Rolling simplexes and their commensurability* (законы механики как проблема выбора между метрикой и мерой)

О. В. ГЕРАСИМОВА, Ю. П. РАЗМЫСЛОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ynona_olga@rambler.ru

УДК 512.543.7+512.544.33+512.815.8+517.984.5+514.84

Ключевые слова: абстрактная проективная плоскость, роллинг, симплексы, соизмеримость, несжимаемость.

Аннотация

Трудно теперь установить, кто первым заметил, что первый закон Ньютона можно трактовать как второй закон Кеплера для любого наблюдателя, находящегося вне прямой, по которой свободно движется тело, и вогнал гвоздь в крышку гроба для метрики. Однако не вызывает сомнения, что каждое новое поколение, не обращая никакого внимания на золотое правило механики и правило рычага, с упорством, заслуживающим более достойного применения, извлекает её из могилы. В работе мы приводим очередные (и, на наш взгляд, веские) аргументы в пользу того, что во всём следует знать меру, в частности, и на определённом этапе обучения планиметрии не мешает в задачах на построение заменить циркуль угольником.

Abstract

O. V. Gerasimova, Yu. P. Razmyslov, Rolling simplexes and their commensurability (laws of mechanics as a problem of choice between metrics and measure), Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 123—126.

It can hardly be determined who noticed that Newton's first law could be interpreted as Kepler's second law for any observer, located out of the line trajectory of a freely moving body, and hammered the nail into the lit for metrics. However, every next generation, paying no attention to "Golden Rule of Mechanics" and "Lever Rule," with perseverance worthy of better cause has extracted it from the grave. In this paper, we bring forward additional (and forcible, from our standpoint) arguments in direction that we should always study the original measure of things, in particular, we think that setsquare can be most advantageously substituted for compasses at a certain stage of teaching plane geometry at school.

Рене Декарту посвящается

Пусть на множестве M задана структура абстрактной проективной плоскости, т. е. в множестве всех подмножеств 2^M множества M выделено подмноже-

*Назад в будущее: роллинг как процесс формирования сущностей.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 123—126.

ство L (см. [2]), элементы l которого принято называть прямыми, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

(P0) каждая прямая содержит не менее трёх точек;
(P1) через любые две точки $X, Y \in M$ проходит ровно одна прямая $l \in L$;
(P2) любые две прямые $l_1, l_2 \in L$ пересекаются ровно в одной точке.

Для произвольной прямой $l \in L$ положим $M_l \overset{\text{def}}{=} M \setminus l$, $L_l \overset{\text{def}}{=} L \setminus \{l\}$ и, как обычно, назовём M_l с системой прямых L_l аффинной картой проективной плоскости M, а l — бесконечно удалённой прямой. Прямые $l_1, l_2 \in L_l$ аффинной плоскости M_l принято называть параллельными, если точка их пересечения лежит на бесконечно удалённой прямой l.

Предложение. *Пусть точки A, B, C аффинной плоскости M_l не лежат на одной прямой. Тогда любые три точки A', B', C' за конечное число шагов можно перекатить* (*с сохранением на каждом шаге «площади $\Delta A'B'C'$» в интуитивном понимании*)[1] *так, чтобы результат перекатывания точек A', B' совпал с A и B соответственно, а точка C' оказалась на одной прямой с точками B и C.*

Очевидно, что в привычной модели аффинной плоскости, изучаемой в школьном курсе планиметрии, для обсуждаемого процесса катания справедливы следующие утверждения.

(R0) (аксиома несжимаемости). Если точки A, B, C аффинной плоскости M_l не лежат на одной прямой и точка D находится на одной прямой с B и C, но не совпадает с C, то точки A, B, D нельзя перекатить в точки A, B, C соответственно.

(R1) (аксиома слабой аддитивности). Если в аффинной плоскости M_l тройки точек S, A, B и S, A', B' лежат на разных прямых, а прямые, проходящие через A, A' и B, B' параллельны, то точки S, A', B можно перекатить в точки S, A, B' соответственно.

(R2) (аксиома аддитивности). Если в аффинной плоскости M_l точки каждой из троек A, B, C и A', B', C' не лежат на одной прямой, $D \in BC$, $D' \in B'C'$ и тройки A, B, D и A, D, C можно перекатить в тройки A', B', D' и A', D', C' соответственно, то тройка A, B, C перекатывается в A', B', C'.

Теорема 1[2]**.** *Пусть для какой-то прямой l в аффинной карте M_l выполняются свойства* (R0), (R1)*. Тогда для любых пяти точек A, B, C, D, E абстрактной проективной плоскости M, никакие три из которых не лежат на одной прямой, прямые*

$$l_1 \overset{\text{def}}{=} \text{прямая, определяемая точками } AC \cap EB,\ AB \cap EC,$$

[1]За шаг роллинга мы «передвигаем» любую точку из тройки параллельно прямой, проходящей через две оставшиеся точки.

[2]Построение угольником и линейкой касательного расслоения кривой второго порядка по пяти её точкам.

$$l_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{прямая, определяемая точками } AC \cap ED,\ AD \cap EC,$$

$$l_3 \stackrel{\text{def}}{=} \text{прямая, определяемая точками } AD \cap EB,\ AB \cap ED$$

пересекаются в одной точке S*, а тройки* S, B, B', S, C, C', S, D, D', *где* $B' \stackrel{\text{def}}{=} AB \cap SE$, $C' \stackrel{\text{def}}{=} AC \cap SE$, $D' \stackrel{\text{def}}{=} AD \cap SE$, *перекатываются друг в друга в аффинной карте* M_{AE}.

Мы умеем обосновывать эту теорему непосредственным вычислением, основанным на следующем наблюдении.

Теорема 2. *Пусть в абстрактной аффинной плоскости выполняются свойства* (R0), (R1). *Тогда в ней выполняется аксиома аддитивности* (R2)*, а сама проективная плоскость дезаргова, и её координатное тело коммутативно.*

Доказательство этой теоремы можно разбить на три шага.

1. Если в аффинной карте M_l выполняется условие (R0), то для любых трёх точек $S, A, B \in M_l$, лежащих на одной прямой, существует единственное проективное преобразование $\gamma\colon M \to M$, называемое *гомотетией аффинной плоскости* M_l, которое оставляет на месте все точки прямой l и точку S, а A переводит в B.
2. Если в аффинной карте M_l выполняется условие (R0), то для любых двух точек $A, B \in M_l$ существует единственное проективное преобразование $\nu\colon M \to M$, называемое *параллельным переносом аффинной плоскости* M_l на вектор $\overline{AB}$, которое оставляет на месте все точки прямой l, отображает A в B, а любую прямую, проходящую через точку $S \stackrel{\text{def}}{=} l \cap AB$, переводит в себя. При этом ν представимо в виде суперпозиции двух гомотетий из различных центров.
3. Для любых трёх точек S, A, B, не лежащих на одной прямой дезарговой аффинной плоскости M_l, и произвольных её гомотетий γ, δ с общим центром S тройка точек S, γA, δB перекатывается в тройку S, A, $\gamma\big(\delta(B)\big)$, тройка S, δA, γB перекатывается в S, A, $\delta\big(\gamma(B)\big)$, а тройки S, γA, δB и S, δA, γB образуют конфигурацию, указанную в (R1).

Обоснование каждого из этих шагов вполне по силам любому, кто имеет вкус к геометрическим теоретико-множественным рассуждениям. Читателя же, более искушённого в алгебре и алгебраических вычислениях, мы не хотим лишить удовольствия самостоятельно установить истинность следующего утверждения.

(K2) Аксиома аддитивности (R2) (в частности (R1)) является следствием аксиомы несжимаемости (R0).

(Необходимо провести рутинную проверку в двумерном пространстве над телом выполнимости условия (R0), которая докажет коммутативность рассматриваемого тела, что автоматически влечёт (R1), (R2).)

В заключение отметим, что в алгебраических и геометрических построениях роллинг принимает иногда весьма причудливые формы и обличья (см. работу [1] о дьявольской соизмеримости).

Литература

[1] Качковский А. О., Размыслов Ю. П. W-соизмеримость // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2007. — № 5. — С. 69—70.

[2] Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962.