Дистрибутивность, бинарные соотношения и стандартные базисы*

Е. С. ГОЛОД
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: golod@mech.math.msu.su

УДК 512.552+512.664

Ключевые слова: дистрибутивная решётка подмодулей, модуль сизигий, бинарные соотношения, стандартный базис, базис Грёбнера, S-многочлен, регулярная последовательность, идеал линейного типа.

Аннотация

В предыдущих статьях автора обсуждались связи между порождаемостью модулей сизигий бинарными соотношениями, свойством коммутативного кольца быть арифметическим (т. е. обладать дистрибутивной решёткой идеалов) и использованием так называемых S-многочленов в теории стандартных базисов. В настоящей работе эти связи рассматриваются в более общем контексте. В качестве иллюстрации возможной полезности этих рассмотрений приводится использующее их простое доказательство одного хорошо известного факта из коммутативной алгебры.

Abstract

E. S. Golod, Distributivity, binary relations, and standard bases, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 127—134.

In the author's previous papers, the connection between generating syzygy modules by binary relations, the property of a commutative ring to be arithmetical (that is to have a distributive ideal lattice), and the use of the so-called S-polynomials in the standard basis theory were discussed. In this note, these connections are considered in a more general context. As an illustration of the usefulness of these considerations, a simple proof of some well-known fact from commutative algebra is given.

1. Связь между порождаемостью модуля сизигий бинарными соотношениями и дистрибутивностью

Мы рассматриваем (левый) модуль M над произвольным ассоциативным кольцом R (с единицей). Пусть $\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — некоторое семейство элементов из M. Соотношение $\sum\limits_\alpha r_\alpha m_\alpha = 0$ (разумеется, здесь лишь конечное число коэффициентов $r_\alpha \in R$ отлично от нуля) называется бинарным, если не более

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 08-01-00297а.

двух элементов среди r_α отличны от нуля. Через (m_α) обозначаем подмодуль, порождённый семейством $\{m_\alpha\}$.

Лемма 1. *Для заданного набора из n элементов $m_1, \ldots, m_n \in M$ и $k = 1, \ldots, n-1$ следующие два условия равносильны*:

1) *модуль сизигий для $m_1, \ldots, m_n$ порождается бинарными соотношениями, соотношениями между $m_1, \ldots, m_k$ и соотношениями между $m_{k+1}, \ldots, m_n$*;
2) $(m_1, \ldots, m_k) \cap (m_{k+1}, \ldots, m_n) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant k,\ k+1 \leqslant j \leqslant n} (m_i) \cap (m_j)$.

Доказательство. Пусть выполняется условие 1) и

$$m = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} r_i m_i = \sum_{k+1 \leqslant j \leqslant n} r_j m_j \in (m_1, \ldots, m_k) \cap (m_{k+1}, \ldots, m_n).$$

Соотношение

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} r_i m_i - \sum_{k+1 \leqslant j \leqslant n} r_j m_j = 0 \text{ —}$$

сумма некоторых соотношений между $m_1, \ldots, m_k$, между $m_{k+1}, \ldots, m_n$ и некоторого набора бинарных соотношений $r_{ij} m_i - r_{ji} m_j = 0$, где $1 \leqslant i \leqslant k$ и $k+1 \leqslant j \leqslant n$. Но это означает, что

$$m = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k,\ k+1 \leqslant j \leqslant n} r_{ij} m_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant n} r_{ji} m_j \in \sum_{1 \leqslant i \leqslant k,\ k+1 \leqslant j \leqslant n} (m_i) \cap (m_j),$$

так как $r_{ij} m_i = r_{ji} m_j \in (m_i) \cap (m_j)$.

Пусть выполняется 2) и дано соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} r_i m_i = 0.$$

Тогда

$$m = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} r_i m_i = -\sum_{k+1 \leqslant j \leqslant n} r_j m_j \in$$
$$\in (m_1, \ldots, m_k) \cap (m_{k+1}, \ldots, m_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k,\ k+1 \leqslant j \leqslant n} (m_i) \cap (m_j),$$

т. е.

$$m = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k,\ k+1 \leqslant j \leqslant n} m_{ij},$$

где $m_{ij} = r_{ij} m_j = r_{ji} m_i \in (m_i) \cap (m_j)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k+1 \leqslant j \leqslant n$, откуда следует, что

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \Bigl(r_i - \sum_{j=k+1}^{n} r_{ij}\Bigr) m_i = 0, \qquad \sum_{k+1 \leqslant j \leqslant n} \Bigl(r_j + \sum_{i=1}^{k} r_{ji}\Bigr) m_j = 0.$$

Исходное соотношение является суммой этих соотношений и бинарных соотношений $r_{ji} m_i - r_{ij} m_j = 0$. $\square$

Как непосредственные следствия этой леммы получаем следующие утверждения.

Предложение 1. *Если модуль сизигий для* $m_1, \ldots, m_n$ *порождается бинарными соотношениями, то для любой перестановки* $\pi \in S_n$ *и для любого* $k = 1, \ldots, n-1$

$$(m_{\pi 1}, \ldots, m_{\pi k}) \cap (m_{\pi(k+1)}, \ldots, m_{\pi n}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k, k+1 \leqslant j \leqslant n} (m_{\pi i}) \cap (m_{\pi j}).$$

Предложение 2. *Для элементов* $m_1, \ldots, m_n$ *следующие условия равносильны*:

1) *для всякого* $k = 2, \ldots, n-1$ *модуль сизигий для* $m_1, \ldots, m_{k+1}$ *порождается бинарными соотношениями*;
2) *для всякого* $k = 2, \ldots, n-1$

$$(m_1, \ldots, m_k) \cap (m_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} (m_i) \cap (m_{k+1}).$$

Предположение, что модуль сизигий для некоторого семейства элементов порождается бинарными соотношениями, не влечёт за собой выполнение этого свойства для его подсемейств. Например, для любых $r_1, \ldots, r_{n-1} \in R$ и $m \in M$ модуль сизигий для $m_1 = rm, \ldots,$ $m_{n-1} = r_{n-1}m,$ $m_n = m$ порождается бинарными соотношениями $m_i - r_i m_n = 0$ и соотношениями вида $rm_n = 0$, но это не имеет никаких последствий для $m_1, \ldots, m_{n-1}$. В связи с этим будем говорить, что модуль сизигий для некоторого семейства элементов строго порождается бинарными соотношениями, если для любого его подсемейства модуль сизигий порождается бинарными соотношениями (между элементами этого подсемейства).

Предложение 3. *Модуль сизигий для семейства* $\{m_\alpha\}$ *строго порождается бинарными соотношениями, если и только если для любых подмодулей* M_1, M_2, M_3, *обладающих системами порождающих, принадлежащих семейству* $\{m_\alpha\}$, *выполняется свойство дистрибутивности* $(M_1 + M_2) \cap M_3 = M_1 \cap M_3 + M_2 \cap M_3$.

Предложение 4. *Следующие условия для модуля* M *равносильны*:

1) *для любого семейства элементов в* M *его модуль сизигий порождается бинарными соотношениями*;
2) *решётка подмодулей модуля* M *дистрибутивна.*

Это предложение обобщает результат из [1].

Для применений к стандартным базисам представляет интерес градуированный вариант предыдущих рассмотрений. Пусть $R = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R_\gamma$ — кольцо, градуированное посредством (записываемой мультипликативно) полугруппы Γ (с единицей e), и $M = \bigoplus_{\delta \in \Delta} M_\delta$ — градуированный (левый) R-модуль с градуировкой посредством (левого) Γ-полигона Δ. Так как свойство дистрибутивности для однородных подмодулей в M сводится к выполнению этого свойства на каждой однородной компоненте, то получаем следующий результат.

Предложение 5. *Для любого семейства однородных элементов в M модуль сизигий порождается бинарными соотношениями, если и только если для всякой однородной компоненты M_δ, $\delta \in \Delta$, решётка R_e-подмодулей в M_δ дистрибутивна.*

В теории классических базисов Грёбнера рассматривается ситуация, в которой все однородные компоненты M являются циклическими R-модулями. В этом случае имеем следующее утверждение.

Предложение 6. *Если все однородные компоненты M_δ-градуированного R-модуля M являются циклическими R_e-модулями и кольцо R_e имеет дистрибутивную решётку левых идеалов, то для любого семейства однородных элементов в M модуль сизигий порождается бинарными соотношениями.*

2. Связь с теорией стандартных базисов

Начнём с описания ситуации, в которой ниже рассматриваются стандартные базисы. Оно распространяет на случай модулей подход, использованный в [3] для колец. Пусть R — алгебра (с единицей) над коммутативным кольцом K, фильтрованная посредством мультипликативно записываемой упорядоченной полугруппы Γ (с единицей e), и M — левый R-модуль, фильтрованный посредством упорядоченного (левого) Γ-полигона Δ. Предполагается, что порядок на Γ и Δ удовлетворяет условию минимальности. Рассматриваемые фильтрации (посредством K-подмодулей) $F = \{F_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$, и $G = \{G_\delta\}$, $\delta \in \Delta$, на R и M соответственно предполагаются возрастающими и исчерпывающими. Они определяют ассоциированную градуированную K-алгебру $\bar{R} = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} \bar{R}_\gamma$, где $\bar{R}_\gamma = F_\gamma / \bigcup\limits_{\gamma'<\gamma} F_{\gamma'}$, и аналогично ассоциированный градуированный $\bar{R}$-модуль $\bar{M} = \bigoplus\limits_{\delta\in\Delta} M_\delta$.

Для всякого ненулевого элемента $m \in M$ его старший член $w(m)$ определяется как образ m в $\bar{M}_\delta$, где $\delta = \min\{\delta' \in \Delta \mid m \in G_{\delta'}\}$. В этом случае δ называется степенью элемента m и обозначается через $\deg(m)$ (и, таким образом, совпадает со степенью $w(m)$ как элемента Δ-градуированного модуля $\bar{M}$). Всегда $\deg(rm) \leqslant \deg(r)\deg(m)$, и $w(r)w(m) = w(rm)$, если $\deg(rm) = \deg(r)\deg(m)$, и $w(r)w(m) = 0$, если $\deg(rm) < \deg(r)\deg(m)$. Если рассматривается подмодуль в M (в частности, левый идеал в R) с индуцированной фильтрацией, то его ассоциированный градуированный модуль отождествляется с его подмодулем (соответственно левым идеалом) старших членов в $\bar{M}$ (соответственно в $\bar{R}$). Аналогично предыдущему можно рассматривать в качестве M Δ-фильтрованный R-R'-бимодуль, где R и R' — это соответственно Γ- и Γ'-фильтрованные K-алгебры и Δ — упорядоченный Γ-Γ'-биполигон. В этом случае ассоциированный градуированный объект $\bar{M}$ рассматривается как градуированный $\bar{R}$-$\bar{R}'$-бимодуль. В частности, когда M — (двусторонний) идеал в R (именно этот случай рассматривался в [3]), ассоциированный градуированный бимодуль $\bar{M}$ отождествляется с идеалом старших членов идеала M.

Семейство ненулевых элементов $\{m_\alpha\}$ в фильтрованном модуле M называется стандартным базисом, если семейство его старших членов $\{w(m_\alpha)\}$ порождает ассоциированный градуированный модуль $\bar{M}$. Для характеризации стандартных базисов ниже используется свойство поднимаемости соотношений, более слабое, чем практически используемое свойство редуцируемости ассоциируемых с соотношениями элементов, но обладающее тем преимуществом, что поднимаемые соотношения образуют подмодуль в модуле сизигий, из чего сразу видно, что его достаточно проверять для какой-либо системы порождающих модуля сизигий. Семейство $m = \{m_\alpha\}$, $\alpha \in A$, задаёт Δ-фильтрацию $\{G^m_\delta\}$ на свободном R-модуле $R^{(A)}$, где

$$G^m_\delta = \bigl\{(r_\alpha) \in R^{(A)}\colon \deg(r_\alpha)\deg(m_\alpha) \leqslant \delta \text{ или } r_\alpha = 0 \text{ для всех } \alpha \in A\bigr\}.$$

Ассоциированный градуированный модуль естественным образом отождествляется с градуированным $\bar{R}$-модулем

$$\bar{R}^{(A)} = \bigoplus_{\delta\in\Delta}\bigl(\bar{R}^{(A)}\bigr)_\delta,$$

где

$$\bigl(\bar{R}^{(A)}\bigr)_\delta = \bigl\{(\bar{r}_\alpha) \in \bar{R}^{(A)}\colon \bar{r}_\alpha \in \bar{R} \text{ однородный и } \deg(\bar{r}_\alpha)\deg\bigl(w(m_\alpha)\bigr) = \delta \\ \text{или } \bar{r}_\alpha = 0 \text{ для всех } \alpha \in A\bigr\}.$$

При этом отождествлении подмодуль старших членов модуля сизигий для $\{m_\alpha\}$ отождествляется с некоторым однородным подмодулем в $\bar{R}^{(A)}$. Однородные соотношения из модуля сизигий для $\{w(m_\alpha)\}$, содержащиеся в этом подмодуле, называются поднимаемыми. Другими словами, однородное соотношение $\sum\limits_\alpha \bar{r}_\alpha w(m_\alpha) = 0$ степени δ поднимаемо, если существует такое соотношение $\sum\limits_\alpha r_\alpha m_\alpha = 0$, что $\deg(r_\alpha)\deg(m_\alpha) \leqslant \delta$ для всех $\alpha \in A$, причём равенство имеет место в том и только том случае, когда $\bar{r}_\alpha \neq 0$, и в этом случае $w(r_\alpha) = \bar{r}_\alpha$.

Чтобы ввести процедуру редуцирования, для всякого $\gamma \in \Gamma$ выберем в F_γ произвольную систему представителей $\tilde{r}$ для $\bar{r} \in \bar{R}_\gamma$ с единственным ограничением, что $\tilde{0} = 0$ (т. е. $w(\tilde{r}) = \bar{r}$ для всякого $0 \neq \bar{r} \in \bar{R}_\gamma$). Если гомоморфизм K-модулей $F_\gamma \to \bar{R}_\gamma$ расщепляется (например, если K — поле), то отображение $\bar{r} \mapsto \tilde{r}$ естественно выбрать K-линейным. Пусть дано семейство элементов $\{m_\alpha\}$ в M. Элемент $0 \neq m \in M$, для которого $w(m)$ не содержится в R-подмодуле, порождённом семейством $\{w(m_\alpha)\}$, называется нередуцируемым относительно $\{m_\alpha\}$. В противном случае, т. е. если $w(m) = \sum\limits_\alpha \bar{r}_\alpha w(m_\alpha)$ (с однородными $\bar{r}_\alpha$), (определённый неоднозначно) элемент $m - \sum\limits_\alpha \tilde{r}_\alpha m_\alpha$ называется редукцией m относительно $\{m_\alpha\}$. Ясно, что

$$\deg\left(m - \sum_\alpha \tilde{r}_\alpha m_\alpha\right) < \deg(m).$$

Поэтому после конечного числа редукций получаем нередуцируемый элемент или 0. В последнем случае говорим, что элемент m редуцируем к 0 относительно $\{m_\alpha\}$ (при некотором выборе последовательности редукций, так как результат может зависеть от этого выбора). Если дано некоторое однородное соотношение $\sum\limits_\alpha \bar{r}_\alpha w(m_\alpha) = 0$, то оно заведомо поднимаемо, если элемент $\sum\limits_\alpha \tilde{r}_\alpha m_\alpha$ редуцируем к нулю относительно $\{m_\alpha\}$.

Для применения предыдущих рассмотрений к случаю Δ-фильтрованного R-R'-бимодуля M необходимо небольшое уточнение. В этом случае, как обычно, соотношения между элементами в M и $\bar{M}$ интерпретируются как соотношения между элементами модулей над обёртывающими алгебрами $R \otimes_R R'^{\mathrm{op}}$ и $\bar{R} \otimes_R \bar{R}'^{\mathrm{op}}$ соответственно. Как и выше, для заданного семейства элементов $m = \{m_\alpha\}$ вводим Δ-фильтрацию $\{G^m_\delta\}$ на $(R \otimes_R R'^{\mathrm{op}})^{(A)}$, где $G^m_\delta = \bigoplus\limits_\alpha (G^m_\delta)_\alpha$ и $(G^m_\delta)_\alpha$ есть сумма образов в $R \otimes_K R'^{\mathrm{op}}$ тензорных произведений $F_\gamma \otimes_K F'_{\gamma'}$, таких что $\gamma \deg(m_\alpha)\gamma' \leqslant \delta$, и вводим Δ-градуировку на $(\bar{R} \otimes_K \bar{R}'^{\mathrm{op}})^{(A)}$, полагая

$$(\bar{R} \otimes \bar{R}'^{\mathrm{op}})^{(A)}_\delta = \bigoplus_\alpha \left[\bigoplus_{(\gamma,\gamma')\colon \gamma \deg(m_\alpha)\gamma' = \delta} \bar{R}_\gamma \otimes_K \bar{R}'_{\gamma'} \right].$$

Имеется естественный сюръективный однородный гомоморфизм φ Δ-градуированного модуля $(\bar{R} \otimes_K \bar{R}'^{\mathrm{op}})^{(A)}$ в ассоциированный градуированный модуль Δ-фильтрованного модуля $(R \otimes_K R'^{\mathrm{op}})^{(A)}$. Поднимаемые соотношения между элементами семейства $\{w(m_\alpha)\}$ — это те однородные соотношения, которые φ отображает в ассоциированный градуированный модуль модуля сизигий для семейства $\{m_\alpha\}$. Используя введённую выше терминологию, можно дать следующую характеризацию стандартных базисов для фильтрованных модулей (и аналогично для бимодулей) (см. [3]).

Предложение 7. *Пусть M — фильтрованный модуль над фильтрованной алгеброй R и $\{m_\alpha\}$ — семейство элементов в M. Следующие условия эквивалентны:*

1) *$\{m_\alpha\}$ — стандартный базис модуля M;*
2) *всякое однородное соотношение между $\{w(m_\alpha)\}$ поднимаемо;*
3) *все соотношения в произвольно выбранной системе однородных порождающих модуля сизигий для $\{w(m_\alpha)\}$ поднимаемы;*
4) *для всякого однородного соотношения $\sum\limits_\alpha \bar{r}_\alpha w(m_\alpha) = 0$ элемент $\sum\limits_\alpha r_\alpha m_\alpha$ редуцируем к 0 относительно семейства $\{m_\alpha\}$ при любом выборе последовательности редукций.*

Когда в качестве M берётся (двусторонний) идеал в R, как отмечалось выше, $\bar{M}$ отождествляется с идеалом в $\bar{R}$, а между элементами в $\bar{R}$ имеются тривиальные бинарные соотношения $\bar{m}_1\bar{r}_1 + \bar{r}_2\bar{m}_2 = 0$, где $\bar{r}_1 = \bar{m}_2$, $\bar{r}_2 = -\bar{m}_1$, которые всегда поднимаемы (если $\bar{m}_i = w(m_i)$, $i = 1, 2$) до тривиальных соотношений $m_1 r_1 + r_2 m_2 = 0$, где $r_1 = m_2$, $r_2 = -m_1$. Поэтому проверку поднимаемости в условии 3) достаточно производить для соотношений, порождающих модуль сизигий по модулю тривиальных соотношений.

В теории классических базисов Грёбнера, как отмечалось выше, все однородные компоненты ассоциированного градуированного модуля M являются циклическими $\bar{R}_e$-модулями. Поэтому из предложения 6 получаем следующее обобщение результатов из [1, 2].

Предложение 8. *Пусть в условиях предложения 7 все однородные компоненты ассоциированного градуированного модуля $\bar{M}$ являются циклическими $\bar{R}_e$-модулями и решётка левых идеалов в $\bar{R}_e$ дистрибутивна. Тогда семейство $\{m_\alpha\}_{\alpha\in A}$ является стандартным базисом в M в том и только том случае, если для всех пар $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ и произвольной системы бинарных соотношений $\bar{r}_{1\beta}w(m_{\alpha_1}) + \bar{r}_{2\beta}w(m_{\alpha_2}) = 0$, порождающей модуль сизигий для $w(m_{\alpha_1})$, $w(m_{\alpha_2})$, элементы $\tilde{r}_{1\beta}m_{\alpha_1} + \tilde{r}_{2\beta}m_{\alpha_2}$ редуцируемы к 0 относительно $\{m_\alpha\}$.*

Элементы $\tilde{r}_{1\beta}m_{\alpha_1} + \tilde{r}_{2\beta}m_{\alpha_2}$ в этой ситуации являются аналогами так называемых S-многочленов в теории базисов Грёбнера.

3. Пример из коммутативной алгебры

Рассматриваемый ниже пример иллюстрирует возможность использования только бинарных соотношений и в том случае, когда основное кольцо не является арифметическим.

Пусть A — коммутативное кольцо и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — регулярная последовательность в A. Хорошо известно, что идеал $I = (a_1, \ldots, a_n)$ имеет линейный тип, т. е. все алгебраические соотношения между порождающими $a_1t, \ldots, a_nt$ алгебры Риса $R(I) = A[It] \subset A[t]$ порождаются линейными соотношениями. Приведём доказательство этого известного факта, используя базисы Грёбнера в кольце многочленов над A.

Стандартный приём нахождения алгебраических соотношений между $a_1t, \ldots, a_nt$ состоит в построении базиса Грёбнера идеала $J = (a_1t - x_1, \ldots, a_nt - x_n)$ в кольце многочленов $A[t, x_1, \ldots, x_n]$, порождённого элементами $f_1 = a_1t - x_1, \ldots, f_n = a_nt - x_n$, относительно исключающего t мономиального порядка (т. е. t старше любого монома от $x_1, \ldots, x_n$). Будем также считать, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Так как $a_1, \ldots, a_n$ — регулярная последовательность, все соотношения между старшими членами $w(f_k) = a_kt$ порождаются бинарными соотношениями $a_jw(f_i) - a_iw(f_j) = 0$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$, которые дают S-многочлены $f_{ij} = a_ix_j - a_jx_i$. Для старших членов $w(f_k) = a_kt$, $w(f_{ij}) = a_ix_j$, $k = 1, \ldots, n$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, получившегося семейства многочленов отыскание однородных (относительно мономиальной градуировки) соотношений сводится к отысканию соотношений для системы элементов из A вида

$$a_1, \ldots, a_{i_1}, a_1, \ldots, a_{i_2}, \ldots, a_1, \ldots, a_{i_s},$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$. Они порождаются соотношениями вида $a_i - a_i = 0$ и соотношениями между $a_1, \ldots, a_{i_s}$. Последние, так как $a_1, \ldots, a_{i_s}$ — регулярная последовательность, порождаются тривиальными бинарными соотношениями $a_j a_i - a_i a_j = 0$. Таким образом, все соотношения между старшими членами порождаются по модулю тривиальных соотношений следующим семейством бинарных соотношений:

$$\begin{aligned}
&a_j w(f_i) - a_i w(f_j) = 0 && (1 \leqslant i < j \leqslant n),\\
&x_j w(f_i) - t w(f_{ij}) = 0 && (1 \leqslant i < j \leqslant n),\\
&x_k w(f_{ij}) - x_j w(f_{ik}) = 0 && (1 \leqslant i < j < k \leqslant n),\\
&a_i w(f_{jk}) - a_j w(f_{ik}) = 0 && (1 \leqslant i < j < k \leqslant n).
\end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что для всех этих соотношений получающиеся S-многочлены редуцируются к нулю, и следовательно, семейство $\{f_k, f_{ij}\}$ является базисом Грёбнера идеала J, а $\{f_{ij}\}$ — базисом Грёбнера определяющего идеала алгебры Риса $R(I)$.

Приведённый выше пример — наиболее элементарный среди результатов, касающихся линейности типа для тех или иных классов идеалов. Существенно более сильный результат был получен К. Хунеке [4], который доказал, что линейные соотношения образуют базис Грёбнера определяющего идеала алгебры Риса $R(I)$, когда I порождается d-последовательностью. Получение этого результата таким же способом, что и выше, затрудняется тем, что требуется вычисления базиса Грёбнера всего идеала J.

Литература

[1] Голод Е. С. Арифметические кольца, эндоморфизмы и базисы Грёбнера // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 1. — С. 167—168.

[2] Голод Е. С. О некоммутативных базисах Грёбнера над кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 4. — С. 91—96.

[3] Golod E. S. Standard bases and homology // Algebra: Some Current Trends. Proc. of the 5th Nacional School in Algebra held in Varna, Bulgaria, Sept. 24 — Oct. 4, 1986 / Eds. L. L. Avramov, K. B. Tchakerian. — Springer, 1988. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1352). — P. 105—110.

[4] Huneke C. On the symmetric and Rees algebra of an ideal generated by a d-sequence // J. Algebra. — 1980. — Vol. 62, no. 2. — P. 268—275.