О T-пространствах и соотношениях в относительно свободных лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах*

А. В. ГРИШИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

Л. М. ЦЫБУЛЯ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

А. А. ШОКОЛА
Московский педагогический государственный университет

УДК 512.552

Ключевые слова: лиевская нильпотентность, коммутаторные соотношения, соотношения Фробениуса, модельная алгебра, T-пространство.

Аннотация

Цель настоящей работы — получить коммутаторные соотношения и соотношения Фробениуса в относительно свободной ассоциативной алгебре $F^{(l)}$, заданной тождеством $[x_1,\ldots,x_l]=0$, над полем характеристики $p>0$. Эти соотношения при $l>3$ аналогичны соотношениям в алгебре $F^{(3)}$ и применяются к T-пространствам в алгебре $F^{(l)}$. Для более детального изучения соотношений в $F^{(l)}$ строится модельная алгебра, аналогичная алгебре Грассмана.

Abstract

A. V. Grishin, L. M. Tsybulya, A. A. Shokola, On T-spaces and relations in relatively free, Lie nilpotent, associative algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 135—148.

The purpose of this work is to obtain the commutator relations and Frobenius relations in a relatively free algebra $F^{(l)}$ specified by the identity $[x_1,\ldots,x_l]=0$ over a field of characteristic $p>0$. These relations for $l>3$ are analogous to the relations in the algebra $F^{(3)}$ and are applied to the T-spaces in the algebra $F^{(l)}$. In order to study the relations in $F^{(l)}$ in more detail, we construct a model algebra analogous to the Grassmann algebra.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00625).

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 135—148.

Введение

В работах [4—6] изучались T-пространства в относительно свободной алгебре Грассмана $F^{(3)}$ над бесконечным полем k характеристики $p > 0$, т. е. в относительно свободной алгебре, заданной тождеством $\big[[x_1, x_2], x_3\big] = 0$, где $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$. При этом в вычислениях использовался ряд важных соотношений в этой алгебре.

I. *Коммутаторные соотношения*:

$$[x_1, x_2][x_1, x_3] = 0,$$
$$[x_1, x_2][x_3, x_4] = -[x_1, x_3][x_2, x_4],$$
$$[x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_s^{n_s}, y] = n_1 x_1^{n_1-1}[x_1, y]x_2^{n_2} \cdots x_s^{n_s} + n_2 x_2^{n_2-1}[x_2, y]x_1^{n_1} x_3^{n_3} \cdots x_s^{n_s} + \\ + n_s x_s^{n_s-1}[x_s, y]x_1^{n_1} \cdots x_{s-1}^{n_{s-1}}, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

В частности, из последнего соотношения следует, что

$$[xy^n, y] = y^n[x, y], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, p-я степень переменной коммутирует с любым элементом алгебры $F^{(3)}$, т. е. $[x^p, y] = 0$.

II. *Соотношения Фробениуса*:

$$(x_1 + \ldots + x_s)^{p^r} = x_1^{p^r} + \ldots + x_s^{p^r}, \quad (x_1 \cdots x_s)^{p^r} = x_1^{p^r} \cdots x_s^{p^r},$$

где $p > 2$, $r \in \mathbb{N}$ или $p = 2$, $r > 1$.

Цель настоящей работы — обобщить эти соотношения на относительно свободные лиевски нильпотентные алгебры $F^{(l)}$, т. е. относительно свободные алгебры, соответствующие тождеству $\big[\ldots\big[[x_1, x_2], x_3\big] \ldots, x_l\big] = 0$. Эти соотношения, как представляется, дадут возможность построить теорию T-пространств в алгебре $F^{(l)}$, где $l > 3$, аналогичную теории в $F^{(3)}$.

Следует отметить, что лиевски нильпотентные и энгелевы ассоциативные алгебры рассматривались многими авторами с разных точек зрения (см., например, [7]). У нас более узкая задача — приложение к T-пространствам.

Для выражения $\big[\ldots\big[[x_1, x_2], x_3\big] \ldots, x_l\big]$ будем использовать обозначение $[x_1, \ldots, x_l]$. Обозначим T-идеал свободной ассоциативной алгебры $F = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$, порождённый *длинным коммутатором* $[x_1, \ldots, x_l]$, через $T^{(l)}$. Некоторые из переменных x_i иногда для удобства будут обозначаться через y_i или z_i.

1. Коммутаторный бином Ньютона

Лемма 1. *Для произвольного $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется равенство*

$$\binom{n}{i} = \binom{i-1}{i-1} + \binom{i}{i-1} + \ldots + \binom{n-1}{i-1}.$$

Это свойство биномиальных коэффициентов несложно доказать по индукции.

Рассмотрим коммутатор $[x_1^n, x_2] = x_1^n x_2 - x_2 x_1^n$. Назовём замену одночлена $x_1 x_2$ на сумму $x_2 x_1 + [x_1, x_2]$ *скачком* одночлена $x_1 x_2$. Применяя n скачков к $x_1^n x_2$, получаем

$$x_1^n x_2 = x_2 x_1^n + x_1^{n-1}[x_1, x_2] + x_1^{n-2}[x_1, x_2]x_1 + \ldots + x_1[x_1, x_2]x_1^{n-2} + [x_1, x_2]x_1^{n-1}.$$

Тогда верно следующее равенство:

$$[x_1^n, x_2] = x_1^{n-1}[x_1, x_2] + x_1^{n-2}[x_1, x_2]x_1 + \ldots + x_1[x_1, x_2]x_1^{n-2} + [x_1, x_2]x_1^{n-1}.$$

Если применить скачок к любому слагаемому, кроме первого, в этом выражении, получим

$$x_1^{n-j-1}[x_1, x_2]x_1^j = x_1^{n-j}[x_1, x_2]x_1^{j-1} + x_1^{n-j-1}\big[[x_1, x_2], x_1\big]x_1^{j-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Заметим, что применять скачки можно к любым многочленам вида

$$x_1^{n-j-1}[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^j$$

при натуральном $t \geqslant 2$. Тогда

$$x_1^{n-j-1}[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^j = \\ = x_1^{n-j}[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^{j-1} + x_1^{n-j-1}[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+1}]x_1^{j-1}.$$

Следующий факт поможет упростить процесс подсчёта подобных слагаемых при применении нескольких скачков к произвольному многочлену $x_1^{n-j-1}[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^j$.

Лемма 2. *Для произвольных натуральных чисел $t \geqslant 2$ и j справедливо тождество*

$$[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^j = \binom{j}{0}x_1^j[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}] + \\ + \binom{j}{1}x_1^{j-1}[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+1}] + \ldots + \binom{j}{j-1}x_1[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+j-1}] + \\ + \binom{j}{j}[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+j}] = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}x_1^{j-i}[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+i}].$$

Доказательство. Докажем лемму индукцией по числу j. Для $j = 1$ она очевидна. Предположим, что лемма верна для $j-1$:

$$[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} x_1^{j-i-1} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+i}].$$

Докажем её справедливость для j. Рассмотрим многочлен

$$[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^{j}$$

и применим к нему один скачок:

$$[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^{j} = x_1[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^{j-1} + [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+1}]x_1^{j-1}.$$

Применяя к каждому слагаемому предположение индукции, получим

$$\begin{aligned}
[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^{j} &= x_1 \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} x_1^{j-i-1} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+i}] + \\
&+ \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} x_1^{j-i-1} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+i+1}] = \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} x_1^{j-i} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+i}] + \\
&+ \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} x_1^{j-i-1} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+i+1}] = \binom{j-1}{0} x_1^{j} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}] + \\
&+ \sum_{i=1}^{j-1} \left(\binom{j-1}{i-1} + \binom{j-1}{i} \right) x_1^{j-i} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+i}] + \\
&+ \binom{j-1}{j-1} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+j}].
\end{aligned}$$

Используя свойство биномиальных коэффициентов

$$\binom{j-1}{i-1} + \binom{j-1}{i} = \binom{j}{i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n,$$

получаем

$$[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t}]x_1^{j} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x_1^{j-i} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{t+i}]. \qquad \square$$

Теорема 1 (коммутаторный бином Ньютона). *В свободной алгебре* $\mathbb{Z}\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ *выполняется соотношение*

$$
\begin{aligned}
[x_1^n, x_2] &= \binom{n}{1} x_1^{n-1}[x_1, x_2] + \binom{n}{2} x_1^{n-2}[x_1, x_2, x_1] + \ldots + \\
&+ \binom{n}{n-1} x_1 [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{n}] + \binom{n}{n} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{n+1}] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x_1^{n-i} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{i+1}]. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Доказательство. Ранее было показано, что

$$[x_1^n, x_2] = x_1^{n-1}[x_1, x_2] + x_1^{n-2}[x_1, x_2]x_1 + \ldots + x_1[x_1, x_2]x_1^{n-2} + [x_1, x_2]x_1^{n-1}.$$

Используя лемму 2 для каждого слагаемого $x_1^{n-i-1}[x_1, x_2]x_1^i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, в полученном разложении коммутатора $[x_1^n, x_2]$, имеем

$$
\begin{aligned}
[x_1^n, x_2] &= \left(\binom{0}{0} + \ldots + \binom{n-1}{0}\right) x_1^{n-1}[x_1, x_2] + \\
&+ \left(\binom{1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{1}\right) x_1^{n-2}[x_1, x_2, x_1] + \ldots + \\
&+ \left(\binom{n-2}{n-2} + \binom{n-1}{n-2}\right) x_1 [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{n}] + \binom{n}{n} [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{n+1}].
\end{aligned}
$$

Применяя лемму 1 для биномиальных коэффициентов, получаем доказываемое равенство. □

Для наглядности в таблице 1 представлены коэффициенты $b_i = \binom{n}{i}$ из правой части равенства (1) для некоторых n.

Замечание 1. Любой одночлен от переменных x_1, x_2 типа $(n, 1)$ из алгебры F можно разложить по базису

$$x_1^n x_2,\ x_1^{n-1}[x_1, x_2],\ x_1^{n-2}[x_1, x_2, x_1], \ldots,\ [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{n+1}].$$

Коммутаторный бином Ньютона позволяет найти координаты многочлена $[x_1^n, x_2]$. Так, например, при $p = 5$

$$[x_1^{10}, x_2] = 252\, x_1^5 [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{6}] + [\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{11}].$$

Если в коммутаторном биноме Ньютона (1) $n = p$, то коэффициенты $\binom{n}{i}$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ делятся на p, что следует из свойств биномиальных коэффициентов. Отсюда и из теоремы 1 вытекает следствие.

Таблица 1

$b_i \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
b_1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
b_2	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	...
b_3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	...
b_4		1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	...
b_5			1	6	21	56	126	252	462	792	1287	...
b_6				1	7	28	84	210	462	924	1716	...
b_7					1	8	36	120	330	792	1716	...
b_8						1	9	45	165	495	1287	...
b_9							1	10	55	220	715	...
b_{10}								1	11	66	286	...
b_{11}									1	12	78	...
b_{12}										1	13	...
b_{13}											1	...
...	....											

Следствие 1. *Для любого* $p \geqslant l-1$ *выполняется соотношение* $[x_1^p, x_2] = 0$ *по модулю тождества* $[x_1, \ldots, x_l] = 0$.

В случае $n = p^r$, где $r \in \mathbb{N}$, как нетрудно проверить, коэффициенты $\binom{n}{i}$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ также делятся на p (см. [4]). Таким образом, обобщением следствия 1 является следствие 2.

Следствие 2. *Для любого* $p^r \geqslant l-1$ *выполняется соотношение* $[x_1^{p^r}, x_2] = 0$ *по модулю тождества* $[x_1, \ldots, x_l] = 0$.

2. Коммутаторные соотношения над кольцом целых чисел

Выражение $[x_1, \ldots, x_l]$ будем называть *коммутатором длины* l, а переменную x_l — *крайней*.

Имеет место следующая лемма [8].

Лемма 3 (лемма Латышева). *Над полем характеристики* 0 *выполнено включение*

$$T^{(r)}T^{(s)} \subset T^{(r+s-2)}.$$

На самом деле лемма 3 справедлива над кольцом целых чисел.

В следующем предложении описаны некоторые интересные на наш взгляд коммутаторные соотношения, имеющие место в лиевски нильпотентной алгебре.

Предложение 1. *Пусть* $c_0, c_1, \ldots, c_s$ *— коммутаторы длин* $l_0, l_1, \ldots, l_s$ *соответственно. Тогда*

$$c_0 c_1 \cdots c_s \in T^{(l_0+\ldots+l_s-2s)}. \tag{2}$$

По модулю тождества $[x_1, \ldots, x_l] = 0$ *выполняются следующие соотношения*:

$$[x_1, \ldots, x_{l-1}][x_{l-1}, x_l] = 0, \tag{3}$$

$$\big[[x_1, \ldots x_{l-1}]x_{l-1}^m, x_l\big] = 0 \quad \text{для любого} \quad m \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

$$[x_1, \ldots, x_{l-1}][x_1, y_1] \cdots [x_{l-2}, y_{l-2}] = 0, \tag{5}$$

$$[x_1, \ldots, x_{l-1}][y_{l-1}, x_l] = -[x_1, \ldots, x_{l-2}, y_{l-1}][x_{l-1}, x_l], \tag{6}$$

$$[x_1, \ldots, x_{l-1}][y_1, \ldots, y_m] = 0 \quad \text{при} \quad m \geqslant 3, \tag{7}$$

$$[x_1, \ldots, x_{l-1}][y_1, y_2][y_1, y_3] = 0, \tag{8}$$

$$[x_1, x_2]^{l-1} = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Соотношение (2) непосредственно вытекает из леммы 3.

По модулю тождества $[x_1, \ldots, x_l] = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&[x_1, \ldots, x_{l-1}][x_{l-1}, x_l] = \big[x_{l-1}, x_l[x_1, \ldots, x_{l-1}]\big] = \\
&\quad = \big[x_{l-1}, x_l[x_1, \ldots, x_{l-2}]x_{l-1} - x_l x_{l-1}[x_1, \ldots, x_{l-2}]\big] = \\
&\quad = \big[x_{l-1}, \big[x_l, [x_1, \ldots, x_{l-2}]\big]x_{l-1}\big] - \Big[x_{l-1}, \big[x_l x_{l-1}, [x_1, \ldots, x_{l-2}]\big]\Big] = \\
&\quad = \big[x_l, [x_1, \ldots, x_{l-2}]\big][x_{l-1}, x_{l-1}] + 0 = 0,
\end{aligned}$$

что доказывает (3).

Свойство (4) непосредственно следует из коммутаторного соотношения (3).

Соотношение (5) является прямым следствием обобщённого тождества Якоби и коммутаторного соотношения (3).

Доказательство соотношения (6) получается линеаризацией коммутаторного соотношения (3) по переменной x_{l-1}.

Соотношение (7) непосредственно вытекает из леммы 3.

Так как $[y_1, y_2][y_1, y_3] \in T^{(3)}$, то из леммы 3 получим соотношение (8).

Докажем соотношение (9). Покажем, что $[x_1, x_2]^3 \in T^{(4)}$. Из коммутаторного соотношения (3) следует, что $[x_1, x_2]^2 \in T^{(3)}$, т. е. $[x_1, x_2]^2$ — линейная комбинация выражений вида $v_1[u_1, u_2, u_3]v_2$, где u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 — некоторые одночлены, зависящие только от переменных x_1 и x_2. Коммутатор $[u_1, u_2, u_3]$, как легко заметить, представляется в виде линейной комбинации коммутаторов длины 3, у которых крайняя переменная будет равна x_1 или x_2, умноженных слева и справа на некоторые одночлены, т. е. выражений вида $w_1[u_1, u_2, x_i]w_2$, где $x_i = x_1$ или $x_i = x_2$. Тогда $[x_1, x_2]^3$ — линейная комбинация выражений вида

$$v[u_1, u_2, x_i]w[x_1, x_2], \tag{10}$$

где v и w — некоторые одночлены. По модулю тождества $[x_1, x_2, x_3, x_4] = 0$ многочлен (10) равен $vw[u_1, u_2, x_i][x_1, x_2]$. Последнее выражение равно нулю по модулю этого же тождества, что следует из коммутаторного соотношения (3). Значит, $[x_1, x_2]^3 \in T^{(4)}$. Применяя к $[x_1, x_2]^3$ из $T^{(4)}$ рассуждения, аналогичные приведённым выше, получим, что $[x_1, x_2]^4 \in T^{(5)}$. Продолжая таким образом, для каждого $l > 5$ будем получать $[x_1, x_2]^{l-1} \in T^{(l)}$. □

3. Соотношения Фробениуса

Теорема 2. *Для любых $p \geqslant l$ и $r \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения Фробениуса*

$$\begin{aligned} &(x_1 + \ldots + x_s)^{p^r} = x_1^{p^r} + \ldots + x_s^{p^r} && \text{(аддитивная форма)},\\ &(x_1 \cdots x_s)^{p^r} = x_1^{p^r} \cdots x_s^{p^r} && \text{(мультипликативная форма)} \end{aligned}$$

по модулю тождества $[x_1, \ldots, x_l] = 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что соотношения Фробениуса выполняются для двух переменных при $r = 1$. Далее доказательство проводится индукцией по r.

Докажем аддитивную форму соотношения Фробениуса

$$(x_1 + x_2)^p = x_1^p + x_2^p.$$

Рассмотрим $(x_1 + x_2)^n$ для произвольного натурального n:

$$(x_1 + x_2)^n = x_1^n + \sum_{m=1}^{n-1} Q_m + x_2^n,$$

где Q_m — сумма одночленов фиксированного типа $(n-m, m)$, $m \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Рассмотрим многочлен Q_1:

$$Q_1 = x_1^{n-1}x_2 + x_1^{n-2}x_2x_1 + \ldots + x_2x_1^{n-1}.$$

Отметим, что каждое слагаемое, кроме первого, в этом равенстве содержит в качестве сомножителя одночлен $x_2x_1^j$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, который можно представить, используя коммутаторный бином Ньютона, следующим образом:

$$\begin{aligned} x_2x_1^j = \binom{j}{0}x_1^jx_2 + \binom{j}{1}x_1^{j-1}[x_1, x_2] + \binom{j}{2}x_1^{j-2}[x_1, x_2, x_1] + \ldots +\\ + \binom{j}{j-1}x_1[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{j}] + \binom{j}{j}[\underbrace{x_1, x_2, x_1, \ldots, x_1}_{j+1}]. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1, преобразуем многочлен Q_1 к виду

$$Q_1 = \binom{n}{1}x_1^{n-1}x_2 + \binom{n}{2}x_1^{n-2}[x_1,x_2] + \ldots + \\ + \binom{n}{n-1}x_1[\underbrace{x_1,x_2,x_1,\ldots,x_1}_{n-1}] + \binom{n}{n}[\underbrace{x_1,x_2,x_1,\ldots,x_1}_{n}].$$

Заметим, что при $n = p$ биномиальные коэффициенты $\binom{p}{i}$ для $1 \leqslant i \leqslant p-1$ делятся на p. Следовательно, в этом случае при $p \geqslant l$ имеем $Q_1 = 0$ по модулю тождества $[x_1,\ldots,x_l] = 0$.

Линеаризуя $Q_1 = 0$, получим

$$\sum_{\sigma\in S_p} x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(p)} = 0.$$

Осуществим в многочлене $\sum\limits_{\sigma\in S_p} x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(p)}$ ряд подстановок:

$$x_i \mapsto x_1, \quad i = 1,\ldots,p-m,$$
$$x_j \mapsto x_2, \quad j = p-m+1,\ldots,p$$

(на $p-m$ мест, которые занимают первые $p-m$ переменных, ставится x_1, на остальные m мест, которые занимают следующие m переменных, ставится x_2). После такой замены, как легко убедиться, получается многочлен $(p-m)!\,m!\,Q_m$. Так как $(m,p) = 1$, то получаем, что $Q_m = 0$ для любого $m = 1,\ldots,p-1$. Тем самым получаем соотношение

$$(x_1+x_2)^p = x_1^p + x_2^p.$$

Докажем мультипликативную форму соотношения Фробениуса

$$(x_1x_2)^p = x_1^p x_2^p.$$

Доказательство сводится к приведению мультипликативной формы соотношения Фробениуса к аддитивной форме.

Пусть $a = \frac{x_1+x_2}{2}$ и $b = \frac{x_1-x_2}{2}$. Тогда $a+b = x_1$ и $a-b = x_2$. Значит,

$$(x_1x_2)^p = \big((a+b)(a-b)\big)^p = (a^2+ba-ab-b^2)^p = (a^2+[b,a]-b^2)^p.$$

Применяя к последней части этого равенства аддитивную форму соотношения Фробениуса, получим при $p \geqslant l$

$$(x_1x_2)^p = (a^p)^2 + ([b,a])^p - (b^p)^2$$

по модулю тождества $[x_1,\ldots,x_l] = 0$. Из коммутаторных соотношений по модулю этого же тождества (см. разделы 1 и 2) вытекают равенства

$$([b,a])^p = [a^p,b^p] = 0.$$

Из этих равенств и аддитивной формы соотношения Фробениуса вытекает

$$(x_1x_2)^p = (a^p)^2 + [a^p,b^p] - (b^p)^2 = (a^p-b^p)(a^p+b^p) = (a-b)^p(a+b)^p = x_1^p x_2^p. \quad \square$$

Замечание 2. Если $p < l$, то соотношения Фробениуса имеют место для всех достаточно больших p^r. Поясним, как находятся числа r.

Пусть t — такое натуральное число, что $p^t \geqslant l-1$. Обозначим p^t через q. По следствию 2 в алгебре $F^{(l)}$ выполняется тождество

$$[x^q, y] = 0. \tag{11}$$

Положим $\Delta = (x_1+x_2)^q - x_1^q - x_2^q$. Так как $(x_1+x_2)^p - x_1^p - x_1^p \in \overline{T}^{(p)}$ ($\overline{I}$ — образ идеала I из F в алгебре $F^{(l)}$), то, очевидно, $\Delta \in \overline{T}^{(p)}$. В силу тождества (11)

$$\Delta^p = (x_1+x_2)^{pq} - x_1^{pq} - x_2^{pq}.$$

Используя лемму 3, несложно получить, что $\Delta^p \in \overline{T}^{(p^2-2(p-1))}$. Снова используя равенство (11) и лемму 3, имеем

$$\Delta^{p^2} = (x_1+x_2)^{p^2q} - x_1^{p^2q} - x_2^{p^2q} \in \overline{T}^{(p^3-2(p-1)p-2(p-1))}.$$

Продолжая возводить получающиеся на каждом шаге Δ^{p^i}, $i = 2, 3, \ldots$, в степень p и используя тождество (11) и лемму 3, на s-м шаге получим

$$\Delta^{p^s} = (x_1+x_2)^{p^sq} - x_1^{p^sq} - x_2^{p^sq} \in \overline{T}^{(p^s-2(p-1)p^{s-2}-\ldots-2(p-1))}.$$

Таким образом, $\Delta^{p^s} \in \overline{T}^{(p^s-2p^{s-2}+2)}$.

Пусть $r = s+t$, где s и t — такие числа, что

$$p^s - 2p^{s-2} + 2 \geqslant l, \quad p^t \geqslant l-1. \tag{12}$$

Тогда для всех таких чисел r в алгебре $F^{(l)}$ выполняется аддитивное соотношение Фробениуса

$$(x_1+x_2)^{p^r} = x_1^{p^r} + x_2^{p^r}$$

и, следовательно, выполняется его мультипликативная форма

$$(x_1x_2)^{p^r} = x_1^{p^r}x_2^{p^r}.$$

Отметим, что в данной ситуации можно оценить r как функцию от l (правда, предлагаемая оценка довольно грубая). Пусть s и t выбраны так, чтобы выполнялись неравенства $p^{s-1} \geqslant l$ и $p^{t-1} \geqslant l$. Тогда, очевидно, выполняются неравенства (12), и следовательно, для $r = s+t$ имеют место соотношения Фробениуса. Значит,

$$p^{r-2} = p^{s+t-2} \geqslant l^2.$$

Таким образом, достаточное условие для выполнения соотношений Фробениуса можно представить в виде $r \geqslant 2\log_p l + 2$.

Замечание 3. Ясно, что на самом деле следствия из теоремы 1, а также аддитивное соотношение Фробениуса имеют место даже по модулю тождества энгелевости (при тех же условиях на p). Как сообщил авторам В. Т. Марков, эти утверждения можно получить из примера 1.11.1 в [1]. Там доказательство основывается на некоторых операторных соотношениях. Наше доказательство не столь компактно, но основано на более элементарной технике.

Замечание 4. Из соотношений Фробениуса и соотношения (9) очевидным образом следует, что при $p \geqslant l$ коммутант C (T-идеал, порождённый коммутатором) алгебры $F^{(l)}$ является ниль-алгеброй индекса p, а при $2 < p < l$ её индекс будет меньше p^r, где r — число из замечания 2.

Замечание 5. Так как рассматриваемые соотношения, по существу, зависят от двух переменных, то они имеют место и в соответствующей альтернативной алгебре.

4. Модельная алгебра для тождества $[x_1, \ldots, x_{2m+1}] = 0$

Пусть k — бесконечное поле характеристики $p > 2$ и E — k-алгебра, порождённая бесконечной системой элементов

$$1,\ e_1, \ldots,\ e_i, \ldots,\ \{\theta_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N},\ \theta_{ij} = \theta_{ji}\},$$

которые связаны соотношениями

$$e_i e_j + e_j e_i = \theta_{ij} \ \text{ при } \ i \neq j, \quad e_i e_i = \theta_{ii}, \quad [\theta_{ij}, e_m] = 0.$$

Степень одночлена из алгебры E определяется естественным образом, исходя из того, что $\deg e_i = 1$, $\deg \theta_{ij} = 2$ (приведённые выше соотношения однородны). Алгебру E будем называть *сверхграссмановой*. Пусть Θ — идеал алгебры E, порождённый элементами θ_{ij}. *Расширенной алгеброй Грассмана кратности m* назовём фактор-алгебру $E^{(m)} = E/\Theta^m$. В частности, $E^{(1)} = \mathrm{Gr}$ — обычная алгебра Грассмана. Условимся элементы в алгебре E и в её фактор-алгебрах $E^{(m)}$ обозначать одними и теми же буквами.

Хорошо известно, что многообразие $\mathrm{Var}\,\mathrm{Gr}$ совпадает с многообразием, заданным тождеством $[x_1, x_2, x_3] = 0$. Этот факт впервые был доказан в [9]. Более короткое доказательство этого факта можно получить с помощью техники работ [4—6]. В случае $p = 2$ алгебру Грассмана для получения аналогичного результата нужно заменить на алгебру Φ_2 (см. [2]). Наша цель — показать, что в некотором смысле $E^{(m)}$ по отношению к тождеству $[x_1, \ldots, x_{2m+1}] = 0$ является аналогом алгебры Gr.

Теорема 3. *На алгебре $E^{(m)}$ выполняется тождество*

$$[x_1, \ldots, x_{2m+1}] = 0,$$

но не выполняется тождество

$$[x_1, \ldots, x_{2m}][y_1, z_1] \cdots [y_r, z_r] = 0$$

ни для какого r.

Доказательство. Для наглядности рассмотрим случай $m = 2$, соответствующий коммутатору длины 5. Общий случай рассматривается аналогично.

Так как на алгебре $E^{(1)} = \mathrm{Gr}$ обращается в нуль тройной коммутатор, то $[u_1, u_2, u_3] \in \Theta$ для любых одночленов u_1, u_2, u_3 из E. Если одночлен $u_1u_2u_3$ имеет чётную степень, то по очевидным причинам $[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \Theta^2$ для любого одночлена u_4 из E. Если одночлен $u_1u_2u_3$ имеет нечётную степень, но u_4 — чётную, то опять $[u_1, u_2, u_3, u_4] \in \Theta^2$. Если u_4 имеет нечётную степень, то $u_1u_2u_3u_4$ имеет чётную степень, и следовательно, $[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5] \in \Theta^2$ для любого одночлена u_5 из E. Поскольку рассматриваемые тождества полилинейны, отсюда получаем первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения заметим, что $[e_i, e_j] = 2e_ie_j - \theta_{ij}$ при $i \neq j$. Следовательно,

$$\begin{aligned}[e_1, e_2, e_3] &= [2e_1e_2 - \theta_{12}, e_3] = \\ &= 2e_1[e_2, e_3] + 2[e_1, e_3]e_2 = 2e_1(2e_2e_3 - \theta_{23}) + 2(2e_1e_3 - \theta_{13})e_2 = \\ &= 4e_1e_2e_3 - 2e_1\theta_{23} + 4e_1e_3e_2 - 2\theta_{13}e_2 = 2e_1\theta_{23} - 2\theta_{13}e_2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$[e_1, e_2, e_3, e_4] = 2[e_1, e_4]\theta_{23} - 2[e_2, e_4]\theta_{13} = 2(2e_1e_4 - \theta_{14})\theta_{23} - 2(2e_2e_4 - \theta_{24})\theta_{13}.$$

Точно так же по модулю Θ^2 элемент

$$[e_1, e_2, e_3, e_4][e_5, e_6] \cdots [e_s, e_{s+1}]$$

с точностью до умножения на степень двойки имеет вид

$$(e_1e_4\theta_{23} - e_2e_4\theta_{13})e_5e_6 \cdots e_se_{s+1},$$

т. е. не равен нулю по модулю Θ^2. Следовательно, многочлен

$$[x_1, x_2, x_3, x_4][y_1, z_1] \cdots [y_r, z_r]$$

не обращается в нуль на алгебре $E^{(2)}$ ни для какого r. □

Замечание 6. Алгебра $E^{(m)}$ даёт весьма полезный экспериментальный материал для вычислений по модулю тождества $[x_1, \ldots, x_{2m+1}] = 0$. Однако вопрос о совпадении $\mathrm{Var}\, E^{(m)}$ с многообразием, заданным этим тождеством, пока открыт.

Замечание 7. Используя алгебру $E^{(m)}$, нетрудно показать, что в предложении 1 (свойство (3)) условие совпадения крайних переменных является существенным. Если переменная x_{l-1} в длинном коммутаторе не является крайней, то соответствующее тождество места не имеет.

5. О T-пространствах в алгебре $F^{(l)}$

Пусть натуральное число r выбрано так, чтобы для p^r выполнялись соотношения Фробениуса (см. замечание 2). Для простоты можно считать, что $p \geqslant l$ и $r = 1$. По аналогии с [4—6] изучение T-пространств в алгебре $F^{(l)} = F/T^{(l)}$

в значительной степени сводится к изучению T-пространств W_{p^r}, порождённых всевозможными p^r-словами (*n-слово* — одночлен алгебры $F^{(l)}$, содержащий каждую свою переменную с кратностью n).

Если $D_{p^r} = \{x_1^{p^r}\}^T$ — T-пространство, порождённое одночленом $x_1^{p^r}$, то, как следует из соотношений Фробениуса, $D_{p^r} = k[x_1^{p^r}, \ldots, x_i^{p^r}, \ldots]$ — алгебра коммутативных многочленов от элементов $x_i^{p^r}$. Нетрудно проверить, что каждое p^r-слово можно представить в виде $d + c$, где d — произведение одночленов $x_i^{p^r}$, c — элемент из $C \cap W_{p^r}$ и C — коммутант алгебры $F^{(l)}$.

Теорема 4. *Имеет место следующее разложение в прямую сумму T-пространств*:

$$W_{p^r} = D_{p^r} \oplus (C \cap W_{p^r}),$$

причём W_{p^r} — подалгебра алгебры $F^{(l)}$ (некоммутативная при $l > 3$), а $C \cap W_{p^r}$ — её ненильпотентный ниль-радикал, на котором выполнено тождество $x_1^{p^r} = 0$.

С учётом предложения 1 и соотношений Фробениуса доказательство совершенно аналогично проведённому в [4].

Замечание 8. Как известно (см. [3]), центр алгебры $F^{(3)}$ совпадает с W_p. Для $l > 3$ вопрос об описании центра остаётся открытым. Из приведённых выше соотношений непосредственно следует, что алгебра, порождённая T-пространствами D_{p^r} и

$$\{[x_1, \ldots, x_{l-1}]x_{l-1}^{p^i-1} \mid i = 0, \ldots, r\}^T,$$

лежит в центре. Неизвестно, насколько верно обратное включение.

Замечание 9. Представляется достаточно вероятным, что T-пространство в $T^{(l-1)}/T^{(l)}$, порождённое системой многочленов

$$cx_1^{p^r-1}y_1^{p^r-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{p^r-1}y_m^{p^r-1}[x_m, y_m], \quad m \in \mathbb{N},$$

где c — некоторый специальным образом подобранный многочлен из $T^{(l-1)}$, не является конечно порождённым.

Замечание 10. При изучении T-пространств в алгебре $F^{(l)}$ чрезвычайно важную роль играет построение в этой алгебре базиса, аналогичного *каноническому базису* в $F^{(3)}$ (см. [6]). Для начала, по-видимому, имеет смысл построить часть такого базиса в $F^{(l)}$, состоящего из многочленов от двух переменных. Уже эта задача в случае произвольного l достаточно сложна. Для $l = 4$ в качестве реального претендента на такой базис в $T^{(3)}/T^{(4)}$ можно рассмотреть по модулю $T^{(4)}$ систему многочленов вида

$$[x_1, x_2, x_2]u, \ [x_2, x_1, x_1]v, \ [x_1, x_2][x_1, x_2]w,$$

где u, v, w — произвольные одночлены от переменных x_1, x_2. Имея такой базис, можно исследовать вопрос о построении не конечно базируемого T-пространства в $T^{(3)}/T^{(4)}$, порождённого бесконечной системой многочленов от двух переменных, аналогичной известной системе Щиголева [10].

Более детальному описанию структуры T-пространств в $F^{(l)}$, где $l > 3$, аналогичному [4—6] и использующему цепочку T-идеалов

$$T^{(3)} \supset T^{(4)} \supset \ldots \supset T^{(l)} \supset T^{(l+1)} \supset \ldots$$

и соответствующих относительно свободных алгебр

$$\ldots \twoheadrightarrow F^{(l+1)} \twoheadrightarrow F^{(l)} \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow F^{(4)} \twoheadrightarrow F^{(3)},$$

предполагается посвятить отдельную работу.

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Гришин А. В. Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фундамент. прикл. мат. — 1999. — Т. 5. — С. 101—118.

[3] Гришин А. В. О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана // Успехи мат. наук. — 2010. — Т. 65, № 4. — С. 191—192.

[4] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О (p, n)-проблеме // Вестн. Самарск. гос. ун-та. — 2007. — Т. 57, № 7. — С. 35—55.

[5] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. Две теоремы о строении относительно свободной алгебры Грассмана // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 4. — С. 186—187.

[6] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О T-пространственном и мультипликативном строении относительно свободной алгебры Грассмана // Мат. сб. — 2009. — Т. 200, № 9. — С. 41—80.

[7] Красильников А. Н. О полугрупповой и лиевской нильпотентности ассоциативных алгебр // Мат. заметки. — 1997. — Т. 62, № 4. — С. 510—519.

[8] Латышев В. Н. О конечной порождённости T-идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ // Сиб. мат. журн. — 1965. — № 6. — С. 1432—1434.

[9] Чирипов П. Ж., Сидеров П. Н. О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Плиска. — 1981. — Т. 2. — С. 103—115.

[10] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых T-пространств // Мат. сб. — 2000. — Т. 191. — С. 143—160.