Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями

И. Б. КОЖУХОВ, А. В. РЕШЕТНИКОВ
Московский государственный институт электронной техники
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

УДК 512.571+512.548.2+512.533

Ключевые слова: конгруэнция универсальной алгебры, односторонняя конгруэнция группоида, односторонняя конгруэнция полугруппы.

Аннотация

Доказано, что все отношения эквивалентности универсальной алгебры A являются её конгруэнциями в том и только том случае, если либо $|A| \leqslant 2$, либо каждая операция f сигнатуры является константой (т. е. $f(a_1, \ldots, a_n) = c$ для некоторого $c \in A$ и всех $a_1, \ldots, a_n \in A$) или проекцией (т. е. $f(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ для некоторого i и всех $a_1, \ldots, a_n \in A$). Все отношения эквивалентности группоида G являются его правыми конгруэнциями в том и только том случае, если либо $|G| \leqslant 2$, либо каждый элемент $a \in G$ является правой единицей или обобщённым правым нулём (т. е. $xa = ya$ при всех $x, y \in G$). В полугруппе S все отношения эквивалентности — правые конгруэнции в том и только том случае, если либо $|S| \leqslant 2$, либо S представима в виде $S = A \cup B$, где A — инфляция полугруппы правых нулей, а B — пустое множество или полугруппа левых нулей, причём $ab = a$, $ba = a^2$ при $a \in A$, $b \in B$. Если G — группоид из четырёх или большего числа элементов и все его отношения эквивалентности являются правыми или левыми конгруэнциями, то либо все отношения эквивалентности левые, либо все они правые конгруэнции. Для полугрупп аналогичное утверждение справедливо без ограничения на количество элементов.

Abstract

I. B. Kozhukhov, A. V. Reshetnikov, Algebras whose equivalence relations are congruences, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 161—192.

It is proved that all the equivalence relations of a universal algebra A are its congruences if and only if either $|A| \leqslant 2$ or every operation f of the signature is a constant (i.e., $f(a_1, \ldots, a_n) = c$ for some $c \in A$ and all the $a_1, \ldots, a_n \in A$) or a projection (i.e., $f(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ for some i and all the $a_1, \ldots, a_n \in A$). All the equivalence relations of a groupoid G are its right congruences if and only if either $|G| \leqslant 2$ or every element $a \in G$ is a right unit or a generalized right zero (i.e., $xa = ya$ for all $x, y \in G$). All the equivalence relations of a semigroup S are right congruences if and only if either $|S| \leqslant 2$ or S can be represented as $S = A \cup B$, where A is an inflation of a right zero semigroup, and B is the empty set or a left zero semigroup, and $ab = a$, $ba = a^2$ for $a \in A$, $b \in B$. If G is a groupoid of 4 or more elements and all the equivalence relations of it are right or left congruences, then either all the equivalence relations of the groupoid G are left congruences, or all of them are right congruences. A similar assertion for semigroups is valid without the restriction on the number of elements.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 161—192.

1. Введение

Решётка конгруэнций универсальной алгебры играет важную роль в теории универсальных алгебр: она несёт определённую информацию о строении алгебры, отражает ряд её свойств. Одним из направлений общей алгебры является изучение алгебр, у которых решётка конгруэнций обладает теми или иными свойствами: конгруэнц-модулярных алгебр, конгруэнц-дистрибутивных алгебр, конгруэнц-простых алгебр, подпрямо неразложимых алгебр, алгебр с условиями конечности на конгруэнции. К этому направлению относится, в частности, теория простых групп, простых колец, простых и 0-простых полугрупп, артиновых и нётеровых колец и модулей.

Прямой противоположностью конгруэнц-простых алгебр является класс алгебр, у которых любое отношение эквивалентности — конгруэнция. Мы находим простую характеризацию таких алгебр. А именно, доказано, что необходимым и достаточным условием принадлежности алгебры A этому классу является то, что либо $|A| \leqslant 2$, либо каждая операция из сигнатуры является константой или проекцией.

В алгебрах с бинарной операцией (группоидах) наряду с решёткой конгруэнций часто рассматриваются решётка правых конгруэнций и решётка левых конгруэнций. Каждая из этих решёток несёт гораздо более значительную информацию об алгебре, чем решётка (двусторонних) конгруэнций. Например, если решётка правых (или левых) конгруэнций полугруппы конечна, то сама полугруппа конечна (это следует из [8, теорема 9]). С односторонними конгруэнциям полугрупп приходится часто иметь дело в теории полигонов над полугруппами (автоматов).

Пусть G — группоид, $\mathrm{RCon}\,G$ ($\mathrm{LCon}\,G$) — решётка его правых (соответственно левых) конгруэнций, $\mathrm{Eq}\,G$ — решётка отношений эквивалентности на множестве G. Известно, что решётки $\mathrm{RCon}\,G$ и $\mathrm{LCon}\,G$ являются подрешётками решётки $\mathrm{Eq}\,G$.

В работе доказано, что для любого группоида G

$$\mathrm{Eq}\,G = \mathrm{RCon}\,G \iff \forall\, a \in G \ (a \text{ — правая единица или } |Gu| = 1).$$

Конечно, аналогичная характеризация имеет место и для левых конгруэнций. Естественно возникает вопрос: как устроены группоиды, у которых любое отношение эквивалентности является правой или левой конгруэнцией? В работе доказано, что для группоида G из четырёх или большего числа элементов

$$\mathrm{Eq}\,G = \mathrm{RCon}\,G \cup \mathrm{LCon}\,G \iff (\mathrm{Eq}\,G = \mathrm{RCon}\,G \ \vee\ \mathrm{Eq}\,G = \mathrm{LCon}\,G).$$

Для элементов $a \neq b$ группоида G положим

$$\rho_{a,b} = \{(a,b),(b,a)\} \cup \{(x,x) \mid x \in G\}.$$

Очевидно, отношения $\rho_{a,b}$ являются отношениями эквивалентности, причём это в точности атомы решётки $\mathrm{Eq}\,G$. Существуют группоиды G любой мощности не меньше 3, такие что $\rho_{a,b} \in \mathrm{RCon}\,G \cup \mathrm{LCon}\,G$ при всех a, b, но $\mathrm{RCon}\,G \neq \mathrm{Eq}\,G$

и $\mathrm{LCon}\,G \neq \mathrm{Eq}\,G$ (пример приведён в работе). Одним из результатов работы является следующее утверждение: если все отношения вида $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$, где a, b, c, d — различные элементы группоида G, обладают свойством $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d} \in \mathrm{RCon}\,G \cup \mathrm{LCon}\,G$ и $|G| \geqslant 5$, то $\mathrm{RCon}\,G = \mathrm{Eq}\,G$ или $\mathrm{LCon}\,G = \mathrm{Eq}\,G$.

Наконец, в работе описаны полугруппы, у которых любое отношение эквивалентности является правой или левой конгруэнцией. Каждая из таких полугрупп оказалась одно- или двухэлементной цепью полугрупп, имеющих весьма простое строение (описываемое в терминах полугрупп левых или правых нулей и полугрупп с нулевым умножением). Кроме того, доказано, что если для полугруппы S все отношения эквивалентности вида $\rho_{a,b}$ $(a \neq b)$ обладают свойством $\rho_{a,b} \in \mathrm{RCon}\,G \cup \mathrm{LCon}\,G$, то $\mathrm{RCon}\,G = \mathrm{Eq}\,G$ или $\mathrm{LCon}\,G = \mathrm{Eq}\,G$.

Упомянем вопросы, близкие к поставленным в этой статье. А. Е. Евсеевым [3] изучались полугруппы S, у которых любое подмножество M катенарно ассоциативно (т. е. из $xy \in M$ и $yz \in M$ следует $xyz \in M$ для любых $x, y, z \in S$). Не менее естественным, чем вопрос об отношениях эквивалентности, является вопрос о подмножествах: каковы полугруппы, у которых любое непустое подмножество является подполугруппой? Ответ можно найти в [6]. Мы будем следовать основным определениям из теории полугрупп, содержащимся в работах [4, 6], и определениям из теории универсальных алгебр из работ [1, 5]. Тем не менее многие определения будут здесь приведены для удобства читателя.

2. Определения и обозначения. Предварительные замечания

Универсальной алгеброй (или просто *алгеброй*) называется множество A с *сигнатурой* (набором операций) $\Sigma = \{f_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$. Операция f называется *константой*, если существует такое c, что $f(a_1, \ldots, a_n) = c$ при всех $a_1, \ldots, a_n \in A$. Операция f — *проекция*, если существует такое i, что $f(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ при всех $a_1, \ldots, a_n \in A$. Для элементов $a \neq b$ универсальной алгебры A положим $\rho_{a,b} = \{(a,b),(b,a)\} \cup \Delta$, где $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$ — отношение равенства на A. Хорошо известно, что отношения эквивалентности $\rho_{a,b}$ — это в точности атомы решётки отношений эквивалентности $\mathrm{Eq}\,A$ на A, а каждое отношение эквивалентности является решёточным объединением (конечного или бесконечного) множества атомов. Решётку конгруэнций алгебры A обозначим $\mathrm{Con}\,A$. Одна из целей данной работы — найти необходимые и достаточные условия выполнения равенства $\mathrm{Con}\,A = \mathrm{Eq}\,A$.

Напомним, что *группоидом* называется множество с бинарной операцией. *Правая конгруэнция* группоида G — это такое отношение эквивалентности σ на G, что
$$\forall\, a, b, c \in G \quad (a,b) \in \sigma \Longrightarrow (ac, bc) \in \sigma.$$
Левая конгруэнция определяется двойственным образом. Через $\mathrm{RCon}\,G$ и $\mathrm{LCon}\,G$ мы будем обозначать решётку правых и решётку левых конгруэнций

группоида G соответственно. Для группоида G через $\overleftarrow{G}$ мы будем обозначать *двойственный группоид*: умножение $\cdot$ в G и умножение $*$ в $\overleftarrow{G}$ связаны соотношением $a \cdot b = b * a$. Если G — полугруппа, то определённый выше группоид $\overleftarrow{G}$ также является полугруппой; её мы будем называть *двойственной полугруппой*. Элемент z группоида G назовём *обобщённым правым нулём*, если $xz = yz$ при всех $x, y \in G$. *Обобщённый левый нуль* определяется двойственным образом.

Полугруппой правых нулей называется полугруппа S, в которой $ab = b$ при всех $a, b \in S$; *полугруппа левых нулей* определяется аналогично — тождеством $ab = a$. Если в полугруппе S есть такой элемент θ, что $ab = \theta$ при всех $a, b \in S$, то S называется *полугруппой с нулевым умножением* (θ — нуль). *Связкой* называется полугруппа идемпотентов, т. е. полугруппа, удовлетворяющая тождеству $a^2 = a$. *Полурешётка* — это коммутативная связка, т. е. полугруппа, в которой $a^2 = a$ и $ab = ba$. *Прямоугольная связка* — это полугруппа, удовлетворяющая тождествам $a^2 = a$ и $abc = ac$. Хорошо известно, что прямоугольная связка — это в точности прямое произведение полугруппы левых и полугруппы правых нулей. Полугруппа S называется *связкой полугрупп*, если $S = \bigcup\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$, где Y — связка, $S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ при любых $\alpha, \beta \in Y$. В случае когда Y — полурешётка или цепь, полугруппа $S = \bigcup\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ называется *полурешёткой* или *цепью полугрупп* S_α соответственно.

Группоид G назовём *R-группоидом*, если $\mathrm{RCon}\, G = \mathrm{Eq}\, G$, т. е. любое отношение эквивалентности на G является правой конгруэнцией. Двойственным образом ($\mathrm{LCon}\, G = \mathrm{Eq}\, G$) определим *L-группоид*. Если любое отношение эквивалентности группоида G является его правой или левой конгруэнцией, то группоид G будем называть *$(R \vee L)$-группоидом*. Аналогичным образом определяются R-, L- и $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-полугруппы. Очевидно, для того чтобы группоид G был R-группоидом, необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов $a \neq b$ этого группоида имело место включение $\rho_{a,b} \in \mathrm{RCon}\, G$. Аналогично G — L-группоид, если для любых элементов $a \neq b$ выполняется $\rho_{a,b} \in \mathrm{LCon}\, G$. Для полугрупп, наряду с этими, справедливо и более сильное утверждение, которое будет доказано в последнем разделе: если для любых элементов $a \neq b$ полугруппы S имеет место включение $\rho_{a,b} \in \mathrm{RCon}\, S \cup \mathrm{LCon}\, S$, то S является R- или L-полугруппой. Если $\rho_{a,b} \in \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$ для любой пары a, b различных элементов группоида G, то группоид G может не быть даже $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-группоидом, как показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть $G = \{a_i \mid i \in I\}$, причём множество I таково, что $0, 1 \in I$. Умножение в G определим правилом

$$a_i a_j = \begin{cases} a_j, & \text{если} \quad (i, j) \neq (0, 1), \\ a_0, & \text{если} \quad (i, j) = (0, 1). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что при $i \neq j$, отличных от 0, 1, отношения ρ_{a_0, a_1} и ρ_{a_i, a_j} являются двусторонними конгруэнциями, ρ_{a_0, a_i} — левыми, ρ_{a_1, a_i} — правыми конгруэнциями. Следовательно, $\rho_{x,y} \in \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$ при любых $x \neq y$. Однако в случае $|G| \geqslant 4$ можно найти отношение эквивалентности, не являющееся ни правой, ни левой конгруэнцией. Действительно, возьмём такие элементы $a, b \in G$, что элементы a_0, a_1, a, b все различны. Тогда равенства $\{a_0, b\} \cdot a_1 = \{a_0, a_1\}$ и $a_0 \cdot \{a_1, a\} = \{a_0, a\}$ покажут, что отношение $\rho_{a_1,a} \vee \rho_{a_0,b}$ не принадлежит $\mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$.

Сделаем одно замечание, истинность которого легко проверить непосредственно.

Замечание. Класс алгебр, у которых любое отношение эквивалентности является конгруэнцией, замкнут относительно взятия подалгебр и фактор-алгебр. Классы R-, L- и $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-группоидов замкнуты относительно взятия подгруппоидов и фактор-группоидов. Классы R-, L- и $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-полугрупп замкнуты относительно взятия подполугрупп и фактор-полугрупп.

3. Универсальные алгебры A с условием $\mathrm{Con}\, A = \mathrm{Eq}\, A$

Для получения основной теоремы этого раздела нам понадобятся две леммы.

Лемма 3.1. *Отношение эквивалентности $\sim$ на алгебре A с сигнатурой Σ является конгруэнцией тогда и только тогда, когда для любой операции $f \in \Sigma$ (обозначим её арность через n), любого натурального $i \leqslant n$ и любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b, c \in A$ справедлива импликация*

$$b \sim c \implies f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n) \sim f(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Доказательство очевидно.

Лемма 3.2. *Пусть A — универсальная алгебра с сигнатурой Σ и $|A| > 2$. Если любое отношение эквивалентности на A является конгруэнцией, то для любой операции $f \in \Sigma$ (арности n), любого натурального $i \leqslant n$ и любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ отображение $\varphi \colon A \to A$, определённое по формуле*

$$\varphi(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

является либо тождественным отображением (т. е. $\varphi(x) = x$ для любого $x \in A$), либо константой (т. е. $\varphi(x) = c$ при некотором $c \in A$ и всех $x \in A$).

Доказательство. Достаточность утверждения леммы следует из леммы 3.1. Докажем необходимость. Пусть $\varphi(x)$ не константа. Тогда $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ при некоторых $a, b \in A$. Так как $\rho_{a,b}$ — конгруэнция и $a \neq b$, то $\{\varphi(a), \varphi(b)\} = \{a, b\}$. Разберём два возможных случая.

Случай 1: $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$. Так как $|A| \geqslant 3$, то существует элемент $c \neq a, b$. Если $\varphi(c) \neq b$, то ввиду соотношений $\varphi(a) \neq \varphi(c)$ и $\{\varphi(a), \varphi(c)\} \neq \{a, c\}$ мы получаем, что $\rho_{a,c}$ не является конгруэнцией, а это противоречит условию леммы. Если же $\varphi(c) = b$, то аналогичным образом мы получаем, что

$\rho_{b,c}$ не является конгруэнцией. Полученное противоречие показывает, что этот случай невозможен.

Случай 2: $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$. Пусть c — произвольный элемент из A. Докажем, что $\varphi(c) = c$. Пусть $\varphi(c) \neq c$. Если $\varphi(c) = a$, то $\rho_{b,c}$ не является конгруэнцией, а если $\varphi(c) \neq a$, то $\rho_{a,c}$ не является конгруэнцией. Значит, $\varphi(c) = c$.

Итак, если φ не константа, то $\varphi(x) = x$ при всех x, т. е. φ — тождественное отображение. □

Теорема 3.3. *Пусть A — универсальная алгебра с сигнатурой Σ. Все отношения эквивалентности на алгебре A являются её конгруэнциями в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) $|A| \leqslant 2$;
2) *каждая операция $f \in \Sigma$ является константой или проекцией.*

Доказательство. Вначале докажем достаточность. Если $|A| \leqslant 2$, то ясно, что все отношения эквивалентности — конгруэнции. Предположим теперь, что выполнено условие 2). Так как любое отношение эквивалентности, отличное от Δ, является решёточным объединением отношений $\rho_{a,b}$, то достаточно доказать, что все $\rho_{a,b}$ — конгруэнции. Ввиду леммы 3.1 для этого достаточно доказать импликацию

$$(x, y) \in \rho_{a,b} \implies$$
$$\implies \big(f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n), f(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n)\big) \in \rho_{a,b}.$$

Но импликация очевидна, так как f — константа или проекция.

Докажем необходимость. Пусть A — алгебра сигнатуры Σ, $|A| \geqslant 3$ и все отношения эквивалентности на A являются конгруэнциями. Будем обозначать через $\equiv$ тождественное равенство, т. е. равенство, выполняющееся для всех x. Возьмём любую операцию $f \in \Sigma$, обозначим её арность через n. Предположим, что f не является константой. Тогда $f(a_1, \ldots, a_n) \neq f(b_1, \ldots, b_n)$ при некоторых $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$. Очевидно, мы можем считать, что наборы $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ отличаются лишь символами одной позиции, т. е.

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, p, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, q, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

при некоторых $p, q \in A$. Отсюда следует, что отображение

$$\varphi(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

не является константой, а значит, по лемме 3.2 $\varphi(x) = x$ при всех $x \in A$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$f(u_1, \ldots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \ldots, u_n) = x$$

при всех $u_1, \ldots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \ldots, u_n \in A$. Предположим, что это не так. Тогда

$$f(u_1, \ldots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \ldots, u_n) \not\equiv x$$

при некоторых $u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n \in A$.

Итак,

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \equiv x, \quad f(u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \dots, u_n) \not\equiv x.$$

Очевидно, мы можем считать, что наборы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ и $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$ различаются лишь в одной позиции, скажем в j-й. Для определённости предположим, что $j < i$. Будем считать, что

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, p, a_{j+1}, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \equiv x,$$
$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, q, a_{j+1}, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \not\equiv x$$

при некоторых $a_1, \dots, a_{j-1}, p, q, a_{j+1}, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$. Положим

$$\mu(y, x) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Мы имеем

$$\mu(p, x) \equiv x, \quad \mu(q, x) \not\equiv x.$$

Следовательно, $\mu(q, a) \neq a$ при некотором $a \in A$. Отсюда по лемме 3.2 получаем, что отображение $x \mapsto \mu(q, x)$ является константой, т. е. $\mu(q, x) = c$ при некотором $c \in A$ и всех $x \in A$. Так как $|A| \geqslant 3$, то существует элемент $b \neq a, c$. Так как $\mu(p, a) = a$, а $\mu(q, a) = c \neq a$, то отображение $y \mapsto \mu(y, a)$ не является константой, поэтому по лемме 3.2 $\mu(y, a) = y$ при всех $y \in A$. Взяв $y = p$, получим, что $a = p$; взяв $y = q$, получим, что $c = q$. Имеем $\mu(a, b) = \mu(p, b) = b$, $\mu(c, b) = \mu(q, b) = c$. Так как $b \neq c$, то отображение $z \mapsto \mu(z, b)$ не константа. Тогда по лемме 3.2 $\mu(z, b) = z$ при всех $z \in A$. Отсюда получаем, что $\mu(a, b) = a$. Следовательно, $a = b$. Но это противоречит выбору элемента b. □

4. R-, L-, $(\mathbf{R} \vee \mathbf{L})$-группоиды и группоиды, близкие к ним

Используя теорему 3.3, нетрудно получить следующую характеризацию R-группоидов.

Теорема 4.1. *Все отношения эквивалентности группоида G являются его правыми конгруэнциями в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) $|G| \leqslant 2$;
2) *каждый элемент группоида G является его правой единицей или обобщённым правым нулём.*

Доказательство. Достаточность условий 1), 2) очевидна. Докажем необходимость. Группоид G можно рассматривать как универсальную алгебру с унарными операциями $f_a(x) = xa$ $(a \in G)$. Очевидно, правые конгруэнции группоида $(G, \cdot)$ — это в точности конгруэнции алгебры $(G, \{f_a \mid a \in G\})$. По теореме 3.3 каждое отображение f_a — это либо константа, либо тождественное отображение. Если f_a — константа, то a — обобщённый правый нуль, а если f_a — тождественное отображение, то a — правая единица. □

Учитывая теорему 4.1, можно легко понять, как выглядит таблица Кэли конечного группоида, все отношения эквивалентности которого являются правыми конгруэнциями.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится одна лемма.

Лемма 4.2. *Группоид, удовлетворяющий тождеству $xz = yz$ и имеющий левую единицу, является полугруппой правых нулей.*

Доказательство очевидно.

Теорема 4.3. *Все отношения эквивалентности группоида G являются его двусторонними конгруэнциями в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) $|G| \leqslant 2$;
2) G — *полугруппа с нулевым умножением*;
3) G — *полугруппа левых нулей*;
4) G — *полугруппа правых нулей.*

Доказательство. Достаточность каждого из условий 1)—4) очевидна. Докажем необходимость. Пусть G — группоид, у которого любое отношение эквивалентности является конгруэнцией, и пусть $|G| > 2$. Тогда по теореме 4.1 и двойственной к ней мы получаем, что каждый элемент группоида G является правой единицей или обобщённым правым нулём и одновременно левой единицей или обобщённым левым нулём. Разберём два случая.

Случай 1: все элементы группоида G — обобщённые правые нули. Тогда возможны следующие два случая.

Случай 1.1: $xy = uv$ для любых $x, y, u, v \in G$. Тогда G — полугруппа с нулевым умножением, т. е. выполнено условие 2).

Случай 1.2: $xy \neq uv$ для некоторых $x, y, u, v \in G$. Так как $uy = xy \neq uv$, то u не является обобщённым левым нулём. Тогда по теореме 4.1 u — левая единица. Так как все элементы — обобщённые правые нули, то по лемме 4.2 G — полугруппа правых нулей, т. е. выполнено 4).

Случай 2: не все элементы группоида G являются обобщёнными правыми нулями. Тогда по теореме 4.1 в G есть правая единица. Если все элементы из G — обобщённые левые нули, то, рассуждая так же, как в случае 1, мы получим, что G — полугруппа с нулевым умножением или полугруппа левых нулей, а значит, выполнено 2) или 3). Поэтому далее мы будем считать, что в G есть левая единица. Итак, в G есть правая и левая единицы. Хорошо известно, что в этом случае G имеет двустороннюю единицу, скажем e, и никаких других левых или правых единиц, кроме e, в группоиде G нет. Следовательно, все элементы из $G \setminus \{e\}$ являются обобщёнными левыми нулями и одновременно обобщёнными правыми нулями. Так как $|G| \geqslant 3$, то существуют такие элементы $a \neq b$, что $a, b \neq e$. Так как a — обобщённый левый нуль, то $ab = ae = a$, а так как b — обобщённый правый нуль, то $ab = eb = b$. Отсюда следует, что $a = b$, что противоречит выбору элементов a, b. $\square$

Следующая лемма понадобится в этом разделе для группоидов и в следующем — для полугрупп.

Лемма 4.4. *Пусть G — группоид, в котором для любых элементов $a \neq b$ отношение $\rho_{a,b}$ является правой или левой конгруэнцией. Тогда*

1) *для любого $a \in G$ либо $a \cdot a^2 \in \{a, a^2\}$, либо $a^2 \cdot a \in \{a, a^2\}$;*
2) *для любых $a, b \in G$ выполнено $ab \in \{a, b, a^2, b^2\}$;*
3) *если $e, a \in G$ и $e^2 = e$, то $ae \in \{e, a\}$ или $ea \in \{e, a\}$;*
4) *если e, f — идемпотенты группоида G, то $ef \in \{e, f\}$.*

Доказательство. Если $a^2 = a$, то утверждение 1) леммы очевидно. Пусть $a^2 \neq a$. Если ρ_{a,a^2} — левая конгруэнция, то ввиду равенства $a \cdot \{a, a^2\} = \{a^2, a \cdot a^2\}$ мы получаем, что $a \cdot a^2 \in \{a, a^2\}$. Если ρ_{a,a^2} — правая конгруэнция, то аналогичными рассуждениями доказывается, что $a^2 \cdot a \in \{a, a^2\}$.

При $a = b$ утверждение 2) очевидно. Пусть $a \neq b$. Если $\rho_{a,b}$ — левая конгруэнция, то из равенства $a \cdot \{a, b\} = \{a^2, ab\}$ следует, что $ab \in \{a, b, a^2\}$, а если $\rho_{a,b}$ — правая конгруэнция, то равенство $\{a, b\} \cdot b = \{ab, b^2\}$ покажет, что $ab \in \{a, b, b^2\}$.

Докажем утверждение 3). Пусть $ea \notin \{e, a\}$. Имеем $e \cdot \{e, a\} = \{e, ea\}$. Следовательно, отображение $\rho_{e,a}$ не является левой конгруэнцией. Значит, оно является правой конгруэнцией. Так как $\{e, a\} \cdot e = \{e, ae\}$, то $ae \in \{e, a\}$.

Докажем утверждение 4). Если $\rho_{e,f}$ — левая конгруэнция, то из равенства $e \cdot \{e, f\} = \{e, ef\}$ получаем, что $ef \in \{e, f\}$. Если $\rho_{e,f}$ — правая конгруэнция, то из равенства $\{e, f\} \cdot f = \{ef, f\}$ также получаем, что $ef \in \{e, f\}$. □

Перейдём теперь к рассмотрению $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-группоидов. Отношения эквивалентности на группоиде G, с которыми мы будем иметь дело в этом разделе, следующие:

$$\rho_{a,b} = \{(a, b), (b, a)\} \cup \Delta, \quad \sigma_a = \{(a, a)\} \cup \big((G \setminus \{a\}) \times (G \setminus \{a\})\big), \quad \rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}. \tag{4.1}$$

При рассмотрении отношения $\rho_{a,b}$ мы будем всегда считать выполненным условие $a \neq b$, не оговаривая это специально, а при рассмотрении отношения $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$ всегда считаем, что a, b, c, d — различные элементы группоида G.

Ввиду теоремы 4.3 и двойственного к ней утверждения для получения полной картины строения $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-группоидов достаточно выяснить, как устроены $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-группоиды, не являющиеся ни R-, ни L-группоидами. Вычисления, проделанные с помощью несложной компьютерной программы, показали, что с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма существует ровно 19 трёхэлементных $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-группоидов G, которые не являются R- или L-группоидами. Приведём их таблицы Кэли (считаем, что $G = \{1, 2, 3\}$).

1	1	2	3
1	3	3	1
2	1	1	1
3	1	1	1

2	1	2	3
1	1	1	3
2	1	1	1
3	1	1	1

3	1	2	3
1	2	1	3
2	2	1	1
3	2	1	1

4	1	2	3
1	1	2	3
2	1	2	1
3	1	2	1

5	1	2	3
1	2	2	3
2	2	2	1
3	2	2	1

6	1	2	3
1	2	2	1
2	3	3	1
3	2	2	1

7	1	2	3
1	2	2	3
2	3	3	1
3	2	2	1

8	1	2	3
1	3	3	1
2	2	2	1
3	3	3	1

9	1	2	3
1	1	1	3
2	2	2	1
3	3	3	1

10	1	2	3
1	3	3	3
2	2	2	1
3	3	3	1

11	1	2	3
1	1	1	1
2	3	3	1
3	3	3	1

12	1	2	3
1	1	1	3
2	3	3	1
3	3	3	1

13	1	2	3
1	3	3	1
2	1	1	2
3	1	1	3

14	1	2	3
1	1	1	3
2	1	1	2
3	1	1	3

15	1	2	3
1	3	3	3
2	1	1	2
3	1	1	3

16	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	3
3	1	1	3

17	1	2	3
1	2	1	3
2	2	1	2
3	2	1	3

18	1	2	3
1	1	2	1
2	1	2	3
3	1	2	3

19	1	2	3
1	1	1	3
2	3	3	2
3	3	3	3

Простая проверка показывает, что ни один из этих группоидов не является полугруппой.

Введём следующее условие на группоид:

каждое отношение эквивалентности вида (4.1) является правой или левой конгруэнцией. $(*)$

Очевидно, 3-элементный группоид удовлетворяет условию $(*)$ в том и только том случае, если он является $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-группоидом. Для группоидов из четырёх или большего числа элементов равносильность условия $(*)$ и условия «быть $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-группоидом» не очевидна и будет установлена лишь после серии лемм.

Группоид G назовём *α-группоидом*, если G — группоид, удовлетворяющий условию $(*)$, и $|G| \geqslant 4$.

Элемент i группоида G назовём *горизонталью*, если i не является идемпотентом и $i \cdot (G \setminus \{i^2\}) = \{i^2\}$. Элемент j — *вертикаль*, если $j^2 \neq j$ и $(G \setminus \{j^2\}) \cdot j = \{j^2\}$. Ясно, что обобщённый левый нуль, не являющийся идемпотентом, является горизонталью, а идемпотентный обобщённый левый нуль — это обычный левый нуль. Аналогично неидемпотентный обобщённый правый нуль — это вертикаль, а идемпотентный — это правый нуль в обычном смысле. Для того чтобы горизонталь i являлась обобщённым левым нулём, необходимо и достаточно выполнение равенства $i \cdot i^2 = i^2$. Вертикаль j является обобщённым правым нулём тогда и только тогда, когда $j^2 \cdot j = j^2$.

Лемма 4.5. *Для любых элементов i, j α-группоида G если $ij \notin \{i, j\}$, то либо для всех $x \in G \setminus \{ij\}$ справедливо $ix = ij$, либо для всех $x \in G \setminus \{ij\}$ справедливо $xj = ij$.*

Доказательство. Ввиду условия $(*)$ σ_{ij} — правая или левая конгруэнция. Если σ_{ij} — правая конгруэнция, то, так как $(x, i) \in \sigma_{ij}$ при всех $x \neq ij$, имеем $(xj, ij) \in \sigma_{ij}$, а значит, $xj = ij$. Если σ_{ij} — левая конгруэнция, то с помощью аналогичных рассуждений получаем $ix = ij$ при всех $x \neq ij$. □

Взяв в этой лемме $i = j$, получим следствие.

Следствие. *Всякий элемент α-группоида G является либо идемпотентом, либо горизонталью, либо вертикалью (второе и третье не исключают друг друга).*

Лемма 4.6. *Если i — горизонталь, j — вертикаль α-группоида G и $i \neq j$, то $i^2 = j$, или $j^2 = i$, или $i^2 = j^2$.*

Доказательство. Пусть $i^2 \neq j$ и $j^2 \neq i$. Так как i — горизонталь, то $ij = i^2$. Так как j — вертикаль, то $ij = j^2$. Следовательно, $i^2 = j^2$. $\square$

Лемма 4.7. *Если i — горизонталь, j — вертикаль α-группоида G и $i^2 \neq j^2$, то i — обобщённый левый нуль или j — обобщённый правый нуль.*

Доказательство. По лемме 4.6 $i^2 = j$ или $j^2 = i$. Предположим вначале, что $i^2 = j$ и $j^2 = i$. По утверждению 2) леммы 4.4 $ij \in \{i, j\}$. При $ij = j$ имеем $i \cdot i^2 = i^2$, откуда следует, что i — обобщённый левый нуль. При $ij = i$ аналогичные рассуждения покажут, что j — обобщённый правый нуль.

Пусть теперь $i^2 \neq j$, $j^2 = i$. Так как $|G| \geqslant 4$, то существует элемент $x \in G \setminus \{i, i^2, j\}$. Рассмотрим отношения $\rho_{i,j} \vee \rho_{i^2,x}$ и $\rho_{i,x} \vee \rho_{i^2,j}$. Так как $i \cdot j = i^2 \in \{i^2, x\}$, $j \cdot j = j^2 = i \notin \{i^2, x\}$, то $\rho_{i,j} \vee \rho_{i^2,x}$ не является правой конгруэнцией. Так как $i \cdot j = i^2 \in \{i^2, j\}$, $x \cdot j = j^2 = i \notin \{i^2, j\}$, то $\rho_{i,x} \vee \rho_{i^2,j}$ не является правой конгруэнцией. Следовательно, оба эти отношения являются левыми конгруэнциями. Так как $(i^2, x) \in \rho_{i,j} \vee \rho_{i^2,x}$, то $(i \cdot i^2, i \cdot x) \in \rho_{i,j} \vee \rho_{i^2,x}$. Но $ix = i^2$, поэтому

$$i \cdot i^2 \in \{i^2, x\}. \tag{4.2}$$

Предположим, что $i \cdot i^2 = x$. Так как $(i^2, j) \in \rho_{i,x} \vee \rho_{i^2,j}$, то $(i \cdot i^2, i \cdot j) \in \rho_{i,x} \vee \rho_{i^2,j}$. Но $ij = i^2$, следовательно, $i \cdot i^2 \in \{i^2, j\}$. Это противоречит тому, что $i \cdot i^2 = x$. Следовательно, ввиду (4.2) $i \cdot i^2 = i^2$. Но i — горизонталь. Следовательно, i — обобщённый левый нуль.

В случае, если $i^2 = j$, $j^2 \neq i$, рассуждая аналогично, получим, что j — обобщённый правый нуль. $\square$

Лемма 4.8. *Пусть i — горизонталь, j — вертикаль α-группоида G. Если $i^2 = j$ и $j^2 = i$, то G — R- или L-группоид.*

Доказательство. Так как i и j не являются идемпотентами, то $i \neq j$. По утверждению 2) леммы 4.4 $ij \in \{i, j\}$. Предположим вначале, что $ij = j$. Докажем, что в этом случае $k^2 = i$ для любого $k \in G \setminus \{i, j\}$. Для этого достаточно привести к противоречию два предположения: $k^2 \notin \{i, j, k\}$ и $k^2 \in \{j, k\}$.

Пусть $k^2 \notin \{i, j, k\}$. Так как i — горизонталь, то $ik = i^2 = j \neq k^2$. Следовательно, $\{i, k\} \cdot k = \{j, k^2\}$, поэтому отношение σ_{k^2} не является правой конгруэнцией. Так как j — вертикаль, то $kj = j^2 = i \neq k^2$. Следовательно, $k \cdot \{j, k\} = \{i, k^2\}$, а это означает, что отношение σ_{k^2} не является левой конгруэнцией. Мы получили противоречие с условием $(*)$.

Пусть $k^2 \in \{j, k\}$. Так как $|G| \geqslant 4$, то существует элемент $x \in G \setminus \{i, j, k\}$. Так как j — вертикаль, то $xj = kj = j^2 = i$, поэтому $\{i, x\} \cdot j = \{j, i\}$, а значит, отношение $\rho_{i,x} \vee \rho_{j,k}$ не является правой конгруэнцией. Так как $k \cdot \{j,k\} = \{j^2, k^2\} = \{i, k^2\}$, то $\rho_{i,x} \vee \rho_{j,k}$ не является также левой конгруэнцией. Мы получили противоречие с условием $(*)$.

Таким образом, нами доказано, что для всех $k \in G \setminus \{i,j\}$

$$k^2 = i. \tag{4.3}$$

Если отношение σ_i является правой конгруэнцией, то для любых $x, y \neq i$ мы имеем $(xy, y^2) \in \sigma_i$, что ввиду (4.3) даёт равенство $xy = i$. Если σ_i — левая конгруэнция, то $(xy, x^2) \in \sigma_i$, и мы получаем, что $xy = i$. Таким образом, для всех $x, y \in G \setminus \{i\}$

$$xy = i. \tag{4.4}$$

Так как i — горизонталь и $i \cdot i^2 = ij = j = i^2$, то i — обобщённый левый нуль.

Рассмотрим любой элемент $x \in G \setminus \{i,j\}$. Так как $|G| \geqslant 4$, то существует элемент $y \in G \setminus \{i,j,x\}$. Так как $\{i,y\} \cdot j = \{i,x\} \cdot j = \{j,i\}$, то отношения $\rho_{i,y} \vee \rho_{j,x}$ и $\rho_{i,x} \vee \rho_{j,y}$ не являются правыми конгруэнциями. Ввиду условия $(*)$ эти отношения — левые конгруэнции. Пусть $k \in G \setminus \{i\}$. Ввиду (4.4) $k \cdot \{i,y\} = \{ki, i\}$. Так как $\rho_{i,y} \vee \rho_{j,x}$ — левая конгруэнция, то $ki \in \{i,y\}$. Аналогично $k \cdot \{i,x\} = \{ki, i\}$, а так как $\rho_{i,x} \vee \rho_{j,y}$ — левая конгруэнция, то $ki \in \{i,x\}$. Следовательно, $ki = i$. Учитывая равенство $k \cdot (G \setminus \{i\}) = \{i\}$ (вытекающее из (4.4)), мы получаем, что k — обобщённый левый нуль. Таким образом, все элементы группоида G являются обобщёнными левыми нулями. Тогда по теореме 4.1 G — L-группоид.

Если в начале доказательства леммы мы предположим, что $ij = i$, то, рассуждая аналогично, получим, что G — R-группоид. □

Лемма 4.9. *Если α-группоид G имеет элемент, одновременно являющийся горизонталью и вертикалью, то G — R- или L-группоид.*

Доказательство. Пусть i — горизонталь и вертикаль группоида G. По условию $(*)$ отношение σ_{i^2} является правой или левой конгруэнцией. Если σ_{i^2} — правая конгруэнция, то ввиду того, что i — горизонталь, мы получаем, что $xy = iy = i^2$ при всех $x, y \neq i^2$. Если σ_{i^2} — левая конгруэнция, то ввиду того, что i — вертикаль, мы получаем, что $xy = xi = i^2$ при $x, y \neq i^2$. Таким образом, для всех $x, y \in G \setminus \{i^2\}$

$$xy = i^2. \tag{4.5}$$

Предположим, что $(i^2)^2 \neq i^2$. Тогда по следствию из леммы 4.5 i^2 — горизонталь или вертикаль. Пусть i^2 — горизонталь. Если $(i^2)^2 = i$, то по лемме 4.8 G — R- или L-группоид. Далее считаем, что $(i^2)^2 \neq i$. По лемме 4.7 i^2 — обобщённый левый нуль или i — обобщённый правый нуль. Если i — обобщённый правый нуль, то $i^2 \cdot i = i \cdot i = i^2$. Так как i^2 — горизонталь, то $i^2 \cdot (G \setminus \{(i^2)^2\}) = \{(i^2)^2\}$, следовательно, $(i^2)^2 = i^2$. Пришли к противоречию. Если i^2 — обобщённый левый нуль, то $i^2 \cdot x = (i^2)^2$ при всех $x \in G$. Так как i — вертикаль, то для $x \neq i^2$ мы имеем $\{i^2, x\} \cdot i = \{(i^2)^2, i^2\}$. Следовательно, $\rho_{i^2,x}$ не является правой конгруэнцией. Ввиду условия $(*)$ $\rho_{i^2,x}$ — левая конгруэнция.

Пусть x, y — различные элементы из $G \setminus \{i^2\}$, а z — произвольный элемент из $G \setminus \{i^2\}$. Ввиду (4.5) $z \cdot \{i^2, x\} = \{zi^2, i^2\}$, поэтому $zi^2 \in \{i^2, x\}$. Аналогично показывается, что $zi^2 \in \{i^2, y\}$. Следовательно, $zi^2 = i^2$. Отсюда и из (4.5) следует, что любой элемент из $G \setminus \{i^2\}$ — обобщённый левый нуль. Кроме того, i^2 тоже обобщённый левый нуль. Таким образом, все элементы из G — обобщённые левые нули, значит, по теореме 4.1 G — L-группоид.

Осталось рассмотреть случай, когда $(i^2)^2 = i^2$. По утверждению 2) леммы 4.4 $xi^2, i^2x \in \{x, i^2, x^2\}$, а ввиду равенства (4.5) $x^2 = i^2$, поэтому $xi^2, i^2x \in \{x, i^2\}$. Докажем, что если $xi^2 = i^2$ для всех $x \in G$, то G — L-группоид.

Предположим вначале, что $xi^2 = i^2x = i^2$ при всех $x \in G$. В этом случае согласно (4.5) и равенству $(i^2)^2 = i^2$ мы получаем, что G — полугруппа с нулевым умножением, а значит, R- и L-группоид. Если $xi^2 = i^2$, $i^2x = x$ для всех $x \in G$, то i^2 — левая единица, а остальные элементы группоида G — обобщённые левые нули (ввиду (4.5)), поэтому по теореме 4.1 G — L-группоид.

Пусть теперь $xi^2 = i^2$ для всех x и $i^2y = i^2$, $i^2z = z$ для некоторых $y, z \in G \setminus \{i^2\}$. Возьмём любой элемент $t \in G \setminus \{i^2, y, z\}$. Так как $\{i^2, t\} \cdot z = \{z, i^2\}$ и $i^2 \cdot \{y, z\} = \{i^2, z\}$, то отношение $\rho_{i^2,t} \vee \rho_{y,z}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией — противоречие с условием $(*)$.

Рассуждения, аналогичные приведённым выше, позволяют утверждать, что в случае, когда $i^2x = i^2$ при всех $x \in G$, группоид G является R-группоидом.

Таким образом, далее мы можем считать, что $xi^2 = x$, $i^2y = y$ при некоторых $x, y \in G \setminus \{i^2\}$ (элементы x, y могут совпадать). Возьмём элемент $z \in G \setminus \{i^2, x, y\}$. Согласно равенству (4.5) $x \cdot \{i^2, z\} = \{x, i^2\}$ и $\{i^2, z\} \cdot y = \{y, i^2\}$, следовательно, $\rho_{i^2,z}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией. Мы получили противоречие с условием $(*)$, тем самым доказательство леммы завершено. □

Лемма 4.10. *Пусть i — горизонталь, j — вертикаль α-группоида G и $i \neq j$. Тогда $i^2 = j^2$, или G — R-группоид, или G — L-группоид.*

Доказательство. Пусть G не является ни R-, ни L-группоидом и $i^2 \neq j^2$. Тогда по лемме 4.8 $i^2 \neq j$ или $j^2 \neq i$. Если одновременно $i^2 \neq j$ и $j^2 \neq i$, то $ij = i^2$, ввиду того что i — горизонталь, и $ij = j^2$, ввиду того что j — вертикаль. Тогда $i^2 = j^2$, что противоречит предположению.

Таким образом, мы можем без ограничения общности считать, что $i = j^2$, $j \neq i^2$. Так как i — горизонталь и $j \neq i^2$, то $ij = i^2$. По лемме 4.7 i — обобщённый левый нуль или j — обобщённый правый нуль. Но j не может быть обобщённым правым нулём, так как $j^2 \cdot j = ij = i^2 \neq j^2 = j \cdot j$. Следовательно, i — обобщённый левый нуль, а значит,

$$i \cdot i^2 = i^2. \tag{4.6}$$

Так как $|G| \geqslant 4$, то существует элемент $x \in G \setminus \{i, i^2, j\}$. Равенство $\{i, x\} \cdot j = \{i^2, j^2\} = \{i^2, i\}$ показывает, что отношение $\rho_{i,x} \vee \rho_{i^2,j}$ не является правой конгруэнцией. Ввиду условия $(*)$ $\rho_{i,x} \vee \rho_{i^2,j}$ — левая конгруэнция. Возьмём элемент $k \neq i$. Так как j — вертикаль, то $kj = j^2$, поэтому $k \cdot \{j, i^2\} = \{j^2, ki^2\} = \{i, ki^2\}$, а значит (ввиду того что $\rho_{i,x} \vee \rho_{i^2,j}$ — левая конгруэнция),

$$ki^2 \in \{i, x\}. \tag{4.7}$$

Это означает, в частности, что

$$i^2 i^2 \in \{i, x\}. \tag{4.8}$$

Если $i^2 i^2 = x$, то i^2 не является идемпотентом. Кроме того, из соотношения $j^2 j = j^2 = i \neq i^2 i^2$ мы выводим, что i^2 не горизонталь. Тогда по следствию из леммы 4.5 i^2 — вертикаль. Но ввиду (4.6) $ii^2 = i^2 \neq i^2 i^2$, значит, i^2 не вертикаль. Полученное противоречие показывает, что равенство $i^2 i^2 = x$ невозможно. Поэтому согласно (4.8)

$$i^2 i^2 = i. \tag{4.9}$$

Если $ti^2 = x$ при некотором t, то из (4.6) и (4.9) получаем, что $t \neq i$ и $t \neq i^2$. Так как $ti^2 = x \neq i$ и $i^2 i^2 = i$, то отношение σ_i не является правой конгруэнцией. Так как $ti^2 = x \neq i$ и $tj = j^2 = i$, то σ_i не является также левой конгруэнцией. Это противоречит условию $(*)$. Таким образом, из (4.7) мы получаем, что $ti^2 = i$ при всех $t \neq i$. Учитывая равенство $(i^2)^2 = i$, мы получаем, что i^2 — вертикаль. Наконец, так как для горизонтали i и вертикали i^2 имеют место равенства $(i)^2 = i^2$ и $(i^2)^2 = i$, лемма 4.8 даёт, что G — R- или L-группоид. □

Лемма 4.11. *Пусть i — горизонталь, j — вертикаль α-группоида G и $i \neq j$. Тогда или i — вертикаль, или j — горизонталь, или G — R-группоид, или G — L-группоид.*

Доказательство. Предположим, что G не является ни R-, ни L-группоидом. Тогда по лемме 4.10 $i^2 = j^2$. Следовательно, по утверждению 2) леммы 4.4 $ji \in \{i, j, i^2\}$. Если $ji = i$ или $ji = j$, то рассмотрим отношение $\rho_{i,j}$. Так как $i \cdot i = i^2 \notin \{i, j\}$, но $j \cdot i \in \{i, j\}$, то $\rho_{i,j}$ не является правой конгруэнцией. Так как $j \cdot j = j^2 \notin \{i, j\}$, но $j \cdot i \in \{i, j\}$, то $\rho_{i,j}$ не является также левой конгруэнцией. Это противоречит условию $(*)$. Следовательно, $ji = i^2 = j^2$. Отсюда по лемме 4.5 получаем, что либо i — вертикаль, либо j — горизонталь. □

Лемма 4.12. *Если α-группоид G содержит горизонталь и вертикаль* (*совпадающие или различные*), *то G — R- или L-группоид.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из лемм 4.9 и 4.11. □

Лемма 4.13. *Если i — элемент α-группоида G, не являющийся идемпотентом, то или i — обобщённый левый или правый нуль, или G — R- или L-группоид.*

Доказательство. Пусть G не является ни R-, ни L-группоидом. Так как i не идемпотент, то по следствию из леммы 4.5 i — горизонталь или вертикаль. Можно считать, что i — горизонталь (случай, когда i — вертикаль, рассматривается аналогично). Если $ii^2 = i^2$, то i — обобщённый левый нуль. Поэтому далее считаем, что $ii^2 \neq i^2$.

Докажем, что $ii^2 = i$. Предположим, что $ii^2 \neq i$. Тогда $ii^2 \notin \{i, i^2\}$. Положим $a = ii^2$. Так как $i \cdot \{i, i^2\} = \{i^2, a\}$, то отношение ρ_{i,i^2} не является левой конгруэнцией. Следовательно, по условию $(*)$ ρ_{i,i^2} — правая конгруэнция. Имеем $\{i, i^2\} \cdot i^2 = \{a, (i^2)^2\}$, поэтому $(i^2)^2 = a$. Следовательно, i^2 не идемпотент. По следствию из леммы 4.5 i^2 — горизонталь или вертикаль. Так как в группоиде G есть горизонталь (элемент i) и G не является ни R-, ни L-группоидом, то ввиду леммы 4.12 i^2 не может быть вертикалью, поэтому i^2 — горизонталь. Отсюда получаем, что $i^2x = a$ при всех $x \neq a$. В частности, $i^2 i = a$. Так как $\{i, i^2\} \cdot i = \{i^2, a\}$, то ρ_{i,i^2} не является правой конгруэнцией. Пришли к противоречию с ранее доказанным. Таким образом, нами доказано равенство

$$ii^2 = i. \tag{4.10}$$

Возьмём элемент $x \in G \setminus \{i, i^2\}$. Так как i — горизонталь, то $ix = i^2$. Следовательно, $i \cdot \{x, i^2\} = \{i^2, i\}$, а значит, отношение σ_i не является левой конгруэнцией. Согласно $(*)$ σ_i — правая конгруэнция.

Возьмём два произвольных элемента $x, y \in G \setminus \{i, i^2\}$, таких что $x \neq y$. Так как $i \cdot \{i^2, y\} = \{i, i^2\}$, то отношение $\rho_{i,x} \vee \rho_{i^2,y}$ не является левой конгруэнцией. По $(*)$ $\rho_{i,x} \vee \rho_{i^2,y}$ — правая конгруэнция. Отсюда по (4.10) получаем, что для всех $x \in G \setminus \{i, i^2\}$

$$xi^2 \in \{i, x\}. \tag{4.11}$$

Если для некоторого $x \neq i, i^2$ имеет место равенство $xi^2 = i$, то, так как σ_i — правая конгруэнция, мы получаем, что $ki^2 = i$ при всех $k \in G \setminus \{i\}$. При $k = i^2$ имеем $i^2 i^2 = i$. Учитывая (4.10), получаем, что i^2 — вертикаль. Так как G имеет горизонталь i и вертикаль i^2, то по лемме 4.12 G — R- или L-группоид. Таким образом, в (4.11) равенство $xi^2 = i$ невозможно, поэтому для всех $x \in G \setminus \{i, i^2\}$

$$xi^2 = x. \tag{4.12}$$

Так как $|G| \geqslant 4$, то существует элемент $u \notin \{i, i^2, (i^2)^2\}$. Из того, что i — горизонталь, и равенств (4.10), (4.12) получаем, что $i \cdot \{i^2, u\} = \{i, i^2\}$, $\{i^2, u\} \cdot i^2 = \{(i^2)^2, u\}$. Эти равенства показывают, что отношение $\rho_{i^2,u}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией, что противоречит условию $(*)$. $\square$

Замечание. Из леммы 4.13 (с учётом теоремы 4.1 и двойственного к ней утверждения) следует, что α-группоид G, не содержащий идемпотентов, является R- или L-группоидом.

Лемма 4.14. *Пусть e — идемпотент, a — обобщённый левый нуль α-группоида G и $a^2 \notin \{e, a\}$. Если G не является ни R-, ни L-группоидом, то e — левая единица или левый нуль.*

Доказательство. Докажем вначале, что для всех $x \neq a$

$$ex \in \{e, x\}. \tag{4.13}$$

Предположим, что это не так. Тогда по утверждению 2) леммы 4.4 $ex = x^2$ при некотором $x \neq a$, причём $x^2 \notin \{e, x\}$. Так как $x^2 \neq x$, то по лемме 4.13

x — обобщённый правый или обобщённый левый нуль. Так как $ex \notin \{e, x\}$, то по утверждению 3) леммы 4.4 $xe \in \{e, x\}$. Поэтому $x^2 \neq xe$, а значит, x не является обобщённым левым нулём. Следовательно, x — обобщённый правый нуль. Теперь ясно, что a — горизонталь, x — вертикаль. Отсюда по лемме 4.12 получаем, что G — R- или L-группоид, а это противоречит условию леммы.

Соотношение (4.13) может быть усилено. Действительно, так как $ae = a^2 \notin \{e, a\}$, то по утверждению 3) леммы 4.4 $ea \in \{e, a\}$. Следовательно, для всех x мы имеем

$$ex \in \{e, x\}. \tag{4.14}$$

Докажем теперь, что либо для всех $x \neq a$ справедливо $ex = e$, либо для всех $x \neq a$ справедливо $ex = x$. Пусть ни то, ни другое неверно. Тогда $ex = e$, $ey = y$ для некоторых $x, y \notin \{e, a\}$. Очевидно, $x \neq y$. Так как a — обобщённый левый нуль, то $ae = a^2$. Тогда $\{e, a\} \cdot e = \{e, a^2\}$, $e \cdot \{x, y\} = \{e, y\}$, откуда следует, что отношение $\rho_{e,a} \vee \rho_{x,y}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией группоида G, что противоречит условию $(*)$.

Далее мы докажем, что если для всех $x \neq a$ справедливо $ex = e$, то e — левый нуль, а если для всех $x \neq a$ выполнено $ex = x$, то e — левая единица.

Пусть для всех $x \neq a$ выполнено $ex = e$. Для доказательства того, что e — левый нуль, достаточно показать, что $ea = e$. Пусть $ea \neq e$. Тогда ввиду (4.14) $ea = a$. Так как $|G| \geqslant 4$, то существует элемент $b \in G \setminus \{e, a, a^2\}$. Так как $e \cdot \{a, b\} = \{a, e\}$, то отношение $\rho_{a,b}$ не является левой конгруэнцией. Ввиду условия $(*)$ $\rho_{a,b}$ — правая конгруэнция. Имеем $\{a, b\} \cdot b = \{ab, b^2\}$. Так как $ab = a^2 \notin \{a, b\}$, то $b^2 = ab$. Равенства $\{e, b\} \cdot b = \{e, b^2\} = \{e, ab\} = \{e, a^2\}$ и $e \cdot \{a, a^2\} = \{a, e\}$ показывают, что отношение $\rho_{e,b} \vee \rho_{a,a^2}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией группоида G, а это противоречит условию $(*)$. Таким образом, e — левый нуль.

Пусть для всех $x \neq a$ выполнено $ex = x$. Для доказательства того, что e — левая единица, достаточно показать, что $ea = a$. Пусть $ea \neq a$. Тогда ввиду (4.14) $ea = e$. Так как $|G| \geqslant 4$, то существует элемент $b \in G \setminus \{e, a, a^2\}$. Так как $e \cdot \{a, b\} = \{e, b\}$, то отношение $\rho_{a,b}$ не является левой конгруэнцией. Ввиду условия $(*)$ $\rho_{a,b}$ — правая конгруэнция. Имеем $\{a, b\} \cdot b = \{a^2, b^2\}$. Так как $a^2 \notin \{a, b\}$, то $b^2 = a^2$. Наконец, равенства $\{e, b\} \cdot b = \{b, a^2\}$ и $e \cdot \{a, a^2\} = \{e, a^2\}$ показывают, что отношение $\rho_{e,b} \vee \rho_{a,a^2}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией группоида G, что противоречит условию $(*)$. Таким образом, e — левая единица. □

Лемма 4.15. *Если G — α-группоид с единственным идемпотентом, то G является R- или L-группоидом.*

Доказательство. Предположим, что G — α-группоид с единственным идемпотентом e, не являющийся ни R-, ни L-группоидом, и приведём это предположение к противоречию. Докажем, что $a^2 = e$ для всех $a \in G$. Пусть это не так. Тогда $a^2 \neq e$ при некотором a. Очевидно, $a \neq e$. Так как e — единственный идемпотент, то $a^2 \neq a$. Отсюда по лемме 4.13 получаем, что a — обобщённый левый или обобщённый правый нуль. Без ограничения общности можно считать, что a — обобщённый левый нуль. Ввиду леммы 4.12 группоид G не имеет неидемпотентных обобщённых правых нулей. Таким образом, все элементы из $G \setminus \{e\}$ — обобщённые левые нули. Кроме того, по лемме 4.14 e — левый нуль или левая единица. Отсюда по теореме, двойственной к теореме 4.1, получаем, что G — L-группоид.

Итак, $a^2 = e$ при всех $a \in G$. Можно считать, что все элементы из $G \setminus \{e\}$ — обобщённые левые нули. Если $x \in G \setminus \{e\}$, а y — любой элемент из G, то, так как x — обобщённый левый нуль, имеем $xy = x^2 = e$. Таким образом, $(G \setminus \{e\}) \cdot G = \{e\}$.

Докажем, что e — левый нуль или левая единица. Пусть это не так. Тогда $ea \neq a$ при некотором $a \in G$. Положим $ea = x$. Если $x \neq e$, то равенства $e \cdot \{e, a\} = \{e, x\}$ и $\{e, a\} \cdot a = \{x, e\}$ покажут нам, что отношение $\rho_{e,a}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией, а это противоречит условию $(*)$. Пусть $x = ea = e$. Так как e не является левым нулём, то $eb \neq b$ при некотором $b \in G$. Очевидно, $b \notin \{e, a\}$. Положим $eb = y$. Если $y \neq b$, то равенства $e \cdot \{e, b\} = \{e, y\}$ и $\{e, b\} \cdot b = \{y, e\}$ показывают, что отношение $\rho_{e,b}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией. Если $y = b$, то возьмём элемент $c \in G \setminus \{e, b, c\}$. Имеем $e \cdot \{a, b\} = \{e, b\}$, $\{e, c\} \cdot b = \{b, e\}$, поэтому отношение $\rho_{a,b} \vee \rho_{e,c}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией. Мы опять получили противоречие, а значит, доказано, что e — левый нуль или левая единица. Так как все элементы из $G \setminus \{e\}$ — обобщённые левые нули, а элемент e — левый нуль или левая единица, то по теореме, двойственной к теореме 4.1, получим, что G — L-группоид. □

Лемма 4.16. *Пусть G — α-группоид, E — множество его идемпотентов, причём $|E| \geqslant 2$ и $E \neq G$. Тогда G является R- или L-группоидом.*

Доказательство. Предположим, что выполнены условия леммы, но G не является ни R-, ни L-группоидом. По лемме 4.13 все элементы из $G \setminus E$ — обобщённые правые или левые нули. Ввиду леммы 4.12 множество $G \setminus E$ не может содержать одновременно обобщённый правый и обобщённый левый нуль. Значит, мы можем без ограничения общности считать, что все элементы из $G \setminus E$ — обобщённые левые нули.

Докажем, что существует такой идемпотент e, что $x^2 = e$ для всех $x \in G \setminus E$. Действительно, если есть два элемента $x, y \in G \setminus E$, такие что $x^2 \neq y^2$, то для любого идемпотента e либо $x^2 \neq e$, либо $y^2 \neq e$, а значит, по лемме 4.14 e — левая единица или левый нуль. Тогда по теореме, двойственной теореме 4.1, получаем, что G — L-группоид. Далее мы можем считать, что $x^2 = y^2$ при всех $x, y \in G \setminus E$. Если этот элемент x^2 не принадлежит E, то по лемме 4.14 все элементы из E — левые единицы или нули, и мы можем снова применить теорему, двойственную теореме 4.1. Осталось рассмотреть случай, когда существует такой элемент $e \in E$, что $x^2 = e$ при всех $x, y \in G \setminus E$. По лемме 4.14 все элементы из $E \setminus \{e\}$ — левые единицы или нули. Для завершения доказательства леммы достаточно доказать, что элемент e является левой единицей или левым нулём.

Заметим, что $x^2 \in \{e, x\}$ при всех $x \in G$ (действительно, $x^2 = x$ при $x \in E$ и $x^2 = e$ при $x \in G \setminus E$). По утверждению 2) леммы 4.4 мы получаем, что $ex \in \{e, x\}$ при всех $x \in G$. Если e не является ни левой единицей, ни левым нулём, то найдутся такие элементы $x, y \in G \setminus \{e\}$, что $ex = e$, $ey = y$. Очевидно, $x \neq y$. Возьмём элементы $f \in E \setminus \{e\}$ и $a \in G \setminus E$. Рассмотрим отношение σ_e. Имеем $(x, y) \in \sigma_e$, $(ex, ey) = (e, y) \notin \sigma_e$, $(f, a) \in \sigma_e$, $(ff, af) = (f, a^2) = (f, e) \notin \sigma_e$. Эти соотношения показывают, что σ_e не является ни левой, ни правой конгруэнцией, что противоречит условию $(*)$. □

Леммы 4.15 и 4.16 показывают, что если α-группоид содержит идемпотенты и неидемпотентные элементы, то он является R- или L-группоидом. Ранее мы видели, что α-группоид без идемпотентов также обладает этим свойством. Осталось рассмотреть случай идемпотентного группоида, т. е. группоида, у которого все элементы являются идемпотентами.

Лемма 4.17. *Идемпотентный α-группоид с нулём является R- или L-группоидом.*

Доказательство. Пусть G — идемпотентный α-группоид с нулём 0. Утверждение леммы очевидно для коммутативного группоида, поэтому далее будем считать, что группоид G некоммутативный. Возьмём такие элементы a, b, что $ab \neq ba$. По утверждению 4) леммы 4.4 $xy \in \{x, y\}$ для любых $x, y \in G$. Поэтому мы можем считать без ограничения общности, что $ab = a$, $ba = b$. Ясно, что $a, b \neq 0$. Покажем, что в этом случае каждый ненулевой элемент является правой единицей. Так как $a \cdot \{0, b\} = \{0, a\}$, то отношение $\rho_{0,b}$ не является левой конгруэнцией. Тогда по условию $(*)$ $\rho_{0,b}$ — правая конгруэнция. Возьмём любой элемент $x \neq 0$. По утверждению 4) леммы 4.4 $bx \neq 0$. Так как $\rho_{0,b}$ — правая конгруэнция и $\{0, b\} \cdot x = \{0, bx\}$, то $bx = b$. Аналогично доказывается, что $ax = a$ для всех $x \neq 0$. Предположим, что некоторый элемент $x \neq 0$ не является правой единицей. Тогда $cx \neq c$ для некоторого элемента $c \in G \setminus \{0, a, b\}$. Значит, $cx = x$. Равенства $a \cdot \{0, c\} = \{0, a\}$ и $\{0, c\} \cdot x = \{0, x\}$ показывают, что отношение $\rho_{0,c}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией, что противоречит условию $(*)$. Таким образом, каждый ненулевой элемент — правая единица. Следовательно, все без исключения элементы группоида G — правые единицы или правые нули. Отсюда по теореме 4.1 получаем, что G — R-группоид. □

Лемма 4.18. *Пусть a, b — элементы идемпотентного α-группоида G. Если $ab = ba = a$, то a — левый или правый нуль.*

Доказательство. Если σ_a — правая конгруэнция, то $xa = a$ для всех $x \neq a$. Кроме того, $a^2 = a$. Следовательно, a — правый нуль. Аналогичным образом получаем, что если σ_a — левая конгруэнция, то a — левый нуль. □

Лемма 4.19. *Пусть Z — множество правых нулей α-группоида G и $a \in Z$, $b \in G \setminus Z$. Тогда $ab = a$.*

Доказательство. Пусть $ab \neq a$. Тогда по утверждению 4) леммы 4.4 $ab = b$. Так как b не является правым нулём, то $cb \neq b$ для некоторого c. По утверждению 4) леммы 4.4 $cb = c$. Ясно, что элементы a, b, c различны.

Докажем, что $bc = c$. Действительно, пусть $bc \neq c$. Тогда $bc = b$. Так как $c \cdot \{a, b\} = \{a, c\}$, отношение $\rho_{a,b}$ не является левой конгруэнцией. По условию $(*)$ $\rho_{a,b}$ — правая конгруэнция. Так как $\{a, b\} \cdot c = \{ac, c\}$, то $ac = c$. Так как $\{a, c\} \cdot b = \{b, c\}$ и $b \cdot \{a, c\} = \{a, b\}$, то $\rho_{a,c}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией, что противоречит условию $(*)$.

Таким образом, $bc = c$. Так как $bc = cb = c$, по лемме 4.18 c — правый или левый нуль. Так как $ca \neq c$, то c не является левым нулём. Значит, c — правый нуль. Следовательно, $ac = c$. Таблица Кэли подгруппоида $\{a, b, c\}$ имеет следующий вид:

	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	c	c

.

Возьмём элемент $d \in G \setminus \{a, b, c\}$ и изобразим таблицу Кэли подгруппоида $\{a, b, c, d\}$ (в клетках указаны возможные значения):

	a	b	c	d
a	a	b	c	a, d
b	a	b	c	b, d
c	a	c	c	c, d
d	a	b, d	c	d

.

Если $db = d$, то $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией, что невозможно. Следовательно, $db = d$. Так как $\{a, d\} \cdot b = \{b, d\}$ и $d \cdot \{b, c\} = \{d, c\}$, то $\rho_{a,d} \vee \rho_{b,c}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией, что невозможно. □

Лемма 4.20. *Идемпотентный α-группоид содержит левый или правый нуль.*

Доказательство. Предположим, что α-группоид G не содержит односторонних нулей. Тогда ввиду леммы 4.18 каждое двухэлементное подмножество $\{a, b\}$ группоида G является полугруппой левых или правых нулей. Если все двухэлементные подмножества $\{a, b\}$ являются полугруппами левых нулей (или все они полугруппы правых нулей), то группоид G является полугруппой левых нулей (соответственно полугруппой правых нулей), и утверждение леммы выполнено с очевидностью. Следовательно, мы можем далее считать, что в G есть как двухэлементные подполугруппы левых нулей, так и двухэлементные подполугруппы правых нулей. Рассмотрим полный граф Γ, у которого множеством вершин является группоид G. Каждое ребро $\{a, b\}$ этого графа пометим буквой Λ или Π в зависимости от того, является подмножество $\{a, b\}$ подполугруппой левых или правых нулей. Так как граф Γ связен и в нём есть рёбра, помеченные как буквой Λ, так и буквой Π, то найдутся два смежных ребра, помеченные разными буквами. Таким образом, можно считать, что в группоиде G есть подполугруппа левых нулей $\{a, b\}$ и подполугруппа правых нулей $\{b, c\}$. Приведём таблицу Кэли подгруппоида $\{a, b, c\}$ (заполняем только те клетки, где произведение точно известно):

	a	b	c
a	a	a	
b	b	b	c
c		b	c

.

Из таблицы видно, что отношение $\rho_{a,c}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией, а это противоречит условию $(*)$. $\square$

Теперь мы можем доказать теорему, характеризующую α-группоиды.

Теорема 4.21. *Пусть G — группоид. Если $|G| \geqslant 4$, то все отношения эквивалентности вида* (4.1) *на G являются правыми или левыми конгруэнциями тогда и только тогда, когда G — R- или L-группоид.*

Доказательство. Достаточность в этой теореме очевидна, поэтому остаётся доказать необходимость. Итак, G — α-группоид. Нам надо доказать, что G — R- или L-группоид. Ввиду замечания перед леммой 4.17 мы можем считать, что G — идемпотентный группоид. По лемме 4.20 G содержит односторонний нуль. Без ограничения общности мы можем считать, что в G есть правый нуль. Если в G есть также левый нуль, то есть двусторонний нуль, и по лемме 4.17 G — R- или L-группоид. Далее считаем, что левых нулей нет. Обозначим через Z множество всех правых нулей группоида G. Тогда $Z \neq \varnothing$. Если $Z = G$, то G — полугруппа правых нулей, а значит, G — R- и L-группоид одновременно. Поэтому далее мы будем считать, что $Z \neq G$.

Предположим, что $|Z| = 1$, т. е. $Z = \{a\}$. По лемме 4.19 $ab = a$ для всех $b \in G \setminus Z$. Кроме того, $a^2 = a$. Поэтому $ax = a$ для всех $x \in G$, т. е. a — левый нуль. Это противоречит ранее сделанному замечанию.

Пусть теперь $|Z| \geqslant 2$. По лемме 4.19 $ax = a$ при $a \in Z$, $x \in G \setminus Z$. Если $ab = a$ при всех $a, b \in G \setminus Z$, то мы получаем, что $ax = a$ при $x \in G \setminus Z$ и всех $a \in G$. Это означает, что каждый элемент подгруппоида $G \setminus Z$ является правой единицей группоида G. Так как все элементы из Z — правые нули, то мы получаем, что каждый элемент группоида G является правой единицей или правым нулём. Отсюда по теореме 4.1 следует, что G — R-группоид. Осталось рассмотреть случай, когда $ab \neq a$ при некоторых $a, b \in G \setminus Z$. Так как G — идемпотентный группоид, то $a \neq b$, а по утверждению 4) леммы 4.4 $ab = b$. Возьмём два различных элемента $e, f \in Z$. Тогда $\{e, a\} \cdot b = \{e, b\}$, $f \cdot \{e, a\} = \{e, f\}$. Эти равенства показывают, что отношение $\rho_{e,a}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией, а это противоречит условию $(*)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие. *Группоид, состоящий из четырёх или большего числа элементов, является $(R \vee L)$-группоидом в том и только том случае, если он является R-группоидом или L-группоидом.*

Иными словами, для группоида G, такого что $|G| \geqslant 4$, если все отношения эквивалентности являются левыми или правыми конгруэнциями, то либо все отношения эквивалентности — левые конгруэнции, либо все они правые конгруэнции.

Отметим ещё одно свойство рассматриваемых классов группоидов. А именно, хотя в определении R-группоида участвуют слова «любое отношение эквивалентности», класс R-группоидов является конечно аксиоматизируемым, т. е. может быть задан конечным числом аксиом, являющихся формулами логики первого порядка.

Предложение 4.22. *Классы R-, L-, $(R \vee L)$- и α-группоидов являются конечно аксиоматизируемыми.*

Доказательство (эскиз). Класс R-группоидов совпадает с классом группоидов, у которых каждое отношение эквивалентности вида $\rho_{a,b}$ является правой конгруэнцией, поэтому этот класс может быть задан аксиомой

$$\forall a \; \forall b \; \forall c \; \big((ac = bc) \vee (ac = a \wedge bc = b) \vee (ac = b \wedge bc = a)\big).$$

Аналогично пишется аксиома, задающая класс L-группоидов. Так как класс $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-группоидов является объединением класса R-группоидов, класса L-группоидов и множества из 38 трёхэлементных группоидов, то этот класс конечно аксиоматизируем. □

Интересно выяснить, можно ли сократить список отношений эквивалентности (4.1) так, чтобы класс группоидов, для которых все отношения эквивалентности из этого списка являются односторонними конгруэнциями, при этом не расширялся (конечно, речь идёт о таких группоидах G, что $|G| \geqslant 4$)? Следующий пример показывает, что нельзя удалить из этого списка отношения вида $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$.

Пример 2. Пусть G — множество, a и b — его различные элементы. Будем считать, что $|G| \geqslant 3$. Определим умножение в G по правилу

$$xy = \begin{cases} b, & \text{если } \; x = a \text{ и } y = b, \\ a & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда G — группоид, в котором $\rho_{a,x}$ левая, но не правая конгруэнция при всех $x \notin \{a, b\}$, $\rho_{b,x}$ правая, но не левая конгруэнция при всех $x \notin \{a, b\}$, все остальные конгруэнции вида $\rho_{s,t}$ являются двусторонними, σ_a правая, но не левая конгруэнция, σ_b левая, но не правая конгруэнция, σ_x — двусторонняя конгруэнция при $x \notin \{a, b\}$. При $|G| \geqslant 4$ можно найти отличные от a, b различные элементы x, y. Тогда $\rho_{a,x} \vee \rho_{b,y}$ будет отношением эквивалентности, не являющимся ни правой, ни левой конгруэнцией. Следовательно, G не является $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-группоидом.

Если $|G| \geqslant 5$, список (4.1) может быть сокращён. Мы покажем, что в нём можно оставить лишь отношения вида $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$. Вначале избавимся от отношений вида $\rho_{a,b}$.

Лемма 4.23. *Пусть G — такой группоид, что $|G| \geqslant 5$. Если любое отношение эквивалентности вида $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$ (где a, b, c, d — различные элементы из G) является правой или левой конгруэнцией, то $\rho_{a,b} \in \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$ при любых $a \neq b$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in G$ и $a \neq b$. Так как $|G| \geqslant 5$, то найдутся такие элементы $c, d, e \in G$, что элементы a, b, c, d, e различны. По условию

$$\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d},\ \rho_{a,b} \vee \rho_{c,e},\ \rho_{a,b} \vee \rho_{d,e} \in \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G.$$

Ясно, что какому-нибудь из множеств $\mathrm{RCon}\, G$, $\mathrm{LCon}\, G$ принадлежат не менее двух из отношений $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$, $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,e}$, $\rho_{a,b} \vee \rho_{d,e}$. Без ограничения общности можно считать, что $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$, $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,e} \in \mathrm{RCon}\, G$. Так как

$$\rho_{a,b} = (\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}) \cap (\rho_{a,b} \vee \rho_{c,e}),$$

то $\rho_{a,b} \in \mathrm{RCon}\, G$. □

Замечание. Рассуждая так же, как в предыдущей лемме, можно доказать, что если $|G| \geqslant 7$ и все отношения вида $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d} \vee \rho_{e,f}$ (где a, b, c, d, e, f — различные элементы из G) являются правыми или левыми конгруэнциями, то G — R- или L-группоид. Аналогичные результаты имеют место в случае $|G| \geqslant 9$, $|G| \geqslant 11$ и т. д.

Теперь докажем основной результат этого раздела, а именно тот факт, что из списка (4.1) можно исключить отношения σ_a.

Теорема 4.24. *Пусть G — такой группоид, что $|G| \geqslant 5$. Если любое отношение эквивалентности вида $\rho_{a,b} \vee \rho_{c,d}$ (где a, b, c, d — различные элементы из G) является правой или левой конгруэнцией, то G — R- или L-группоид.*

Доказательство. Ввиду теоремы 4.21 и леммы 4.23 достаточно доказать, что $\sigma_i \in \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$ для любого $i \in G$. Предположим, что $\sigma_i \notin \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$ для некоторого $i \in G$, и приведём это предположение к противоречию. По лемме 4.23 $\rho_{a,b} \in \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$ при любых $a \neq b$.

Из условия теоремы следует, что существует такое $x \in G$, что

$$\big((G \setminus \{i\})x \not\subseteq G \setminus \{i\}\big) \ \&\ \big((G \setminus \{i\})x \neq \{i\}\big), \tag{4.15}$$

а также что для некоторого $y \in G$

$$(y(G \setminus \{i\}) \not\subseteq G \setminus \{i\}) \ \&\ (y(G \setminus \{i\}) \neq \{i\}). \tag{4.16}$$

Возможны следующие случаи.

1. $x, y \neq i$.
2. $x \neq i$, $y = i$.

3. $x = i$, $y \neq i$.
4. $x = y = i$.

Разберём каждый из этих случаев в отдельности.

Случай 1: $x, y \neq i$. Тогда из (4.15) мы выводим, что для некоторого $j \neq x, i$ справедливо утверждение

$$(x^2 = i \ \& \ jx \neq i) \ \vee \ (x^2 \neq i \ \& \ jx = i), \tag{4.17}$$

а из (4.16) — что для некоторого $k \neq y, i$

$$(y^2 = i \ \& \ yk \neq i) \ \vee \ (y^2 \neq i \ \& \ yk = i). \tag{4.18}$$

Из (4.17) выводим, что $\{x, j\} \cdot x = \{x^2, jx\} = \{i, a\}$ для некоторого $a \neq i$, поэтому отношение $\rho_{x,j}$ не является правой конгруэнцией. Следовательно,

$$\rho_{x,j} \in \mathrm{LCon}\, G \setminus \mathrm{RCon}\, G. \tag{4.19}$$

Аналогичным образом, используя (4.18), получаем, что

$$\rho_{y,k} \in \mathrm{RCon}\, G \setminus \mathrm{LCon}\, G. \tag{4.20}$$

Мы имеем два двухэлементных множества: $\{x, j\}$ и $\{y, k\}$. Если $\{x, j\} \cap$ $\cap \{y, k\} = \varnothing$, то (4.19) и (4.20) дадут нам, что $\rho_{x,j} \vee \rho_{y,k} \notin \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$, что противоречит условию теоремы. Если $\{x, j\} = \{y, k\}$, то $\rho_{x,j} = \rho_{y,k}$, что невозможно ввиду (4.19) и (4.20). Таким образом, мы можем далее считать, что множества $\{x, j\}$ и $\{y, k\}$ имеют ровно один общий элемент.

Пусть $x = y$. Тогда

$$\{y, k\} \cdot y = \{y^2, ky\} = \{x^2, ky\}, \tag{4.21}$$

$$\{j, k\} \cdot y = \{j, k\} \cdot x = \{jx, kx\}, \tag{4.22}$$

$$x \cdot \{x, j\} = \{x^2, xj\} = \{y^2, xj\}, \tag{4.23}$$

$$y \cdot \{j, k\} = \{yj, yk\} = \{xj, yk\}. \tag{4.24}$$

Проверим, что отношение $\rho_{j,k}$ не может быть правой конгруэнцией. Действительно, пусть $\rho_{j,k} \in \mathrm{RCon}\, G$. Тогда

$$jx = i \overset{(4.22)}{\iff} kx = i \iff ky = i \overset{(4.21)}{\iff} x^2 = i\,—$$

противоречие с (4.17). Проверим, что $\rho_{j,k}$ не является левой конгруэнцией. Действительно, пусть $\rho_{j,k} \in \mathrm{LCon}\, G$. Тогда

$$yk = i \overset{(4.24)}{\iff} yj = i \iff xj = i \overset{(4.23)}{\iff} y^2 = i\,—$$

противоречие с (4.18). Итак, $\rho_{j,k}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией, а это противоречит лемме 4.23.

Пусть $j = k$. Тогда

$$j \cdot \{x, j\} = \{jx, j^2\}, \tag{4.25}$$

$$\{j, y\} \cdot x = \{k, y\} \cdot x = \{kx, yx\}, \tag{4.26}$$

$$\{j, y\} \cdot j = \{k, y\} \cdot j = \{yj, j^2\}. \tag{4.27}$$

Следовательно,

$$y^2 = i \overset{(4.18)}{\iff} yk \neq i \iff yj \neq i \overset{(4.27)}{\iff} y^2 \neq i \overset{(4.27)}{\iff} jx \neq i \overset{(4.26)}{\iff} yx \neq i,$$

откуда видно, что $\rho_{x,y}$ не является левой конгруэнцией. Далее,

$$x^2 = i \overset{(4.17)}{\iff} jx \neq i \overset{(4.26)}{\iff} yx \neq i,$$

поэтому $\rho_{x,y}$ не является правой конгруэнцией. Таким образом, $\rho_{x,y}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией, а это противоречит лемме 4.23.

Пусть $j = y$ (случай, когда $x = k$, рассматривается аналогично). Тогда

$$y \cdot \{x, j\} = y \cdot \{x, y\} = \{jx, y^2\} = \{jx, y^2\}, \tag{4.28}$$
$$\{y, k\} \cdot x = \{k, y\} \cdot x = \{yx, kx\} = \{jx, kx\}. \tag{4.29}$$

Имеем

$$yx = i \iff jx = i \overset{(4.28)}{\iff} y^2 = i \overset{(4.18)}{\iff} yk \neq i,$$

поэтому $\rho_{x,k}$ не является левой конгруэнцией. Далее,

$$x^2 = i \overset{(4.17)}{\iff} jx \neq i \iff yx \neq i \overset{(4.29)}{\iff} kx \neq i,$$

поэтому $\rho_{x,k}$ не является также правой конгруэнцией. Таким образом, $\rho_{x,k} \notin$ $\notin \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$, что противоречит лемме 4.23.

Случай 2: $x = i$, $y \neq i$. Соотношение (4.18) справедливо по-прежнему, а вместо (4.17) мы будем иметь

$$\exists\, j, j' \neq i \ (ji = i \ \& \ j'i \neq i). \tag{4.30}$$

Кроме того, верно (4.20). Из (4.30) следует, что $\rho_{j,j'}$ не является правой конгруэнцией. Если $\{j, j'\} \cap \{y, k\} = \varnothing$, то из (4.30) и (4.20) мы получим, что отношение $\rho_{j,j'} \vee \rho_{y,k}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией, а это противоречит лемме 4.23. Если $\{j, j'\} = \{y, k\}$, то по тем же соображениям получается, что $\rho_{y,k} \notin \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$, что невозможно. Поэтому далее мы можем считать, что $|\{j, j'\} \cap \{y, k\}| = 1$.

Пусть $j = y$. Из (4.30) следует, что $\rho_{j,j'} \notin \mathrm{RCon}\, G$. Следовательно, $\rho_{j,j'} \in$ $\in \mathrm{LCon}\, G$. Так как $y \cdot \{j, j'\} = \{yj, yj'\}$, то

$$y^2 = i \iff jj' = i.$$

Из (4.20) и равенств $\{y, k\} \cdot i = \{yi, ki\} = \{ji, ki\} = \{i, ki\}$ следует, что $ki = i$. Далее, так как $\{j', k\} \cdot i = \{j'i, i\}$ и $j'i \neq i$, то $\rho_{j',k}$ не является правой конгруэнцией. Значит, $\rho_{j',k} \in \mathrm{LCon}\, G$, а так как $j \cdot \{j', k\} = \{jj', yk\}$, то

$$jj' = i \iff yk = i.$$

Таким образом,

$$y^2 = i \iff yk = i,$$

а это противоречит (4.18).

Пусть $j' = y$. Из (4.30) следует, что $\rho_{j,j'} \in \mathrm{LCon}\, G$. Согласно равенству $\{y,k\} \cdot i = \{j'i, ki\}$ и соотношению (4.20) имеем, что $ki \neq i$. Отсюда, учитывая равенство $\{j,k\} \cdot i = \{i, ki\}$, получаем, что $\rho_{j,k} \notin \mathrm{RCon}\, G$. Следовательно, $\rho_{j,k} \in \mathrm{LCon}\, G$. Имеем

$$y \cdot \{j,k\} = \{yj, yk\}, \tag{4.31}$$

$$y \cdot \{j,j'\} = \{yj, y^2\}. \tag{4.32}$$

Отсюда получаем, что

$$y^2 = i \overset{(4.32)}{\iff} yj = i \overset{(4.31)}{\iff} yk = i,$$

а это противоречит соотношению (4.18).

Пусть $j = k$. Из (4.30) следует, что $\rho_{j,j'} \notin \mathrm{RCon}\, G$. Следовательно, $\rho_{j,j'} \in \mathrm{LCon}\, G$. По (4.20) получаем, что $\rho_{j,k} \in \mathrm{RCon}\, G$. Имеем $\{k,y\} \cdot i\{j,y\} \cdot i = \{i, yi\}$, поэтому $yi = i$. Так как $\{j',y\} \cdot i = \{j'i, yi\} = \{j'i, i\}$, то $\rho_{j',y}$ не является правой конгруэнцией. Следовательно, $\rho_{j',y} \in \mathrm{LCon}\, G$. Имеем

$$y \cdot \{y, j'\} = \{y^2, yj'\}, \tag{4.33}$$

$$\{y,k\} \cdot j' = \{y,j\} \cdot j' = \{yj', jj'\}, \tag{4.34}$$

$$j \cdot \{j,j'\} = \{j^2, jj'\}, \tag{4.35}$$

$$\{y,k\} \cdot k = \{yk, k^2\} = \{yk, j^2\}. \tag{4.36}$$

Тогда

$$y^2 = i \overset{(4.33)}{\iff} yj' = i \overset{(4.34)}{\iff} jj' = i \overset{(4.35)}{\iff} j^2 = i \overset{(4.36)}{\iff} yk = i,$$

а это противоречит соотношению (4.18).

Пусть $j' = k$. Тогда $\rho_{j,j'} = \rho_{j,k} \in \mathrm{LCon}\, G$, $\rho_{y,k} \in \mathrm{RCon}\, G$. Так как $\{y,k\} \cdot i = \{yi, ki\} = \{yi, j'i\}$ и $j'i \neq i$, то $yi \neq i$. Так как $\{y,j\} \cdot i = \{yi, i\}$ и $yi \neq i$, то $\rho_{y,j}$ не является правой конгруэнцией. Следовательно, $\rho_{y,j}$ — левая конгруэнция. Равенства $\{y,k\} \cdot k = \{yk, k^2\}$, $k \cdot \{j,k\} = \{kj, k^2\}$, $\{y,k\} \cdot j = \{yj, kj\}$, $y \cdot \{y,j\} = \{y^2, yj\}$ показывают, что

$$yk = i \iff k^2 = i \iff kj = i \iff yj = i \iff y^2 = i,$$

а это противоречит (4.18).

Случай 3 ($x \neq i$, $y = i$) рассматривается аналогично случаю 2.

Случай 4: $x = y = i$. Из (4.15) и (4.16) мы получаем, что

$$\exists\, j, j' \neq i \ \big((ji = i \ \&\ j'i \neq i) \ \vee \ (ji \neq i \ \&\ j'i = i)\big), \tag{4.37}$$

$$\exists\, k, k' \neq i \ \big((ik = i \ \&\ ik' \neq i) \ \vee \ (ik \neq i \ \&\ i'k = i)\big). \tag{4.38}$$

Из (4.37) и (4.38) следует, что $\rho_{j,j'} \notin \mathrm{RCon}\, G$ и $\rho_{k,k'} \notin \mathrm{LCon}\, G$. Если $\{j,j'\} \cap \{k,k'\} = \varnothing$, то отношение $\rho_{j,j'} \vee \rho_{k,k'}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией, что противоречит лемме 4.23. Если $\{j,j'\} = \{k,k'\}$, то $\rho_{j,j'} = \rho_{k,k'} \notin \mathrm{RCon}\, G \cup \mathrm{LCon}\, G$ — противоречие. Поэтому далее мы будем считать, что множества $\{j,j'\}$ и $\{k,k'\}$ имеют ровно один общий элемент. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $j' = k'$.

Имеем $\{k', k\} \cdot i = \{j', k\} \cdot i = \{j'i, ki\}$, поэтому

$$j'i = i \iff ki = i.$$

Отсюда получаем, что

$$ki = i \iff ji \neq i.$$

Но $\{j, k\} \cdot i = \{ji, ki\}$, следовательно, $\rho_{j,k} \notin \mathrm{RCon}\, G$. Далее, $i \cdot \{j, j'\} = i \cdot \{j, k'\} = \{ij, ik'\}$, поэтому

$$ji = i \iff ik' = i.$$

Отсюда следует, что

$$ij = i \iff ik \neq i.$$

Но $i \cdot \{j, k\} = \{ij, ik\}$, следовательно, $rho_{j,k} \notin \mathrm{LCon}\, G$. Таким образом, $\rho_{j,k}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией, что противоречит лемме 4.23. Теорема доказана. $\square$

Мы завершим этот раздел примером, показывающим, что теорема 4.24 неверна при $|G| = 4$.

Пример 3. Пусть G — группоид, заданный следующей таблицей Кэли:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

.

В нём все отношения вида $\rho_{a,b} \vee \rho_{x,y}$ являются двусторонними конгруэнциями, но ни одно отношение вида $\rho_{a,b}$ и ни одно отношение вида σ_i не является ни правой, ни левой конгруэнцией.

5. Полугруппы, у которых все отношения эквивалентности — односторонние конгруэнции

Теперь рассмотрим полугруппы, у которых любое отношение эквивалентности является правой или левой конгруэнцией. В целях достичь большей общности будем считать, что односторонними конгруэнциями полугруппы S заведомо являются отношения $\rho_{a,b}$, где $a \neq b$, на другие отношения эквивалентности мы этого требования налагать не будем. Конечно, если все отношения $\rho_{a,b}$ — левые конгруэнции, то все без исключения отношения эквивалентности являются также левыми конгруэнциями. Аналогично если $\rho_{a,b} \in \mathrm{RCon}\, S$ при любых $a \neq b$, то $\mathrm{RCon}\, S = \mathrm{Eq}\, S$. А что будет в случае, когда $\rho_{a,b} \in \mathrm{LCon}\, S \cup \mathrm{RCon}\, S$ при всех $a \neq b$? Оказывается, в этом случае либо все отношения эквивалентности — правые конгруэнции, либо все они левые конгруэнции. Но это утверждение нам представляется неочевидным и будет доказано лишь в конце статьи. Итак, в леммах 5.1—5.7 мы будем предполагать, что полугруппа S удовлетворяет условию

$$\forall\, a, b \in S \ (a \neq b \implies \rho_{a,b} \in \mathrm{LCon}\, S \cup \mathrm{RCon}\, S). \tag{5.1}$$

Через E будем обозначать *множество идемпотентов* полугруппы S.

Лемма 5.1. *Для любого $a \in S$ имеют место включения $a^3 \in \{a, a^2\}$ и $a^2 \in E$.*

Доказательство. Тот факт, что $a^3 \in \{a, a^2\}$, следует из утверждения 1) леммы 4.4. Если $a^3 = a$, то $a^4 = a^2$, а если $a^3 = a^2$, то $a^4 = a^3 = a^2$. Следовательно, $a^2 \in E$. □

Из леммы следует, что всякая полугруппа с условием (5.1), а значит и всякая $(\mathrm{R} \vee \mathrm{L})$-полугруппа, является периодической. Для произвольной полугруппы S и каждого идемпотента $e^2 = e \in S$ определяются *классы кручения*

$$K(e) = \{x \in S \mid \exists\, n \ x^n = e\}.$$

Хорошо известно, что периодическая полугруппа является объединением попарно не пересекающихся классов кручения:

$$S = \bigcup \{K(e) \mid e \in E\}.$$

В нашем случае ввиду леммы 5.1 имеем

$$K(e) = \{x \in S \mid x^2 = e\}.$$

Лемма 5.2. *Для каждого $e \in E$ множество $K(e)$ является либо полугруппой с нулевым умножением, где e — нуль, либо группой из двух элементов, в которой e — единица.*

Доказательство. Очевидно,

$$K(e) = \{e\} \cup K_1 \cup K_2,$$

где

$$K_1(e) = \{x \in K(e) \mid x \neq e,\ x^3 = x^2\}, \quad K_2(e) = \{x \in K(e) \mid x \neq e,\ x^3 = x\}.$$

Ясно, что элементы $x \in K_1$ удовлетворяют равенствам $xe = ex = e$, а элементы $y \in K_2$ — равенствам $ye = ey = y$.

Покажем, что $|K_2| \leqslant 1$. Действительно, пусть $a, b \in K_2$ и $a \neq b$. Имеем $ae = ea = a$, $be = eb = b$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\rho_{a,b}$ — правая конгруэнция. Так как $\{a, b\}\cdot a = \{e, ba\}$ и $e \notin \{a, b\}$, то $ba = e$. Аналогично доказывается, что $ab = e$. Отсюда получаем, что $a = ae = aab = eb = b$, что невозможно.

Покажем, что либо $K_1 = \varnothing$, либо $K_2 = \varnothing$. Пусть $a \in K_1$, $b \in K_2$. Тогда $ae = ea = e$, $be = eb = b$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\rho_{a,b}$ — правая конгруэнция. Однако это противоречит равенству $\{a, b\} \cdot e = \{e, b\}$.

Если $K_2 \neq \varnothing$, то $K_1 = \varnothing$, поэтому $K(e) = \{e\} \cup K_2$ — группа из двух элементов. Пусть теперь $K_2 = \varnothing$. Тогда $K(e) = \{e\} \cup K_1$, причём $xe = ex = e$

при любых $x \in K(e)$. Возьмём любые элементы $a, b \in K_1$. Если $a = b$, то $ab = a^2 = e$. Пусть теперь $a \neq b$. Если $\rho_{a,b}$ — правая конгруэнция, то из равенства $\{a, b\} \cdot b = \{ab, e\}$ следует, что $ab = e$. Если $\rho_{a,b}$ — левая конгруэнция, то равенство $ab = e$ мы получим из соотношения $a \cdot \{a, b\} = \{e, ab\}$. Таким образом, $ab = e$. Следовательно, $K(e) \cdot K(e) = \{e\}$, т. е. $K(e)$ — полугруппа с нулевым умножением. □

Лемма 5.3. *Если $K(e)$ — группа из двух элементов, то $S = K(e)$.*

Доказательство. Если $K(e)$ — группа, то по лемме 5.2 $K(e) = \{e, a\}$, где $ea = ae = a$. Пусть $f \in E$, $f \neq e$. Без ограничения общности можно считать, что $\rho_{a,f}$ — правая конгруэнция. Так как $\{a, f\} \cdot a = \{e, fa\}$, то $fa = e$. Имеем $\{e, f\} \cdot a = \{a, e\}$. Следовательно, $\rho_{e,f}$ не является правой конгруэнцией. Следовательно, $\rho_{e,f}$ — левая конгруэнция. Так как $a \cdot \{e, f\} = \{a, af\}$, то $af = a$. Тогда $e = a^2 = (af)a = a(fa) = ae = a$, что невозможно. □

Лемма 5.4 [6, п. 2.3]. *В полугруппе S любое непустое подмножество является подполугруппой в том и только том случае, если S является цепью подполугрупп S_i:*

$$S = \bigcup \{S_i \mid i \in \Gamma\},$$

где Γ — цепь, каждое S_i является полугруппой правых или полугруппой левых нулей и $ab = ba = a$ для любых элементов $a \in S_i$, $b \in S_j$, таких что $i < j$.

Лемма 5.5. *Пусть S — полугруппа, удовлетворяющая условию* (5.1). *Тогда множество E идемпотентов этой полугруппы представимо в виде $E = E_0 \cup E_1$, где $ab = ba = a$ при $a \in E_0$, $b \in E_1$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) *E_0 — полугруппа правых нулей, E_1 — пустое множество или полугруппа левых нулей*;
2) *E_0 — полугруппа левых нулей, E_1 — пустое множество или полугруппа правых нулей.*

Доказательство. По лемме 4.6 E — подполугруппа полугруппы S и любое непустое подмножество полугруппы E является её подполугруппой. Следовательно, по лемме 5.4

$$E = \bigcup \{E_i \mid i \in \Gamma\},$$

где Γ — цепь, $ab = ba = a$ при $a \in E_i$, $b \in E_j$, $i < j$, а каждое E_i — полугруппа правых или левых нулей. Докажем, что $|\Gamma| \leqslant 2$. Действительно, пусть $i, j, k \in \Gamma$ таковы, что $i < j < k$. Возьмём любые элементы $a \in E_i$, $b \in E_j$, $c \in E_k$. Так как $\{a, c\} \cdot b = b \cdot \{a, c\} = \{a, b\}$, то $\rho_{a,c}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией, что противоречит условию (5.1). Таким образом, полугруппа E либо является полугруппой левых или правых нулей, либо $E = E_0 \cup E_1$, где $ab = ba = a$ при $a \in E_0$, $b \in E_1$. Осталось показать, что при $|E_0|, |E_1| \geqslant 2$ полугруппы E_0 и E_1 не могут быть обе полугруппами правых нулей или обе полугруппами левых нулей. Пусть, например, E_0 и E_1 — полугруппы правых нулей (второй случай рассматривается аналогично). Возьмём элементы $a, b \in E_0$, $c, d \in E_1$, такие что $a \neq b$, $c \neq d$. Так как $\{a, c\} \cdot d = \{a, d\}$ и $b \cdot \{a, c\} = \{a, b\}$, то $\rho_{a,c}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией, что противоречит условию (5.1). □

Ввиду леммы 5.5 мы можем считать, что

$$S = S_0 \cup S_1,$$

где

$$S_0 = \{K(e) \mid e \in E_0\}, \quad S_1 = \{K(e) \mid e \in E_1\},$$

причём $S_0 \cap S_1 = \varnothing$. Без ограничения общности можно считать, что E_0 — полугруппа правых нулей, а E_1 — пустое множество или полугруппа левых нулей. Ввиду лемм 5.2 и 5.3 мы можем считать, что $K(e)$ — полугруппа с нулевым умножением для каждого $e \in E$.

Лемма 5.6. $S_1 = E_1$.

Доказательство. Пусть $a \in S_1 \setminus E_1$. Возьмём элемент $f \in E_0$. Пусть $a^2 = e$. Тогда $e \in E_1$. Следовательно, $ef = fe = f$. Так как $\{a, f\} \cdot e = e \cdot \{a, f\} = \{e, f\}$, то отношение $\rho_{a,f}$ не является ни правой, ни левой конгруэнцией, что невозможно. Таким образом, $S_1 \setminus E_1 = \varnothing$. □

Напомним, что *инфляцией* полугруппы B называется такая полугруппа $A \supseteq B$, что $A = \bigcup\{A_b \mid b \in B\}$, $A_b \cap A_{b'} = \varnothing$ при $b \neq b'$ и $A_b \cdot A_{b'} = \{bb'\}$ при всех $b, b' \in B$. (В [6] и русском переводе монографии [4] вместо слова «инфляция» используется термин «раздувание».)

Лемма 5.7. *S_0 — инфляция полугруппы E_0.*

Доказательство. Так как $K(e)$ — полугруппа с нулевым умножением для каждого $e \in E_0$, то достаточно доказать, что $K(e) \cdot K(f) = \{ef\}$ при таких $e, f \in E_0$, что $e \neq f$. Напомним, что мы считаем, что E_0 — полугруппа правых нулей.

Пусть $a \in K(e) \setminus \{e\}$. Так как $e \cdot \{a, f\} = \{e, f\}$, то $\rho_{a,f}$ не является левой конгруэнцией. Значит, $\rho_{a,f}$ — правая конгруэнция. Так как $\{a, f\} \cdot f = \{af, f\}$, то $af \in \{a, f\}$. Если $af = a$, то $a^2 f = a^2$, т. е. $ef = e$, что противоречит равенству $ef = f$. Поэтому $af = f$. Таким образом, $K(e) \cdot f = \{f\}$.

Пусть $b \in K(f) \setminus \{f\}$. Так как $f \cdot \{b, e\} = \{f, e\}$, то $\rho_{b,e}$ не является левой конгруэнцией. Следовательно, $\rho_{b,e}$ — правая конгруэнция. Так как $\{b, e\} \cdot b = \{f, eb\}$, то $eb = f$. Таким образом, $e \cdot K(f) = \{f\}$.

Пусть $a \in K(e) \setminus \{e\}$, $b \in K(f) \setminus \{f\}$. Так как $a \cdot \{a, f\} = \{e, f\}$, то $\rho_{a,f}$ не является левой конгруэнцией. Значит, $\rho_{a,f}$ — правая конгруэнция. Так как $\{a, f\} \cdot b = \{ab, f\}$, то $ab \in \{a, f\}$. Если $ab = a$, то $a^2 b = a^2$, т. е. $eb = e$, что противоречит равенству $e \cdot K(f) = \{f\}$. Таким образом, $ab = f$.

Мы доказали, что $K(e) \cdot K(f) = \{f\}$, что и требовалось. □

Замечание. Мы доказали, что полугруппа S_0 является инфляцией полугруппы правых нулей. Такие полугруппы — это в точности полугруппы, удовлетворяющие тождеству $xz = yz$ (или, что равносильно, тождеству $xy = y^2$) (см. [2]). Их можно назвать *полугруппами обобщённых правых нулей*.

Лемма 5.8. *S_0 — идеал полугруппы S.*

Доказательство. Так как S_0 и E_1 — подполугруппы и $S = S_0 \cup E_1$, то достаточно доказать, что $S_0E_1 \subseteq S_0$ и $E_1S_0 \subseteq S_0$.

Пусть $x \in S_0$, $e \in E_1$ и $xe \notin S_0$. Тогда $e' = xe \in E_1$. Если $x \in E_0$, то по лемме 5.5 $xe = x \in S_0$ — противоречие. Значит, $x \in S_0 \setminus E_0$. Отсюда получаем, что $x \in K(f) \setminus \{f\}$ для некоторого $f \in E_0$. Имеем $xe' = x^2e = fe = f$. Равенства $x \cdot \{e, x\} = \{e', f\}$ и $\{e, x\} \cdot e' = \{e, f\}$ показывают, что отношение $\rho_{e,x}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией, что противоречит условию (5.1).

Пусть $x \in S_0$, $e \in E_1$ и $ex \notin S_0$. Тогда $e' = ex \in E_1$. Если $x \in E_0$, то $ex \in E_0$ — противоречие. Значит, $x \in S_0 \setminus E_0$. Тогда $x \in K(f) \setminus \{f\}$ для некоторого $f \in E_0$. Докажем, что $e \neq e'$. Действительно, если $e = e'$, то $ex = e$, откуда следует, что $e^2 = e$, а значит, $e = ex^2 = ef = f$ — противоречие. Таким образом, $e \neq e'$. Имеем $e'x = ex^2 = ef = f$. Равенства $e' \cdot \{e, x\} = \{e', f\}$ и $\{e, x\} \cdot x = \{e', f\}$ показывают, что отношение $\rho_{e,x}$ не является ни левой, ни правой конгруэнцией, а это противоречит условию (5.1). □

Теорема 5.9. *Если в полугруппе S любое отношение эквивалентности вида $\rho_{a,b}$ ($a, b \in S$, $a \neq b$) является правой или левой конгруэнцией, то выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $|S| \leqslant 2$;
2) *полугруппа S представима в виде $S = S_0 \cup E_1$, где S_0 — инфляция полугруппы E_0, где E_0 — полугруппа правых нулей, E_1 — пустое множество или полугруппа левых нулей, а для элементов $e \in E_1$, $f \in E_0$, $a \in K(f)$ имеют место равенства $ae = a$, $ea = f$;*
3) *полугруппа S двойственна полугруппе, описанной в пункте 2).*

Наоборот, если выполнено хотя бы одно из условий 1), 2), то любое отношение эквивалентности на S является правой конгруэнцией, а в случае выполнения какого-нибудь из условий 1), 3) все отношения эквивалентности — левые конгруэнции.

Доказательство. Пусть S — полугруппа, удовлетворяющая условию (5.1), и $|S| \geqslant 3$. Тогда по леммам 5.5 и 5.6 $S = S_0 \cup E_1$, $S_0 = \bigcup\{K(e) \mid e \in E_0\}$. Если $E_1 = \varnothing$, то выполнение хотя бы одного из условий 2), 3) очевидно. Далее в доказательстве первой части теоремы (прямое утверждение) будем считать, что $E_1 \neq \varnothing$. По лемме 5.5 либо E_0 — полугруппа правых, а E_1 — полугруппа левых нулей, либо наоборот. Покажем, что в первом случае будет выполнено условие 2) или (что возможно лишь при $|E_0| = |E_1| = 1$) условие 3). Этого будет достаточно для доказательства первой части теоремы по соображениям двойственности.

Итак, E_0 — полугруппа правых, а E_1 — полугруппа левых нулей. Разберём три случая.

Случай 1: $|E_0| \geqslant 2$. Пусть $a \in K(f) \setminus \{f\}$ для некоторого $f \in E_0$. Возьмём элемент $e \in E_1$. Так как $|E_0| \geqslant 2$, то существует элемент $f' \in E_0 \setminus \{f\}$. Ввиду равенства $f' \cdot \{e, a\} = \{f', f\}$ отношение $\rho_{e,a}$ не является левой конгруэнцией. Следовательно, $\rho_{e,a}$ — правая конгруэнция. Так как $\{e, a\} \cdot a = \{ea, f\}$, то $ea = f$. Равенство $e \cdot \{f', a\} = \{f', f\}$ показывает, что $\rho_{f',a}$ не является левой конгруэнцией. Следовательно, $\rho_{f',a}$ — правая конгруэнция. Ввиду равенства $\{f', a\} \cdot e = \{f', ae\}$ мы получаем, что $ae \in \{f', a\}$. Если $ae = f'$, то $a^2e = af'$, т. е. $fe = f'$, что противоречит равенству $fe = f$. Таким образом, $ae = a$. Мы видим, что полугруппа S удовлетворяет условию 2).

Случай 2: $|E_1| \geqslant 2$. Пусть $a \in K(f) \setminus \{f\}$, $f \in E_0$ и $e \in E_1$. Так как $|E_1| \geqslant 2$, то существует элемент $e' \in E_1 \setminus \{e\}$. Имеем $e \cdot \{e', a\} = \{e, ea\}$. Равенство $ea = e$ невозможно, так как по лемме 5.8 $E_1S_0 \subseteq S_0$. Следовательно, отношение $\rho_{e',a}$ не является левой конгруэнцией. Значит, $\rho_{e',a}$ — правая конгруэнция. Равенство $\{e', a\} \cdot a = \{e'a, f\}$ теперь влечёт, что $e'a = f$. Отсюда следует, что $ea = ee'a = ef = f$. Таким образом, S удовлетворяет условию 2).

Случай 3: $|E_0| = |E_1| = 1$. Пусть $E_0 = \{f\}$, $E_1 = \{e\}$. Предположим вначале, что $ae \neq f$ для некоторого $a \in K(f) \setminus \{f\}$. Так как $a \cdot \{e, f\} = \{ae, f\}$ и $ae \in S_0$, то $\rho_{e,f}$ не является левой конгруэнцией. Следовательно, $\rho_{e,f}$ — правая конгруэнция. Пусть $x \in K(f) \setminus \{f\}$. Так как $\{e, f\} \cdot x = \{ex, f\}$, то $ex = f$. Таким образом, $e \cdot K(f) = \{f\}$. Для $x \in K(f) \setminus \{f\}$ имеем $e \cdot \{x, e\} = \{f, e\}$. Следовательно, $\rho_{x,e}$ не является левой конгруэнцией, поэтому $\rho_{x,e}$ — правая конгруэнция. Так как $\{x, e\} \cdot e = \{xe, e\}$ и $xe \neq e$, то $xe = x$. Мы получаем, что S удовлетворяет условию 2).

Пусть теперь $ae = f$ для всех $a \in K(f) \setminus \{f\}$. Так как $\{a, e\} \cdot e = \{f, e\}$, то $\rho_{a,e}$ не является правой конгруэнцией. Следовательно, $\rho_{a,e}$ — левая конгруэнция. Так как $e \cdot \{a, e\} = \{ea, e\}$, то $ea \in \{e, a\}$. Но $E_1S_0 \subseteq S_0$ по лемме 5.8, поэтому $ea \neq e$. Следовательно, $ea = a$. Ввиду произвольности элемента $a \in K(f) \setminus \{f\}$ и равенства $ef = f$ получаем, что $ex = x$ для всех $x \in K(f)$. Теперь ясно, что полугруппа удовлетворяет условию 3).

Докажем теперь вторую часть теоремы (обратную). Если выполнено условие 1), то ясно, что все отношения эквивалентности являются правыми и левыми конгруэнциями. Если выполнено условие 2), то нетрудно убедиться, что элементы подполугруппы S_0 являются обобщёнными правыми нулями полугруппы S, а элементы из E_1 — правыми единицами полугруппы S. Следовательно, по теореме 4.1 S является R-полугруппой. Если выполнено условие 3), то аналогичными рассуждениями получаем, что S является L-полугруппой. □

Следствие 1. *Если каждое отношение эквивалентности вида $\rho_{a,b}$ $(a \neq b)$ на полугруппе S является правой или левой конгруэнцией, то либо все отношения эквивалентности на S являются правыми конгруэнциями, либо все они левые конгруэнции.*

Следствие 2. *Полугруппа является* $(R \vee L)$*-полугруппой в том и только том случае, если она является* R*-полугруппой или* L*-полугруппой.*

Следствие 3. *Класс* $(R \vee L)$*-полугрупп является конечно аксиоматизируемым.*

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 4.22.

Замечание. Доказательство теоремы 5.9 можно несколько сократить, если воспользоваться теоремой Л. Н. Шеврина [7, теорема 7], утверждающей, что эпигруппа при определённых условиях на гомоморфные образы является связкой унипотентных подполугрупп (выполнение условий этой теоремы в нашем случае проверить нетрудно). Однако авторы предпочли непосредственное доказательство в целях замкнутости изложения.

В заключение приведём ещё одну теорему, непосредственно следующую из теоремы 4.3.

Теорема 5.10. *Пусть* S *— полугруппа и* $|S| > 1$*. Все отношения эквивалентности на* S *являются её конгруэнциями в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

1) S *— группа из двух элементов;*
2) S *— полугруппа с нулевым умножением;*
3) S *— полугруппа правых нулей;*
4) S *— полугруппа левых нулей;*
5) S *— полурешётка из двух элементов.*

Литература

[1] Артамонов В. А. Универсальные алгебры // Общая алгебра. Т. 2. — М.: Наука; Физматгиз, 1991. — С. 295—367.

[2] Болтнев А. А. Теоретико-множественное описание полугрупп некоторых многообразий // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, вып. 1. — С. 56—63.

[3] Евсеев А. Е. Полугруппы с катенарно ассоциативными подмножествами // Соврем. алгебра. — 1999. — № 4. — С. 57—59.

[4] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. — М.: Мир, 1972.

[5] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[6] Шеврин Л. Н. Полугруппы // Общая алгебра. Т. 2. — М.: Наука; Физматгиз, 1991. — С. 11—191.

[7] Шеврин Л. Н. К теории эпигрупп. II // Мат. сб. — 1994. — Т. 185, № 9. — С. 153—176.

[8] Hotzel E. On finiteness conditions in semigroups // J. Algebra. — 1979. — Vol. 60. — P. 352—370.