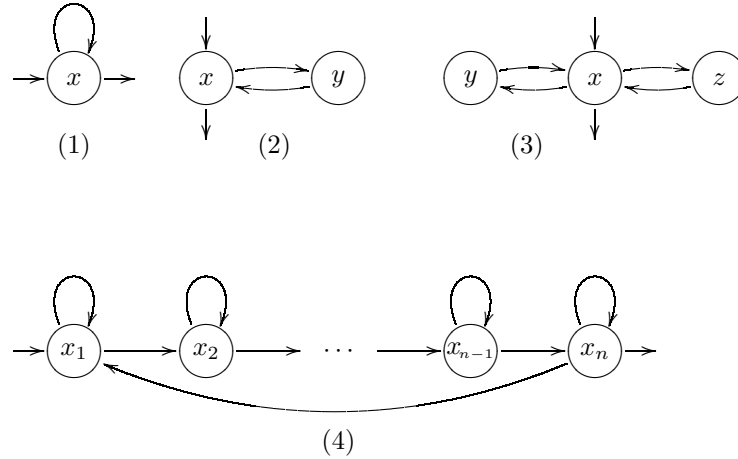


Рис. 3. Графы, соответствующие тождествам (1)–(4)

Доказательство. Легко убедиться, что для каждого из тождеств (1)–(4) графы его левой и правой частей совпадают (соответствующие графы изображены на рис. 3) и каждая переменная появляется в левой и правой частях с одинаковой чётностью. $\square$

Поясним структурный смысл тождеств (1)–(4). Начнём с серии (4). Напомним, что полугруппа называется *комбинаторной*, если все её подгруппы одноэлементны.

Предложение 5. Если полугруппа S удовлетворяет тождествам (4), то подполугруппа полугруппы S , порождённая всеми её идемпотентами, комбинаторная. Если же S удовлетворяет тождеству (1), то верно и обратное.

Доказательство. Поскольку любой идемпотент представим в виде квадрата произведения вида $x_1^2 \cdots x_n^2$, $n = 2, 3, \dots$, дают всевозможные элементы подполугруппы T , порождённой всеми идемпотентами данной полугруппы S . Если S удовлетворяет тождествам (4), то в T выполняется тождество

$$x^2 = x^3, \quad (5)$$

которому неоднородная группа удовлетворять не может. Следовательно, подполугруппа T комбинаторная.

Обратно, пусть S удовлетворяет тождеству (1). Тогда и подполугруппа T ему удовлетворяет, но в комбинаторной полугруппе это тождество влечёт (5). При наличии тождества (1) квадрат каждого элемента в полугруппе S будет идемпотентом, следовательно, значения всех произведений вида $x_1^2 \cdots x_n^2$, $n = 2, 3, \dots$, принадлежат T . Поочередно подставляя эти произведения вместо переменной в (5), получаем, что в S выполняются все тождества из серии (4). $\square$

Многообразие, порождённое всеми вполне 0-простыми полугруппами, подгруппы которых имеют экспоненту n , принято обозначать через $\mathcal{RS}_n$. Ясно, что полугруппа AC_2 принадлежит многообразию $\mathcal{RS}_2$. Роль тождеств (1)–(3) поясняет следующее предложение.

Предложение 6. *Тождества (1)–(3) образуют базис тождеств многообразия $\mathcal{RS}_2$.*

Мы не будем доказывать предложение 6, поскольку в настоящей работе оно не используется. Отметим, что различные базисы тождеств для многообразий $\mathcal{RS}_n$ приводились в [7, 15, 28]¹. К сожалению, доказательства соответствующих результатов в указанных работах нельзя считать полными, поскольку все они существенным образом опираются на одну лемму из [7], доказательство которой в [7] неверно. Мы обсудим возникающие тут нюансы по ходу доказательства следующего утверждения, играющего ключевую роль в настоящей работе.

Теорема 1. *Тождества (1)–(4) образуют базис тождеств для AC_2 .*

Доказательство проводится по схеме, предложенной в [25]. Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Слово w длины не менее 2 называется *связным*, если граф $G(w)$ сильно связан². Обозначим через $\mathcal{V}$ многообразие, заданное тождествами (1)–(4).

Лемма 7. *Если w — связное слово, а S — полугруппа из $\mathcal{V}$, то любое значение w в S будет регулярным элементом в S .*

Доказательство. Напомним, что элемент $s \in S$ *регулярен* в S , если существует такой элемент $s' \in S$, что $ss's = s$. Поэтому для доказательства леммы достаточно построить такое слово w' , что в многообразии $\mathcal{V}$ выполнено тождество $w = ww'w$. Если слово w начинается и заканчивается одной и той же переменной, то можно применить к нему тождество (2) или (в случае когда w есть квадрат переменной) тождество (1), что сразу даёт необходимое заключение. Будем поэтому считать, что w начинается с переменной x , оканчивается на переменную y и $x \neq y$.

Из связности слова w вытекает, что каждая из переменных x и y встречается в w более одного раза. Мы хотим показать, что, пользуясь тождествами (2) и (3),

¹Выписанный в предложении 6 базис тождеств многообразия $\mathcal{RS}_2$ не является специализацией приведённых в [7, 15, 28] базисов тождеств многообразий $\mathcal{RS}_n$.

²Слова, которые мы называем связными, встречаются в литературе и под другими названиями. Например, в [7] слово w длины не менее 2 называется *покрытым циклами*, если у каждого его фактора длины 2 есть вхождение в слово w , происходящее между двумя вхождениями одной и той же буквы. В терминах графа $G(w)$ это означает, что каждое ребро $x \rightarrow y$ в $G(w)$ содержится в некотором ориентированном цикле (а именно в обходе части графа $G(w)$, соответствующем фактору слова w , который начинается и кончается одной и той же буквой и содержит фактор xy). Хорошо известно (см., например, [8, теорема 8.1.5]), что ориентированный граф сильно связан тогда и только тогда, когда каждое его ребро содержится в некотором ориентированном цикле. Таким образом, слова, покрытые циклами в смысле [7], — это в точности слова, связные в нашем смысле. Ещё одно понятие, очевидным образом равносильное связности, введено в [32], где слово w длины не менее 2 названо *первичным*, если оно не может быть представлено в виде $w = w'w''$, где $\text{alph}(w') \cap \text{alph}(w'') = \emptyset$.

можно преобразовать w к слову, в котором какое-то вхождение переменной x находится правее какого-то вхождения переменной y . Для этого удобно доказать несколько более общую лемму.

Лемма 8. Пусть w — связанное слово, $x, y \in \text{alph}(w)$ и

$$w = w_1 x w_2 y w_3, \text{ причём } x \notin \text{alph}(w_2 y w_3) \text{ и } y \notin \text{alph}(w_1 x w_2). \quad (6)$$

Пользуясь тождествами (2) и (3), можно преобразовать w к такому слову $w_1 x w'_2 y w_3$, что $x, y \in \text{alph}(w'_2)$, причём какое-то вхождение переменной x в w'_2 находится правее какого-то вхождения переменной y в это слово.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если какие-то вхождения переменных x и y попадают между двумя вхождениями некоторой переменной z , то искомое преобразование достигается с помощью применения тождества (2) к фактору, ограниченному этими двумя вхождениями z :

$$\begin{aligned} w &= \underbrace{w_{11} z w_{12}}_{w_1} x w_2 y \underbrace{w_{31} z w_{32}}_{w_3} \stackrel{\text{по (2)}}{=} w_{11} (z w_{12} x w_2 y w_{31})^3 z w_{32} = \\ &= \underbrace{w_{11} z w_{12}}_{w_1} x w_2 y w_{31} z w_{12} x w_2 y w_{31} z w_{12} \underline{x w_2 y} \underbrace{w_{31} z w_{32}}_{w_3} \end{aligned}$$

(«переставленные» вхождения переменных x и y подчёркнуты дважды).

Дальнейшее доказательство будем вести индукцией по длине слова w_2 в представлении (6), т. е. по расстоянию между самым правым вхождением переменной x и самым левым вхождением переменной y . Если это расстояние равно нулю, то в слове w есть фактор xy , который в силу связности w должен быть заключён между двумя вхождениями некоторой переменной z , а тогда применим аргумент из предыдущего абзаца. База индукции установлена.

Пусть теперь в представлении (6) слово w_2 непустое. Согласно первому абзацу доказательства можно считать, что $\text{alph}(w_1 x) \cap \text{alph}(y w_3) = \emptyset$. Так как слово w связано, у слова w_2 должны быть общие переменные с каждым из слов w_1 и w_3 . Рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1. Некоторая переменная $z \in \text{alph}(w_1) \cap \text{alph}(w_2)$ встречается в слове w_2 левее некоторой переменной $t \in \text{alph}(w_2) \cap \text{alph}(w_3)$.

В этом случае искомые преобразования выглядят так:

$$\begin{aligned} w &= \underbrace{w_{11} z w_{12}}_{w_1} x \underbrace{w_{21} t w_{22} z w_{23}}_{w_2} y \underbrace{w_{31} t w_{32}}_{w_3} \stackrel{\text{по (2)}}{=} \\ &= w_{11} (z w_{12} x w_{21} t w_{22} z)^3 w_{23} y w_{31} t w_{32} = \\ &= w_{11} z w_{12} x w_{21} t w_{22} z w_{12} x w_{21} t w_{22} z w_{12} x w_{21} t w_{22} z w_{23} y w_{31} t w_{32} \stackrel{\text{по (2)}}{=} \\ &= w_{11} z w_{12} x w_{21} t w_{22} z w_{12} x w_{21} t w_{22} z w_{12} x w_{21} (t w_{22} z w_{23} y w_{31})^3 t w_{32} = \\ &= w_{11} z w_{12} x w_{21} t w_{22} z w_{12} x w_{21} \underline{t w_{22} z w_{12} x w_{21} t w_{22} z w_{23} y w_{31} t} \times \\ &\quad \times w_{22} z w_{23} y w_{31} t w_{22} z w_{23} y w_{31} t w_{32} \stackrel{\text{по (3)}}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{w_{11}zw_{12}}_{w_1} xw_{21}tw_{22}zw_{12}xw_{21}tw_{22}zw_{23}\underline{y}w_{31}tw_{22}zw_{12}\underline{x}w_{21}t \times \\
&\times w_{22}zw_{23}yw_{31}tw_{22}zw_{23}y \underbrace{w_{31}tw_{32}}_{w_3}
\end{aligned}$$

(фактор, к которому применено тождество (3), подчеркнут одной чертой, а «переставленные» вхождения переменных x и y подчеркнуты дважды).

Случай 2. Любая переменная из $\text{alph}(w_1) \cap \text{alph}(w_2)$ встречается в слове w_2 правее любой переменной из $\text{alph}(w_2) \cap \text{alph}(w_3)$.

Возьмём переменные $z \in \text{alph}(w_1) \cap \text{alph}(w_2)$ и $t \in \text{alph}(w_2) \cap \text{alph}(w_3)$. Поскольку z и t входят в слово w_2 , а ни x , ни y в это слово не входят, расстояние между самым правым вхождением переменной z и самым левым вхождением переменной t меньше, чем расстояние между самым правым вхождением переменной x и самым левым вхождением переменной y . Таким образом, к слову w и паре переменных z, t можно применить предположение индукции. Это значит, что если записать слово w в виде

$$w = v_1zv_2tv_3, \text{ где } z \notin \text{alph}(v_2tv_3) \text{ и } t \notin \text{alph}(v_1zv_2),$$

то с помощью тождеств (2) и (3) его можно будет преобразовать к такому слову $v = v_1zv_2'v_3$, что $z, t \in \text{alph}(v_2')$, причём какое-то вхождение переменной z в v_2' будет находиться правее какого-то вхождения переменной t в это слово. Но тогда для слова v и исходных переменных x, y выполняются условия рассмотренного выше случая 1. $\square$

Вернёмся к доказательству леммы 7. Напомним, что мы рассматриваем связанное слово w , которое начинается с переменной x и оканчивается на переменную y , причём $x \neq y$. Согласно лемме 8 можно считать, что какое-то вхождение переменной x в w находится правее какого-то вхождения переменной y . Итак,

$$\begin{aligned}
w &= xw_1yw_2xw_3y \stackrel{\text{по (2)}}{=} (xw_1yw_2)^3xw_3y = \\
&= xw_1yw_2xw_1yw_2xw_1yw_2xw_3y \stackrel{\text{по (2)}}{=} \\
&= xw_1yw_2xw_1yw_2xw_1(yw_2xw_3)^3y = \\
&= xw_1yw_2xw_1\underline{yw_2xw_1yw_2xw_3yw_2xw_3yw_2xw_3y} \stackrel{\text{по (3)}}{=} \\
&= xw_1\underline{yw_2xw_1yw_2xw_3yw_2xw_1yw_2xw_3yw_2xw_3y} \stackrel{\text{по (3)}}{=} \\
&= xw_1yw_2xw_3yw_2xw_3\underline{yw_2xw_1yw_2xw_3yw_2xw_3y} \stackrel{\text{по (3)}}{=} \\
&= \underbrace{xw_1yw_2xw_3y}_w \underbrace{w_2xw_1yw_2xw_3yw_2}_{w'} \underbrace{xw_1yw_2xw_3y}_w
\end{aligned}$$

(факторы, к которым применялось тождество (3), подчеркнуты). Таким образом, мы вывели из (1)–(3) тождество вида $w = ww'w$, что и требовалось. $\square$

Замечание 2. Лемма 7 является частным случаем сходного результата, сформулированного Машевицким в [7, лемма 6] (см. также [27, лемма 7]). Как уже

отмечалось, этот результат использовался (со ссылкой на [7]) в ряде важных публикаций, в частности в [15] и в [28]. Однако его доказательство в [7] ошибочно; та же ошибка повторена и при воспроизведении этого доказательства в [27]. А именно, в [7] лемма 6 выводится из леммы 5, которая утверждает, что любое слово u , покрытое циклами, можно с помощью некоторых тождеств преобразовать к слову вида $z_1 u_1 z_1 \cdots z_k u_k z_k$, где $z_1, \dots, z_k$ — переменные и $z_{i+1} \in \text{alph}(u_i)$ для всех $i = 1, \dots, k-1$ при условии, что $k > 1$. Для обоснования последнего утверждения используется индукция по $|\text{alph}(u)|$, но в ходе доказательства предположение индукции нелегитимно применяется к фактору, который, вообще говоря, не покрыт своими циклами. Слово $xuxzu$ может служить конкретным контрпримером, демонстрирующим ошибочность аргумента из [7]: здесь предположение индукции должно бы было применяться к фактору zu , который определён не покрыт своими циклами.

Отметим, что в нашем доказательстве леммы 7 использовались только тождества (1)–(3). Некоторая модификация нашего аргумента применима и для тождеств, рассматривавшихся в [7], и позволяет доказать лемму 6 из [7]. Поэтому те результаты работ [15, 28], которые зависят от этой леммы, верны. Более того, недавно третий автор настоящей работы показал, что уже тождества (1) и (2) обеспечивают регулярность значения любого связного слова; аналогичное обобщение справедливо и в ситуации, рассмотренной в [7].

Полугруппа S называется *E-отделимой*, если для любой пары p, q различных элементов из S существуют такие идемпотенты $e, f \in S$, что $pe \neq qe$ и $fp \neq fq$.

Лемма 9. Полугруппа AC_2 является *E-отделимой*.

Доказательство сводится к заполнению следующей таблицы, в которой для каждой пары p, q различных элементов полугруппы AC_2 указаны идемпотенты e и f , разделяющие p и q справа и слева соответственно. $\square$

p	c	0	a	a	a	ab	ab	ba
q	$x \in A_2$	$y \in A_2 \setminus \{0\}$	b	ab	ba	b	ba	b
e	0	a	a	ba	a	a	a	ba
pe	c	0	a	a	a	a	a	ba
qe	0	a или ba	ba	0	ba	ba	ba	0
f	0	a	a	a	ab	ab	a	ba
fp	c	0	a	a	a	ab	ab	ba
fq	0	a или ab	ab	ab	0	0	a	b

Следующий нужный нам результат получается при объединении первой части предложения 3.2 работы [25] с двойственным утверждением. Через A_0 принято обозначать подполугруппу $A_2 \setminus \{a\} = \{b, ab, ba, 0\}$ полугруппы A_2 .

Лемма 10. Пусть S — E -отделимая полугруппа и $A_0 \in \text{var } S$. Предположим, что в S выполнено такое тождество $u = v$, что слово u представимо в виде $u_1 u_2$, где $\text{alph}(u_1) \cap \text{alph}(u_2) = \emptyset$. Тогда слово v представимо в виде $v_1 v_2$, причём $\text{alph}(v_1) = \text{alph}(u_1)$, $\text{alph}(v_2) = \text{alph}(u_2)$ и в полугруппе S выполнены тождества $u_1 = v_1$ и $u_2 = v_2$.

Следующая лемма взята из [15] (см. там лемму 3.2).

Лемма 11. Если полугруппа S удовлетворяет при некотором $n \geq 1$ тождествам

$$x^2 = x^{n+2}, \quad xux = (xu)^{n+1}x, \quad xux(zx)^n = x(zx)^nux, \quad (7)$$

то для любых различных регулярных элементов $p, q \in S$ существуют вполне 0-простая полугруппа K и сюръективный гомоморфизм $\chi: S \rightarrow K$, такие что $p\chi \neq q\chi$.

Последний ингредиент доказательства — переформулировка в удобных нам терминах известного результата К. Хаутона [16, теорема 5.1].

Лемма 12. Если идемпотенты вполне 0-простой полугруппы S порождают комбинаторную подполугруппу, то имеется такое представление S в виде рисовской полугруппы матричного типа $M^0(G; I, \Delta; P)$ над группой G , что каждый элемент сэндвич-матрицы P равен либо нулю, либо единице группы G .

Доказательство теоремы 1. Напомним, что мы обозначили через $\mathcal{V}$ многообразие, заданное тождествами (1)–(4). Согласно следствию 4 имеем включение $\text{var } AC_2 \subseteq \mathcal{V}$. Рассуждая от противного, допустим, что это включение является строгим. Тогда найдётся тождество, которое выполнено в полугруппе AC_2 , но не выполнено в многообразии $\mathcal{V}$. Среди всех таких тождеств выберем тождество $u = v$ с минимальным возможным числом переменных в слове u и покажем, что слова u и v обязаны быть связными.

Предположим, что, например, слово u не является связным. Тогда его можно представить в виде $u = u_1 u_2$, где $\text{alph}(u_1) \cap \text{alph}(u_2) = \emptyset$. По лемме 9 полугруппа AC_2 E -отделима, а так как AC_2 , очевидно, содержит полугруппу A_0 в качестве подполугруппы, мы видим, что к AC_2 применима лемма 10. Согласно этой лемме $v = v_1 v_2$, причём $\text{alph}(v_1) = \text{alph}(u_1)$, $\text{alph}(v_2) = \text{alph}(u_2)$ и оба тождества $u_1 = v_1$ и $u_2 = v_2$ выполнены в полугруппе AC_2 . Поскольку $|\text{alph}(u_1)|, |\text{alph}(u_2)| < |\text{alph}(u)|$, то по выбору тождества $u = v$ получаем, что тождества $u_1 = v_1$ и $u_2 = v_2$ должны выполняться и в многообразии $\mathcal{V}$. Но ясно, что тождество $u = v$ является следствием этих двух тождеств, поэтому оно также должно быть выполнено в $\mathcal{V}$, что невозможно. Аналогично проверяется, что и слово v необходимо является связным.

Пусть теперь S — полугруппа из $\mathcal{V}$, в которой слова u и v при некоторой интерпретации переменных принимают различные значения p и q . По лемме 7 эти значения будут регулярными элементами. Сравнивая тождества, определяющие многообразие $\mathcal{V}$, с тремя тождествами (7), фигурирующими в условии леммы 11, можно заметить, что при $n = 2$ первые два из них совпадают с тождествами (1) и (2) соответственно, а третье без труда выводится из тождества (3). Поэтому

лемма 11 применима к полугруппе S и её регулярным элементам p и q . Таким образом, существуют вполне 0-простая полугруппа K и сюръективный гомоморфизм $\chi: S \rightarrow K$, такие что $p\chi \neq q\chi$. Заметим, что элементы $p\chi$ и $q\chi$ также являются значениями слов u и v при некоторой интерпретации переменных, так что тождество $u = v$ не выполняется в полугруппе K . С другой стороны, будучи гомоморфным образом полугруппы $S \in \mathcal{V}$, полугруппа K принадлежит многообразию $\mathcal{V}$. Таким образом, мы можем использовать K вместо S ; иначе говоря, полугруппу S из «зазора» между многообразиями $\text{var } AC_2$ и $\mathcal{V}$ можно считать вполне 0-простой, что мы и будем делать.

Согласно предложению 5 идемпотенты в S порождают комбинаторную подполугруппу, но тогда по лемме 12 имеется такое представление S в виде рисовской полугруппы матричного типа $M^0(G; I, \Lambda; P)$ над группой G , что каждый элемент сэндвич-матрицы P равен либо нулю, либо единице группы G . Пусть T — рисовская полугруппа матричного типа $M^0(E; I, \Lambda; P)$ над тривиальной группой $E = \{1\}$ с той же сэндвич-матрицей P . Хорошо известно (см., например, [25, предложение 1.2]), что вполне 0-простая полугруппа над тривиальной группой принадлежит многообразию, порождённому полугруппой A_2 ; в частности, $T \in \text{var } A_2$. Группа G изоморфна максимальной подгруппе в S , следовательно, $G \in \mathcal{V}$. Поэтому G удовлетворяет тождеству (1) и, следовательно, является группой экспоненты 2. Хорошо известно, что любая группа экспоненты 2 принадлежит многообразию, порождённому группой C_2 ; в частности, $G \in \text{var } C_2$.

Легко проверяется, что отображение $T \times G \rightarrow S$, при котором паре $((i, 1, \lambda), g) \in T \times G$ ставится в соответствие элемент $(i, g, \lambda) \in S$, является сюръективным гомоморфизмом. Поскольку $T \in \text{var } A_2$ и $G \in \text{var } C_2$, имеем

$$T \times G \in \text{var}(A_2 \times C_2) = \text{var } AC_2.$$

Тогда $S \in \text{var } AC_2$, что противоречит выбору S . Теорема доказана. $\square$

3. Полиномиальный алгоритм для задачи $\text{Var-Memb}(AC_2)$

Пусть дана конечная полугруппа S , $|S| = n$, и требуется проверить, принадлежит ли S многообразию $\text{var } AC_2$. Согласно теореме 1 для этого необходимо и достаточно проверить, удовлетворяет ли S тождествам (1)–(4). Проверка тождеств (1)–(3) требует времени порядка $O(n^3)$ (см. доказательство леммы 1). Непосредственная проверка бесконечной серии тождеств (4) невозможна, но тут мы воспользуемся структурным эквивалентом, указанным в предложении 5: необходимо и достаточно проверить, что подполугруппа полугруппы S , порождённая всеми её идемпотентами, комбинаторная. Покажем, что и эту проверку можно произвести за время порядка $O(n^3)$.

Возводя каждый элемент полугруппы S в квадрат, мы можем за время $O(n)$ найти множество всех идемпотентов в S . Обозначим это множество через T_1 и

определим индуктивно $T_{i+1} = T_i T_1$. Ясно, что построение каждого множества T_{i+1} требует не более n^2 шагов. Кроме того, легко понять, что $T_i \subseteq T_{i+1}$ и что если число k таково, что $T_k = T_{k+1}$, то $T_k = T_{k+l}$ для всех l , откуда следует, что T_k является подполугруппой в S . Так как по построению каждый элемент из T_k есть произведение идемпотентов, T_k совпадает с подполугруппой полугруппы S , порождённой всеми её идемпотентами. Поскольку строго возрастающая цепочка подмножеств в S не может иметь длину больше n , получаем, что $k \leq n$, и подполугруппа T_k будет построена указанным способом за время порядка $O(n^3)$. После этого остаётся проверить, является ли T_k комбинаторной полугруппой, для чего необходимо и достаточно проверить, выполняется ли в T_k тождество (5) (см. доказательство предложения 5). Последняя проверка может быть выполнена за время $O(n)$.

Итак, нами доказан основной результат работы.

Теорема 2. *Шестиэлементная полугруппа AC_2 не имеет конечного базиса тождеств, но порождает многообразие, принадлежность конечной полугруппы S которому может быть проверена за время порядка $O(|S|^3)$.*

Исследования первого и второго авторов были поддержаны программой Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы», проект № 2.1.1/3537, и грантом РФФИ № 09-01-12142.

Литература

- [1] Волков М. В. О конечной базисуемости многообразий полугрупп // Мат. заметки. — 1989. — Т. 45, вып. 3. — С. 12—23.
- [2] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.
- [3] Клейман Ю. Г. О базисе произведения многообразий групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973. — Т. 37, № 1. — С. 95—97.
- [4] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. — М.: Мир, 1972.
- [5] Машевицкий Г. И. О тождествах в многообразиях вполне простых полугрупп над абелевыми группами // Современная алгебра. Республик. сб. науч. тр. — Л.: Ленингр. гос. пед. ин-т, 1978. — С. 81—89.
- [6] Машевицкий Г. И. Пример конечной полугруппы, не имеющей неприводимого базиса тождеств в классе вполне 0-простых полугрупп // Успехи мат. наук. — 1983. — Т. 38, № 2. — С. 211—213.
- [7] Машевицкий Г. И. Многообразия, порождённые вполне 0-простыми полугруппами // Полугруппы и их гомоморфизмы. Межвуз. сб. науч. тр. — Л.: РГПУ им. А. И. Герцена, 1991. — С. 53—62.
- [8] Оре О. Теория графов. — М.: Наука, 1980.
- [9] Трахтман А. Н. Графы тождеств одной вполне 0-простой пятиэлементной полугруппы // Свердловск: Урал. политехн. ин-т, 1981. — Деп. в ВИНТИ 07.12.81; № 5558.

- [10] Трахтман А. Н. Конечность базиса тождеств пятиэлементных полугрупп // Полугруппы и их гомоморфизмы. Межвуз. сб. науч. тр. — Л.: РГПУ им. А. И. Герцена, 1991. — С. 76—97.
- [11] Шеврин Л. Н., Волков М. В. Тождества полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика — 1985. — № 11. — С. 3—47.
- [12] Bergman C., Slutzki G. Complexity of some problems concerning varieties and quasi-varieties of algebras // SIAM J. Comput. — 2000. — Vol. 30, no. 2. — P. 359—382.
- [13] Burris S., Sankappanavar H. P. A Course in Universal Algebra. — Berlin: Springer, 1981.
- [14] Eilenberg S. Automata, Languages and Machines. Vol. B. — New York: Academic Press, 1976.
- [15] Hall T. E., Kublanovskii S. I., Margolis S., Sapir M. V., Trotter P. G. Algorithmic problems for finite groups and finite 0-simple semigroups // J. Pure Appl. Algebra. — 1997. — Vol. 119, no. 1. — P. 75—96.
- [16] Houghton C. H. Completely 0-simple semigroups and their associated graphs and groups // Semigroup Forum. — 1977. — Vol. 14, no. 1. — P. 41—67.
- [17] Jackson M., McKenzie R. Interpreting graph colorability in finite semigroups // Int. J. Algebra Comput. — 2006. — Vol. 16, no. 1. — P. 119—140.
- [18] Kalicki J. On comparison of finite algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 3, no. 1. — P. 36—40.
- [19] Kharlampovich O. G., Sapir M. V. Algorithmic problems in varieties // Int. J. Algebra Comput. — 1995. — Vol. 5, no. 4-5. — P. 379—602.
- [20] Klíma O. Complexity issues of checking identities in finite monoids // Semigroup Forum. — 2009. — Vol. 79, no. 3. — P. 435—444.
- [21] Kozik M. On some complexity problems in finite algebras: Ph.D. Thesis. — Nashville: Vanderbilt Univ., 2004.
- [22] Kozik M. Computationally and algebraically complex finite algebra membership problems // Int. J. Algebra Comput. — 2007. — Vol. 17, no. 8. — P. 1635—1666.
- [23] Kozik M. A 2EXPTIME complete varietal membership problem // SIAM J. Comput. — 2009. — Vol. 38, no. 6. — P. 2443—2467.
- [24] Lee E. W. H. Identity bases for some non-exact varieties // Semigroup Forum. — 2004. — Vol. 68, no. 3. — P. 445—457.
- [25] Lee E. W. H., Volkov M. V. On the structure of the lattice of combinatorial Rees—Sishkevich varieties // Proc. int. conf. «Semigroups and Formal Languages» in honour of the 65th birthday of Donald B. McAlister. — New Jersey: World Scientific, 2007. — P. 164—187.
- [26] Lee E. W. H., Volkov M. V. Limit varieties generated by completely 0-simple semigroups. — To appear.
- [27] Mashevitsky G. I. Matrix rank 1 semigroup identities // Commun. Algebra. — 1994. — Vol. 22, no. 9. — P. 3553—3562.
- [28] Mashevitsky G. I. The pseudovariety generated by completely 0-simple semigroups // Semigroup Forum. — 1997. — Vol. 54, no. 1. — P. 83—91.
- [29] Oates S., Powell M. B. Identical relations in finite groups // J. Algebra. — 1964. — Vol. 1, no. 1. — P. 11—39.

- [30] Papadimitriou C. H. Computational Complexity. — Reading: Addison-Wesley, 1994.
- [31] Perkins P. Bases for equational theories of semigroups // J. Algebra. — 1969. — Vol. 11, no. 2. — P. 298—314.
- [32] Pollák G. Arithmetics in free semigroups // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2002. — Vol. 68, no. 1-2. — P. 107—115.
- [33] Sapir M. V. On Cross semigroup varieties and related questions // Semigroup Forum. — 1991. — Vol. 42, no. 1. — P. 345—364.
- [34] Seif S. The Perkins semigroup has co-NP-complete term-equivalence problem // Int. J. Algebra Comput. — 2005. — Vol. 15, no. 2. — P. 317—326.
- [35] Székely Z. Computational complexity of the finite algebra membership problem for varieties // Int. J. Algebra Comput. — 2002. — Vol. 12, no. 6. — P. 811—823.
- [36] Trahtman A. N. The finite basis question for semigroups of order less than six // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27, no. 1-4. — P. 387—389.
- [37] Trahtman A. N. Identities of a five-element 0-simple semigroup // Semigroup Forum. — 1994. — Vol. 48, no. 3. — P. 385—387.
- [38] Volkov M. V. The finite basis problem for finite semigroups // Sci. Math. Japon. — 2001. — Vol. 53, no. 1. — P. 171—199.