О параболических подгруппах в группах Кокстера большого типа

И. В. ДОБРЫНИНА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

УДК 519.4

Ключевые слова: группа Кокстера большого типа, параболическая подгруппа, диаграмма.

Аннотация

В статье рассматриваются свойства элементов параболических подгрупп в группах Кокстера большого типа.

Abstract

I. V. Dobrynina, On parabolic subgroups in Coxeter groups of large type, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 149—160.

In this paper, properties of the elements of parabolic subgroups in Coxeter groups of large type are considered.

Пусть J — конечное множество и $(m_{ij})_{i,j\in J}$ — матрица, в которой $m_{ij} \geqslant 3$, называемая матрицей Кокстера. Группа G, заданная системой образующих a_i, $i \in J$, и системой определяющих соотношений $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J$ и $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, $i \neq j$, $i, j \in J$, где m_{ij} — элемент матрицы Кокстера (m_{ij}), $i, j \in J$, соответствующей данной группе, называется группой Кокстера большого типа [4].

Теорема 1 [4]. *Пусть G — группа Кокстера большого типа с множеством образующих A, $|A| < \infty$, определяемая матрицей Кокстера M_A. Тогда подгруппа G_J, порождённая множеством $A_J \subset A$, есть группа Кокстера большого типа, определяемая матрицей Кокстера M_J, полученной из M_A удалением строк и столбцов, именованных образующими из $A \setminus A_J$.*

Подгруппа G_J из теоремы 1 является параболической.

Целью данной работы является изучение свойств элементов параболических подгрупп в группах Кокстера большого типа.

Пусть $F_i = \langle a_i; a_i^2 \rangle$, $F = \prod\limits_{i=1}^{n} * F_i$ — свободное произведение циклических групп порядка 2. Отождествим каждый образующий a_i группы F с его обратным a_i^{-1}. Слово $w = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ группы F называется приведённым, если индексы рядом стоящих букв a_{i_j} и $a_{i_{j+1}}$ в записи w различны; длина w равна n.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 149—160.
© 2010 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

Пусть $m_{ij} < \infty$ и $r_{ij} = (a_i a_j)^{m_{ij}}$. Тогда в F существуют в точности две различные перестановки r_{ij}: $r_{ij} = (a_i a_j)^{m_{ij}}$ и $r_{ji} = (a_j a_i)^{m_{ij}}$ $(i \neq j)$.

Обозначим через F_{ij} группу $F_{ij} = F_i * F_j$ и через G_{ij} группу Кокстера большого типа $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, r_{ij}, r_{ji} \rangle$.

Лемма 1 [2]. *Если $w \in G_{ij}$, $w = 1$ в G_{ij} и $w \neq 1$ в F_{ij}, то $|w| \geqslant 2m_{ij}$, где $|w|$ — длина слова w.*

Лемма 2 [2]. *Пусть $w \in G_{ij}$, $w = w_1 w_2$, $w = 1$ в G_{ij} и $w \neq 1$ в F_{ij}. Тогда*

1) *если $|w_1| \leqslant m_{ij}$, то $|w_1| \leqslant |w_2|$;*
2) *если $|w_1| < m_{ij}$, то $|w_1| < |w_2|$.*

Обозначим через R_{ij} множество всех нетривиальных слов, циклически приведённых в свободном произведении F_{ij} и равных 1 в группе G_{ij}. Элемент $r \in R_{ij}$ будем называть соотношением типа (i, j).

Лемма 3 [2]. *Любое слово, принадлежащее R_{ij}, является степенью либо r_{ij}, либо r_{ji}.*

В дальнейшем под R будем понимать $R = \bigcup\limits_{i,j \in J} R_{ij}$ — симметризованное подмножество свободного произведения F. Тогда группа Кокстера может быть задана представлением $G = \langle A; a_i^2, R \rangle$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть w — нетривиальное циклически приведённое в F слово, равное единице в группе G Кокстера большого типа, т. е. $w \in \langle R \rangle^F$, где $\langle R \rangle^F$ — нормальное замыкание симметризованного множества R в свободном произведении F. Учитывая, что $a_i = a_i^{-1}$ в F, можно строить R-диаграммы над F так же, как над свободной группой [3]. Следовательно, существует связная односвязная диаграмма M группы Кокстера с граничной меткой w, областями которой являются R_{ij}-диаграммы с метками типа (i, j).

Подвергнем R-диаграмму M следующему преобразованию. Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij}-диаграммами и пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D. При этом возможно, что метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F. Тогда, удалив эту область, склеим её границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведённую в F связную односвязную R-диаграмму M, инвариантную относительно рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w, причём если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то длина метки этого ребра равна единице и справедлива следующая лемма.

Лемма 4 [4]. *Каждая приведённая связная односвязная R-диаграмма M группы Кокстера большого типа удовлетворяет условию $C(6)$.*

Обозначим через ∂M граничный цикл M. Область $D \subset M$ назовём граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \varnothing$. Через $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D.

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть M, если $\partial D \cap \partial M$ — объединение последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ замкнутых рёбер, где $l_1, \ldots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M.

Граничную область D R-диаграммы M назовём простой, если $\partial D \cap \partial M$ — правильная часть. Простая область D диаграммы M называется деновской, если $i(D) < 3$.

Пусть M — приведённая связная односвязная R-диаграмма группы Кокстера большого типа. Тогда последовательность граничных областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $n \geqslant 2$, образует полосу в M, если

1) для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\partial D_i \cap \partial M$ — правильная часть M;
2) для каждого i, $1 \leqslant i < n$, границы областей D_i и D_{i+1} пересекаются по ребру;
3) $i(D_1) = i(D_n) = 3$ и для каждого j, $1 < j < n$, $i(D_j) = 4$.

Лемма 5 [2]. *Если M — приведённая связная односвязная диаграмма типа $C(6)$, не содержащая деновской области, то она содержит по крайней мере три непересекающиеся полосы.*

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e, в которой склеенные рёбра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D, называется $(s-i)$-областью.

Лемма 6 [3]. *Пусть M — приведённая связная диаграмма группы Кокстера большого типа, содержащая $(s-i)$-области. Тогда $\varphi(j)$ и $\varphi(\delta)$ содержат одну букву.*

Лемма 7 [2]. *Если M — приведённая связная односвязная R-диаграмма, то она не содержит $(s-i)$-областей.*

Удаление деновской области диаграммы M, т. е. удаление её граничного пути, называется деновским сокращением диаграммы M или R-сокращением. Будем говорить, что диаграмма M является R-приведённой, если она не содержит деновских областей.

Пусть Π — полоса диаграммы M, $\partial M = \gamma \cup (\partial\Pi \cap \partial M)$, $\gamma_1 = \partial\Pi \setminus (\partial\Pi \cap \partial M)$. Замену диаграммы M на диаграмму M_1, полученную из M удалением полосы Π, в результате чего граничный цикл M преобразуется в граничный цикл $\partial M_1 = \gamma\gamma_1$, назовём специальным R-сокращением или $\bar{R}$-сокращением. Если M не содержит полос, то назовём M специально R-приведённой или $\bar{R}$-приведённой. Слово $w \in G$, где G — группа Кокстера большого типа, назовём R-приводимым, если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $|b| \leqslant 2$. Назовём w циклически R-приведённым, если все его циклические перестановки являются R-приведёнными словами. Если w' получено из w R-приведением, то $|w'| < |w|$ по лемме 2.

Циклически R-приведённое слово w группы Кокстера G большого типа назовём специально R-приводимым, если в некоторой его циклической перестановке можно выделить подслово $s_1 s_2 \dots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причём при $t = 1$ и $t = n$ выполнено $|d_1| = |b_1| = |d_2| = |d_n| = |b_n| = |d_{n+1}| = 1$, а для t, $1 < t < n$, выполнено $|d_t| = |d_{t+1}| = 1$, $|b_t| = 2$.

Лемма 8. *Пусть $w \in G$, G — группа Кокстера большого типа, слово w является циклически R-приведённым. Тогда если слово w' получено из w специальным R-приведением, то $|w'| < |w|$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 9 [2]. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведённого слова w группы Кокстера большого типа выяснить, является ли слово w R-приведённым.*

Лемма 10 [2]. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R-приведённого слова w из группы Кокстера большого типа выяснить, является ли слово w специально R-приведённым.*

Лемма 11. *В группах Кокстера большого типа разрешима проблема равенства слов.*

Доказательство очевидно.

Приведённую связную односвязную R-диаграмму M назовём чечевичной, если M состоит из таких областей $D_1, \dots, D_n$, что для каждого i, $1 \leqslant i < n$, $D_i \cap D_{i+1}$ есть ребро; для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполнено $D_i \cap \gamma_1 \neq \varnothing$ и $D_i \cap \gamma_2 \neq \varnothing$, где $\gamma_1 \gamma_2^{-1}$ — граничный цикл M.

Пусть M — приведённая связная односвязная R-диаграмма, никакая область которой не является правильной. Тогда M состоит из чечевичных поддиаграмм, являющихся компонентами данной диаграммы, причём если каждой компоненте поставить в соответствие точку, то получим граф. В таких диаграммах можно выполнить деновские сокращения.

Рассмотрим теперь кольцевые диаграммы над группами Кокстера большого типа. Назовём связную карту M на плоскости E^2 кольцевой картой, если её дополнение состоит в точности из двух компонент. Через K обозначим неограниченную, а через H — ограниченную компоненту множества M. Назовём $\partial M \cap \partial K$ внешней границей, а $\partial M \cap \partial H$ — внутренней границей карты M. Цикл минимальной длины, содержащий все рёбра внешней границы карты M, есть внешний граничный цикл карты M, обозначим его σ. Аналогично определяется внутренний граничный цикл карты M. Обозначим его τ.

Пусть F — свободное произведение, R — симметризованное подмножество его элементов, N — нормальное замыкание R в F. Пусть u и z — два циклически приведённых слова из F, не лежащих в N и не сопряжённых в F. Если u и z представляют некоторые сопряжённые элементы группы $G = F/N$, то существует приведённая кольцевая R-диаграмма M, содержащая не менее одной области, такая что если $\sigma = e_1 \dots e_s$ и $\tau = t_1 \dots t_k$ соответственно внутренний и внешний граничные циклы карты M, то произведение $\varphi(e_1) \cdots \varphi(e_s)$ является циклически приведённым и сопряжённым к элементу u в F, а произведение $\varphi(t_1) \cdots \varphi(t_k)$ является циклически приведённым и сопряжённым к z^{-1} в F, где $z^{-1} = \operatorname{rev}(z)$ [3]. Пусть u, z — два циклически приведённых слова, $u, z \notin \langle R \rangle^G$, u и z не сопряжены в F и сопряжены в G. Тогда существует связная приведённая кольцевая R-диаграмма M с внешней граничной меткой u и внутренней граничной меткой z^{-1}, граничными метками областей D которой являются соотношения из R. Подвергнем кольцевую R-диаграмму следующему преобразованию. Если две области D_1, D_2 пересекаются по ребру e, причём общей граничной меткой является либо соотношение из некоторого симметризованного множества R_{ij}, либо слово, равное 1 в F_{ij}, то, стирая ребро e, объединяем D_1 и D_2 в одну область, причём в случае равенства 1 в F_{ij} данную область выбрасываем, а её границу склеиваем. В результате получаем кольцевую R-диаграмму M' с условием $C(6)$ с теми же граничными метками u и z^{-1}. В дальнейшем будем рассматривать кольцевые связные приведённые R-диаграммы M для элементов группы Кокстера большого типа, инвариантные относительно указанных выше преобразований. Будем предполагать также, что u и z^{-1} являются циклически R-приведёнными и специально R-приведёнными словами. Заметим, что меткой каждого внутреннего ребра будет буква $a_j \in A$.

Изучим кольцевые R-диаграммы M для элементов групп Кокстера большого типа, не содержащих $(s-i)$-областей.

Лемма 12. *Пусть M — связная приведённая кольцевая R-диаграмма с граничными метками $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$, принадлежащими группе Кокстера большого типа, $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ — специально R-приведённые слова. Тогда если каждая граничная область D карты M пересекается только с внешним или только с внутренним граничным циклом M, то $\partial M \cap \partial D$ — связное множество.*

Доказательство очевидно.

Обозначим через $\sum^\bullet$ суммирование по граничным областям диаграммы.

Лемма 13 [2]. *Пусть M — кольцевая связная приведённая R-диаграмма с условием $C(6)$, каждая граничная область D которой такова, что $\partial D \cap \partial M$ — связное множество. Тогда $\sum\limits_M^\bullet \bigl(4 - i(D)\bigr) \geqslant 0$.*

Пусть M — связная кольцевая R-диаграмма, для каждой граничной области D которой $\partial D \cap \partial M$ — связное множество. Тогда внешний (внутренний) граничный слой M образует кольцевую связную R-диаграмму, которую будем называть внешним (внутренним) K-слоем диаграммы M и обозначать через K_σ (K_τ), где σ (τ) — внешний (внутренний) граничный цикл диаграммы M.

Пусть M — связная кольцевая R-диаграмма, являющаяся диаграммой сопряжённости слов из группы Кокстера большого типа. Тогда внешний (внутренний) K-слой из M назовём специальным K-слоем, если образующие его области $D_1, \dots, D_n$ удовлетворяют следующим условиям:

1) для каждого j, $1 \leqslant j < n-1$, $D_j \cap D_{j+1}$ есть ребро;

2) $D_1 \cap D_n$ есть ребро;
3) $i(D_1) = 3$, $i(D_2) = i(D_3) = \ldots = i(D_n) = 4$.

Пусть M — кольцевая связная приведённая R-диаграмма с условием $C(6)$ над группами Кокстера большого типа. Обозначим через M' кольцевую диаграмму, полученную из M удалением внешнего граничного слоя K_σ, через M'' — диаграмму, полученную из M удалением внутреннего граничного слоя K_τ, а через M''' — диаграмму, полученную из M удалением внутреннего и внешнего граничного слоёв.

Лемма 14. *Пусть M — связная кольцевая приведённая R-диаграмма сопряжённости слов из группы G Кокстера большого типа, у которой σ — внешний, τ — внутренний граничный цикл, метки $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$, являются циклически R-приведёнными словами. Пусть также каждая граничная область D карты M пересекается либо с σ, либо с τ. Тогда если K — специальный внешний (внутренний) слой M, внешней (внутренней) граничной меткой которого является слово w (v) из G, то $|v| < |w|$.*

Учитывая структуру специального слоя и используя леммы 1 и 2, получим необходимую оценку.

Лемма 15 [2]. *Пусть M — связная приведённая кольцевая R-диаграмма сопряжённости элементов из группы Кокстера большого типа, σ, τ — внешний и внутренний граничные циклы M, метки которых $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются специально R-приведёнными. Пусть каждая граничная область D из M пересекается либо с σ, либо с τ. Тогда если внешний и внутренний слои карты M не являются специальными, то $\sum\limits_{\sigma}^{\bullet}\bigl(4 - i(D)\bigr) \geqslant 0$ и $\sum\limits_{\tau}^{\bullet}\bigl(4 - i(D)\bigr) \geqslant 0$.*

Пусть M — связная карта, состоящая из связной кольцевой диаграммы M_1 и связной односвязной диаграммы M_2, соединённых друг с другом некоторым простым путём, возможно нулевой длины. Назовём диаграмму M_2 островом.

Если связная кольцевая диаграмма M_1 связной карты M соединена со связной односвязной диаграммой M_2 посредством некоторой области D, где $\partial D \cap \partial M$ — несвязное множество и внутренняя степень области D относительно каждой диаграммы M_i, $i = 1, 2$, не меньше единицы, то диаграмму M_2 назовём полуостровом M.

Лемма 16 [2]. *Пусть M — приведённая связная кольцевая R-диаграмма сопряжённости слов $\varphi(\sigma), \varphi(\tau) \in G$, G — группа Кокстера большого типа, σ, τ — внешний и внутренний граничные циклы M, каждая граничная область D из M пересекается либо с σ, либо с τ, слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются специально R-приведёнными. Тогда диаграмма M' (M''), полученная из M удалением внешнего граничного слоя K_σ (внутреннего граничного слоя K_τ) диаграммы M, не содержит ни островов, ни полуостровов.*

Пусть M — приведённая связная кольцевая R-диаграмма сопряжённости слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ группы Кокстера большого типа, σ, τ — внешний и внутренний граничные циклы M, каждая граничная область D пересекается либо с σ, либо с τ, слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются специально R-приведёнными и $\sum\limits_{\sigma}^{\bullet}\big(4-i(D)\big)=0$ ($\sum\limits_{\tau}^{\bullet}\big(4-i(D)\big)=0$). Тогда назовём M специальной кольцевой R-диаграммой.

Лемма 17 [2]. *Пусть M — специальная кольцевая R-диаграмма. Тогда внешний (внутренний) граничный K-слой карты M не содержит области D с $i(D)>5$ и в K число областей с внутренней степенью 3 равно числу областей с внутренней степенью 5.*

Лемма 18. *Пусть M — приведённая связная кольцевая R-диаграмма сопряжённости слов $\varphi(\sigma),\varphi(\tau)\in G$, G — группа Кокстера большого типа, σ, τ — внешний и внутренний граничный циклы M, каждая граничная область D пересекается либо с σ, либо с τ, слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются специально R-приведёнными. Тогда если внешний и внутренний граничные слои карты M не являются специальными, то $\sum\limits_{\sigma}^{\bullet}\big(4-i(D)\big)=0$ и $\sum\limits_{\tau}^{\bullet}\big(4-i(D)\big)=0$.*

Доказательство очевидно.

Кольцевую связную приведённую R-диаграмму M сопряжённости слов $\varphi(\sigma),\varphi(\tau)\in G$, где σ, τ внешний и внутренний граничные циклы M, назовём минимальной, если не существует кольцевой R-диаграммы M_0 с теми же граничными метками $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$, имеющей меньшее число областей. Очевидно, что минимальная кольцевая связная R-диаграмма сопряжённости слов $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ является приведённой.

Лемма 19 [2]. *Пусть M — специальная кольцевая R-диаграмма группы Кокстера G большого типа с граничными циклами σ, τ. Тогда $|\varphi(\partial K_\sigma\cap\partial M)|\geqslant|\varphi(\partial K_\sigma\cap\partial M')|$ ($|\varphi(\partial K_\tau\cap\partial M)|\geqslant|\varphi(\partial K_\tau\cap\partial M'')|$), где K_σ — внешний (K_τ — внутренний) граничный слой M.*

Кольцевую связную приведённую однослойную R-диаграмму M с граничными циклами σ, τ группы Кокстера большого типа, для которой метки $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются приведёнными в F, слово $\varphi(\sigma)$ является R-приведённым и специально R-приведённым, назовём особо специальной R-диаграммой, если в M существует одна область D, такая что $\big|\varphi\big(\partial D\setminus(\partial D\cap\sigma)\big)\big|=3$, а для остальных областей D' справедливо $\big|\varphi\big(\partial D'\setminus(\partial D'\cap\sigma)\big)\big|=4$. Слово $\varphi(\tau)$ является циклически R-приведённым и циклически специально R-приведённым. Замену слова $\varphi(\sigma)$ словом $\varphi(\tau)$ назовём специальным кольцевым R-сокращением.

Лемма 20 [2]. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически R-приведённого циклически специально R-приведённого слова w из группы Кокстера большого типа установить, применимо ли к нему специальное кольцевое R-сокращение.*

Рассмотрим кольцевые связные приведённые R-диаграммы M сопряжённости слов групп Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ, у которых не каждая граничная область является простой. При этом кольцевая R-диаграмма M может быть одного из следующих видов.

1. $\sigma \cap \tau = \varnothing$, каждая область $D \in M$ граничная, $\partial D \cap \partial M$ — несвязное множество, $i(D) = 2$.
2. $\sigma \cap \tau \neq \varnothing$.
3. $\sigma \cap \tau = \varnothing$, существует область D с $i(D) > 2$, $\partial D \cap \partial M$ — несвязное множество.

Будем говорить, что циклически несократимое слово w группы Кокстера большого типа обладает свойством s, если w циклически R-несократимо, циклически специально R-несократимо и к нему неприменимо кольцевое специальное R-сокращение.

Лемма 21. *Пусть u, v — слова группы Кокстера G большого типа, обладающие свойством s. Тогда можно эффективно установить, являются ли слова u, v граничными метками кольцевой связной приведённой R-диаграммы вида 2.*

Доказательство очевидно.

Лемма 22 [2]. *Пусть u, v — слова группы Кокстера большого типа, обладающие свойством s. Тогда если u, v — граничные метки кольцевой связной приведённой R-диаграммы M вида 3 с граничными циклами σ, τ, $\varphi(\sigma) = u$, $\varphi(\tau) = v^{-1}$, то существует простой путь $\chi = e_1 e_2$, принадлежащий граничному циклу некоторой области D, соединяющей граничные вершины из σ и τ, метка которого может быть эффективно определена.*

Лемма 23 [2]. *Пусть u, v — слова группы Кокстера большого типа, обладающие свойством s. Тогда можно эффективно установить, являются ли u, v граничными метками кольцевой связной приведённой R-диаграммы M вида 1.*

Пусть w — произвольное слово группы Кокстера большого типа. Рассмотрим следующие преобразования, укорачивающие длину циклического слова w:

π_1: циклическое сокращение w в свободном произведение F;
π_2: циклическое R-сокращение в G;
π_3: циклическое специальное R-сокращение в G;
π_4: кольцевое специальное R-сокращение в G;
π_5: переход от w к сопряжённому слову u, $|u| < |w|$, с помощью кольцевой диаграммы вида 1;
π_6: то же, что π_5, но с помощью кольцевой диаграммы вида 2;
π_7: то же, что π_5, но с помощью кольцевой диаграммы вида 3.

Слово w, полученное из v применением к нему преобразований π_1—π_7 в G, назовём тупиковым для v, если оно инвариантно относительно этих преобразований.

Из лемм 9—23 следует, что для любого слова $v \in G$ можно эффективно построить соответствующее ему тупиковое слово w.

Кольцевую связную приведённую R-диаграмму M с граничными циклами σ, τ назовём простой, если $|M| \geqslant 1$ и $\sigma \cap \tau \neq \varnothing$; M назовём вырожденной, если $|M| = 0$, где $|M|$ — число областей диаграммы M.

Кольцевая связная приведённая R-диаграмма M с граничными циклами σ, τ называется n-слойной, $n \geqslant 1$, если после последовательного удаления граничных слоёв получается вырожденная кольцевая R-диаграмма, и $(C-n)$-слойной, если в результате удаления указанных выше граничных слоёв получается простая кольцевая R-диаграмма.

Лемма 24. *Пусть $v \in G$, G — группа Кокстера большого типа, v обладает свойством s и w — тупиковое для v слово. Тогда никакое слово $u \in G$, $|u| < |w|$, не является сопряжённым с v.*

Доказательство непосредственно использует понятие тупикового слова, R-сокращения и специального R-сокращения.

Пусть M — кольцевая специальная R-диаграмма типа $C(6)$ с граничными циклами σ, τ. Тогда граничный слой K_σ (K_τ) назовём RK-слоем, если $|\partial K_\sigma \cap \partial M| = |\partial K_\sigma \cap \partial M'|$ $(|\partial K_\sigma \cap \partial M| = |\partial K_\sigma \cap \partial M''|)$, где диаграмма M' (M'') получена из M удалением внешнего слоя K_σ (внутреннего слоя K_τ).

Лемма 25 [2]. *Пусть M — кольцевая связная приведённая минимальная R-диаграмма вида $C(6)$ группы Кокстера G большого типа с граничными циклами σ, τ. Пусть слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются тупиковыми. Если M — n-слойная или $(C-n)$-слойная диаграмма, $n > 1$, то для любой области $D \subset M$ справедливо $d(D) = 6$.*

Теорема 2. *Пусть M — кольцевая связная приведённая минимальная R-диаграмма вида $C(6)$ с граничными циклами σ, τ группы Кокстера G большого типа. Пусть $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ обладают свойством s, $\varphi(\sigma)$ — слово из параболической подгруппы G_j на образующих A_j, $A_j \subset A$, A — множество образующих G, $\varphi(\sigma)$ не является образующим из A_j. Тогда $\varphi(\tau) \in G_j$ и слова $\varphi(\sigma)$ и $\varphi(\tau)$ сопряжены в G_j.*

Доказательство. Из условий следует, что кольцевая R-диаграмма M является специальной. Если диаграмма M n-слойная, $n > 1$, то нетрудно убедиться в том, что метка каждой области $D \subset M$ принадлежит G_j. Пусть M — $(C-n)$-слойная диаграмма. Рассмотрим кольцевую диаграмму $\tilde{M}$ с граничными циклами σ, σ_n, полученную из M удалением простой кольцевой поддиаграммы M_n с граничными циклами σ_n, τ. Слово $\varphi(\sigma_n)$ обладает свойством s, поэтому $\varphi(\sigma_n) \in G_j$ и метка любого подпути, содержащегося в $\tau \cap \sigma_n$, является словом в G_j.

Пусть $M_n^1, M_n^2, \ldots, M_n^p$ — односвязные поддиаграммы M_n. Рассмотрим поддиаграмму M_n^j, $1 \leqslant j \leqslant p$, которая простым путём χ_j соединена с предыдущей поддиаграммой, а путём χ'_j с последующей, $\chi_j, \chi'_j \subset \tau \cap \sigma_n$, $v_j = \chi_j \cap M_n^j$, $v'_j = \chi'_j \cap M_n^j$, v_j, v'_j — вершины M_n^j. Пусть D_0, D'_0 — области из M_n^j, такие что $v_j \in \partial D_0$, $v'_j \in \partial D'_0$, $\partial D_0 = p_1 p_2 p_3$, где $\partial D_0 \cap \sigma_n = p_1$, $\partial D_0 \cap \tau = p_2$, $1 \leqslant |p_3| \leqslant 2$, $p_1 \cap p_2 = v_s$, $\partial D' = p'_3 p'_2 p'_1$, $p'_2 = \partial D'_0 \cap \tau$, $\partial D'_0 \cap \sigma_n = p'_1$, $1 \leqslant |p'_3| \leqslant 2$. Если $|p_3| = 1$ $(|p'_3| = 1)$, то $|p_1| > 1$ $(|p'_1| > 1)$, так как если $|p_1| = 1$ $(|p'_1| = 1)$, то получаем R-сократимость $\varphi(\tau)$. Отсюда следует, что $\varphi(D_0), \varphi(D'_0) \in G_j$. Если

$|p_3| = 2$, $|p_2| \geqslant 3$, $|p_1| = 1$, то в K_τ содержится полоса, так как в этом случае D_0 ограничивает слева поддиаграмму Γ (см. [1]). При $|p_1| > 1$ имеем $\varphi(D_0) \in G_j$. Пусть $|p_3| = 1$ и $M_n^j \subset K_\tau$. В этом случае метка любой области $D \subset M_n^j$, как нетрудно убедиться, принадлежит G_j. Пусть $M_n^j \not\subset K_\tau$. Рассмотрим последовательность $D_0, D_1, \ldots, D_k$ областей из M_n^j, в которой любые две области D_i, D_{i+1}, $0 \leqslant i < k$, пересекаются по ребру и $i(D_s) = 2$, $1 \leqslant s < k$, в M_n^j, но $i(D_k) > 2$, а именно $i(D_k) = 3$. Очевидно, что метка каждой области $D \subset M_n^j$ принадлежит G_j.

Рассмотрим область D_k. Пусть $\partial D_k = p_1p_2p_3p_4$, где $p_1 = \partial D_k \cap \sigma_n$, $p_2 = D_{k-1} \cap D_k$, $p_3 = \partial D_k \cap \tau$, $|p_4| = 2$, причём область D_k в рассматриваемом случае ограничивает слева поддиаграмму Γ, $\partial\Gamma = \gamma \operatorname{cs} \delta$, где $\partial\Gamma \cap \sigma_n = \gamma$, $\partial\Gamma \cap \tau = \delta$, $\partial\Gamma \cap D_k = c = p_4$, $\partial\Gamma \cap D_k' = s$, D_k' — область, ограничивающая Γ справа, $\partial D_k' \cap \partial M_n^j$ — несвязное множество. Если $|p_1| = 0$, то $i(D_k) = 3$ в M и M вдоль границы τ содержит полосу. Поэтому $|p_1| \neq 0$ и $\varphi(D_k) \in G_j$.

Обозначим $\Gamma' = D_k \cup \Gamma \cup D_k'$. Каждая область D, $D \subset \Gamma'$, $D \subset \Gamma$, граничащая с γ, имеет внутреннюю степень $3 \leqslant i(D) \leqslant 5$, причём область D с $i(D) = 5$ граничит с простыми граничными областями D', D'', имеющими внутреннюю степень 3 или 4, метка которых принадлежит G_j, поэтому $\varphi(D) \subset G_j$. Остаётся показать, что метка D_k' тоже принадлежит G_j. Пусть $\partial D_k = sp_1's'p_2'$, где $\partial D_k' \cap \sigma_n = p_2'$, $\partial D_k' \cap \tau = p_1$. Если $|p_2'| \neq 0$, то $\varphi(D_k') \in G_j$. Пусть $|p_2'| = 0$ и $s' = 2$. Тогда D_k' ограничивает слева следующую Γ-поддиаграмму, в этом случае вдоль τ M содержит полосу [1, лемма 22]. Случай, когда $|p_2'| = 0$ и $|s'| = 1$, невозможен по тем же соображениям (см. [1, лемма 22]).

Таким образом, все области из M_n, граничащие с σ_n, имеет метки, принадлежащие G_j. Следовательно, метка σ_n' простой кольцевой R-диаграммы M_n', полученной из M_n удалением областей, граничащих с σ_n, будет принадлежать G_j. Проводя для M_n' рассуждения, аналогичные изложенным, убеждаемся, что все области из M_n', граничащие с σ_n, имеют метки из G_j и т. д.

В случае если диаграмма M есть диаграмма вида 1, 2 или 3, рассуждая указанным выше образом, убеждаемся в справедливости теоремы. $\square$

Следствие 1. *Пусть $u, v \in G$, G — группа Кокстера большого типа, A — множество образующих G, u, v обладают свойством s и существует такой элемент $z \in G$, что $z^{-1}uz = v$. Тогда если слово u — это слово из параболической подгруппы G_j на образующих A_j, $A_j \subset A$, не являющееся образующим из A_j, то $v \in G_j$ и существует элемент $z' \in G_j$, $z' = z$ в G, такой что $z'^{-1}uz' = v$, где $z'^{-1} = \operatorname{rev}(z')$.*

Следствие 2. *Пусть G — группа Кокстера большого типа на образующих A, G_j — параболическая подгруппа G на множестве образующих $A_j \subset A$, слово u обладает свойством s, $u \in G_j$ и u не является образующим из A_j. Тогда $N_G(u) = N_{G_j}(u)$.*

Рассмотрим кольцевые связные приведённые R-диаграммы группы Кокстера большого типа, содержащие $(s-i)$-области.

Лемма 26 [2]. *Пусть M — кольцевая связная приведённая минимальная R-диаграмма группы Кокстера G большого типа с граничными циклами σ, τ, $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s. Тогда если M содержит $(s-i)$-область, то все области M являются $(s-i)$-областями.*

Следствие 3. *Пусть M — связная приведённая минимальная R-диаграмма группы Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ, $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s. Тогда если M состоит из n, $n > 1$, $(s-i)$-областей, то $\varphi(\sigma) = x$, $\varphi(\tau) = y$, где $x, y \in \{a_1, \ldots, a_n\}$, $\{a_i\}$ — множество образующих группы G.*

Лемма 27 [2]. *Пусть M — кольцевая связная приведённая минимальная R-диаграмма группы Кокстера большого типа с граничными циклами σ, τ, $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ удовлетворяют условию s. Тогда если $\varphi(\sigma) = x$, где $x \in \{a_1, \ldots, a_n\}$, $\{a_i\}$ — множество образующих группы G, то $\varphi(\tau) = y$, $y \in \{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Теорема 3. *Пусть G — группа Кокстера большого типа с множеством образующих A. Если $v_0 \in G$, $v_0 \neq 1$ в G и v_0 — R-приведённое специально R-приведённое слово, равное слову из параболической подгруппы G_j с образующими A_j, $A_j \subset A$, то v_0 — слово на образующих A_j.*

Доказательство. Пусть слово v_0, удовлетворяющее условиям теоремы, содержит буквы из множества $B_j = A \setminus A_j$ и равно некоторому слову $u_0^{-1} \in G_j$: $v_0 = u_0^{-1}$. Пусть $v_0 = v_{01} v v_{02}$, где $v_{01}, v_{02} \in G_j$, v начинается и оканчивается на буквы из B_j. Преобразуем равенство $v_0 = u_0^{-1}$ в равенство $v = u^{-1}$, где $u^{-1} = v_{01}^{-1} v_0^{-1} v_{02}^{-1}$, u^{-1} является R-приведённым и специально R-приведённым. Слово uv является приведённым и циклически приведённым, и $uv = 1$ в G. Тогда существует связная односвязная приведённая минимальная R-диаграмма M с граничным циклом $\alpha\beta$, где $\varphi(\alpha) = u$, $\varphi(\beta) = v$. Допустим, что M состоит из одной области D. Тогда α является ребром D, поэтому $|u| = 1$ и слово v является R-сократимым. Допустим, что M не содержит n областей, $n > 1$. Тогда для M выполняется формула кривизны $\sum\limits_M^{\bullet} \bigl(4 - i(D)\bigr) \geqslant 6$. Тогда $\alpha \cap \beta = \{O_1, O_2\}$, где $O_1 = H(\alpha) = K(\beta)$, $O_2 = K(\alpha) = H(\beta)$.

Покажем, что M не содержит деновских областей. Допустим противное. Пусть D — деновская область M. Тогда ∂D содержит либо точку O_2, либо точку O_1. Допустим, что $O_2 \in \partial D$, тогда $\partial D \cap \partial M = \gamma\delta$, где $\partial D \cap \alpha = \delta$, $\partial D \cap \beta = \gamma$. Учитывая строение метки $\varphi(\partial D)$ и условие $u \in G_j$, получаем $|\varphi(\delta)| = 1$ и $|\varphi(\gamma)| \geqslant 3$. Так как слово v R-несократимо, то $i(D) = 2$ и $|\varphi(\gamma)| = 3$. В этом случае в M можно выделить связную односвязную поддиаграмму Γ, ограниченную в M слева областью D, справа — областью D', $\partial\Gamma = c\alpha_1 c' \beta_1$, где $\partial\Gamma \cap \alpha = \alpha_1$, $\partial\Gamma \cap \beta = \beta_1$, $\partial D \cap \Gamma = c$, $\partial D' \cap \Gamma = c'$, $|c| = |c'| = 2$. Обозначим через M_1 объединение D, Γ и D' и через $D_1, D_2, \ldots, D_p$ — области, которые содержатся в Γ и граничат с β_1. Как показано в [1, леммы 19—22], все они являются простыми в M_1 и для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant p$, имеем $3 \leqslant i(D_j) \leqslant 5$. Кроме того, существует m, $1 \leqslant m \leqslant p$, такое что $i(D_1) = i(D_2) = \ldots = i(D_{m-1}) = 4$, $i(D_m) = 3$ в M_1, а также и в M. Поэтому в M области $D, D_1, \ldots, D_m$ образуют полосу, т. е. слово v специально R-сократимо, что невозможно. Тогда M содержит как минимум три непересекающиеся полосы, что невозможно. $\square$

Литература

[1] Безверхний В. Н. О нормализаторах элементов в $C(p)\&T(q)$-группах // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвуз. сб. науч. тр. — Тула, 1994. — С. 4—58.

[2] Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы сопряжённости слов в группах Кокстера большого типа // Чебышёвский сб. — 2003. — Т. 4, вып. 1 (5). — С. 10—33.

[3] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Наука, 1980.

[4] Appel K. On Artin groups and Coxeter groups of large type // Contributions to Group Theory. — Amer. Math. Soc., 1984. — P. 50—78. — (Contemp. Math.; Vol. 33).