Стандартный базис T-идеала полиномиальных тождеств алгебры треугольных матриц

В. Н. ЛАТЫШЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.554

Ключевые слова: стандартный базис, тождество, T-идеал, матрица.

Аннотация

В работе даётся определение стандартного базиса T-идеала в свободной ассоциативной алгебре над полем нулевой характеристики и строится базис, называемый каноническим, в пространстве n-линейных форм. Этот базис используется для выбора стандартного базиса в T-идеале тождеств алгебры верхнетреугольных матриц.

Abstract

V. N. Latyshev, Standard basis in the T-ideal formed by polynomial identities of triangular matrices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 193—203.

We give the definition of a standard basis of a T-ideal of the free associative algebra over a field of zero characteristic and indicate some basis called canonical in the linear space of n-linear forms. Using this basis, we construct a standard basis in the T-ideal of identities satisfied by the algebra of upper triangular $(n \times n)$-matrices.

В работе определяется стандартный базис для T-идеала свободной ассоциативной алгебры над полем нулевой характеристики. Несмотря на то, что это понятие было введено автором много лет назад, вопрос о конечности стандартного базиса в T-идеале открыт до сих пор. Более того, в нетривиальном случае такой базис известен лишь для T-идеала тождеств счётномерной алгебры Грассмана [2, 4]. В этой работе мы указываем стандартный базис в идеале тождеств алгебры верхнетреугольных матриц.

1. Основные определения и обозначения

Полиномиальные тождества ассоциативной алгебры A над полем k образуют вполне характеристический идеал $T(A)$ в свободной ассоциативной алгебре $k\langle X\rangle$ над полем k от счётного множества не коммутирующих между собой переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Для краткости вполне характеристические

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 193—203.

идеалы называются *T-идеалами* (от англ. total characteristic ideal), а элементы свободной ассоциативной алгебры $k\langle X\rangle$ — (некоммутативными) полиномами. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что основное поле k имеет нулевую характеристику и что алгебра $k\langle X\rangle$ обладает единичным элементом (пустое слово от X).

На свободном моноиде $\langle X\rangle$, состоящем из всех мономов от X (включая пустой), фиксируем *степенно-лексикографический порядок* (deg-lex), удовлетворяющий условию минимальности: $u \leqslant v$ тогда и только тогда, когда либо u имеет меньшую степень, чем v, либо u и v — мономы одинаковой степени, но u меньше v в лексикографическом смысле. Переменные считаются упорядоченными по их индексам. Старший моном, входящий в запись полинома $f \in k\langle X\rangle$, обозначается $\bar{f}$, $\bar{f} \in \langle X\rangle$.

Хорошо известно, что над полем нулевой характеристики все T-идеалы в алгебре $k\langle X\rangle$ порождаются их полилинейными элементами, т. е. элементами, линейными по каждой переменной, входящей в их запись. Иначе говоря, все полиномиальные тождества алгебры над полем нулевой характеристики порождаются её полилинейными тождествами. В связи с этим в дальнейшем мы будем интересоваться лишь множеством полилинейных элементов $k\langle X\rangle_{\mathrm{mult}}$ алгебры $k\langle X\rangle$ и множеством полилинейных мономов $\langle X\rangle_{\mathrm{mult}}$ свободного моноида $\langle X\rangle$. Множество n-линейных полиномов в $k\langle X\rangle$, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, обозначается P_n. Ясно, что P_n является линейной оболочкой мономов вида $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$, $\sigma \in \mathrm{S}_n$, и поэтому $\dim P_n = n!$. Часто элементы пространства P_n называют *n-линейными формами*. На пространстве P_n естественным образом действует симметрическая группа n-й степени S_n.

На множестве всех полилинейных мономов $\langle X\rangle_{\mathrm{mult}} \subset \langle X\rangle$ определим частичный порядок, называемый *накрытием*: $u \leqslant_0 v$ тогда и только тогда, когда $u = x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ и возможно представление вида $v = w_0 x_{j_1} w_1 x_{j_2} \ldots w_{s-1} x_{j_s} w_s$, где отображение $\varphi\colon \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \to \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}\}$, $\varphi\colon x_{i_m} \mapsto x_{j_m}$, $m = 1, \ldots, s$, является изотонным в смысле упорядочения переменных. Разумеется, указанное представление слова v и, следовательно, отображение φ определяются парой мономов u и v, вообще говоря, не однозначно.

Множество элементов $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ частично упорядоченного множества $M_{\leqslant}$, конечное или бесконечное, называется его *стандартным базисом*, если для всякого элемента $a \in M$ найдётся такое $i \in \mathbb{N}$, что $a_i \leqslant a$.

Система полилинейных полиномов $F = \{f_1, \ldots, f_m, \ldots\}$, конечная или бесконечная, T-идеала $T \lhd k\langle X\rangle$ называется его *стандартным базисом* (или *базисом Грёбнера—Ширшова* в другой терминологии), если множество $\bar{F} = \{\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m, \ldots\}$ образует стандартный базис в множестве старших мономов $\bar{T}_{\mathrm{mult}} = \{\bar{f} \mid f \in T_{\mathrm{mult}}\}$ полилинейных элементов T_{mult} T-идеала T, рассматриваемом как частично упорядоченное множество относительно накрытия $\leqslant_0$. Другими словами, для всякого полилинейного полинома $f \in T$ его старший моном $\bar{f}$ относительно упорядоченности deg-lex накрывает старший моном $\bar{f}_i$ хотя бы одного полинома $f_i \in F$ (в наших обозначениях $\bar{f}_i \leqslant_0 \bar{f}$).

В нулевой характеристике стандартный базис T-идеала $T \lhd k\langle X\rangle$ образует его систему порождающих. Для доказательства достаточно заметить, что любой n-линейный элемент из T, зависящий от переменных $x_1, \ldots, x_n$, лежит в T-идеале F^T, порождённом элементами F. Действительно, предположим, что это не так. Тогда среди этих «плохих» полиномов существует полином $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in T_{\mathsf{mult}} \setminus F^T$ с наименьшим старшим мономом $\bar f$ в смысле упорядоченности deg-lex. По условию найдётся такой полином $f_i \in F$, что $\bar f_i \leqslant_0 \bar f$. Это означает, что $\bar f_i = x_{r_1} \ldots x_{r_m}$, $m \leqslant n$, и возможно представление вида $\bar f = u_1 x_{s_1} u_2 x_{s_2} \ldots u_m x_{s_m} u_{m+1}$, где отображение переменных $\varphi(x_{r_j}) = x_{s_j}$, $j = 1, \ldots, m$, является изотонным. Проведём «шаг редукции». Полиномы f и $g = \alpha\beta^{-1} u_1 f_i(x_{s_1} u_2, \ldots, x_{s_m} u_{m+1})$, где $\alpha, \beta \in k$ — старшие коэффициенты полиномов f и f_i соответственно, принадлежат T, зависят от одинакового набора переменных, имеют одинаковые старшие члены, и $g \in F^T$. Тогда $h = f - g \in T \setminus F^T$ и $\bar h < \bar f$, противоречие.

Эти рассуждения показывают, что данное определение стандартного базиса T-идеала полностью отвечает общей концепции базиса Грёбнера—Ширшова, изложенной автором в [5].

2. Канонический базис в пространстве n-линейных форм P_n

Простейшим по виду базисом в пространстве n-линейных форм P_n является множество n-линейных мономов $x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$, $\sigma \in \mathrm{S}_n$. Однако для решения многих вопросов более полезными оказываются другие базисы специального вида. Один из таких базисов приведён автором в [1]. Здесь мы изложим его модификацию, снабдив её независимым и более простым доказательством.

Напомним некоторые общепринятые обозначения и термины. Пусть A — ассоциативная алгебра. Коммутатором двух элементов $a, b \in A$ называется элемент $[a, b] = ab - ba$. Правонормированным коммутатором элементов $a_1, \ldots, a_m \in A$ называется элемент, определяемый индуктивным равенством $[a_1, \ldots, a_m] = \big[[a_1, \ldots, a_{m-1}], a_m\big]$. Операция коммутирования обладает по отношению к умножению дифференциальным свойством (правило Лейбница):

$$[ab, c] = [a, c]b + a[b, c], \quad a, b, c \in A.$$

Отсюда следует, что дифференциальное свойство переносится и на саму операцию коммутирования:

$$\big[[a, b], c\big] = \big[[a, c], b\big] + \big[a, [b, c]\big].$$

Это означает, что если в алгебре A операцию умножения заменить на операцию коммутирования, то получится алгебра Ли, обозначаемая $A^{(-)}$. Действительно, алгебра $A^{(-)}$ антикоммутативна и в ней выполняется тождество Якоби. Фиксируем элемент $c \in A$. Отображение алгебры $A^{(-)}$ (и алгебры A)

$$\operatorname{ad} c\colon A^{(-)} \to A^{(-)}, \quad \operatorname{ad} c\colon a \mapsto [a, c]$$

является дифференцированием, как это явствует из сказанного выше. Оно называется внутренним дифференцированием алгебры $A^{(-)}$ (и алгебры A), определяемым элементом c. Равенство

$$\big[a,[b,c]\big] = \big[[a,b],c\big] + \big[b,[a,c]\big] = \big[[a,b],c\big] - \big[[a,c],b\big]$$

можно записать в виде

$$\operatorname{ad}[b,c] = [\operatorname{ad} b, \operatorname{ad} c].$$

Следовательно, внутренние дифференцирования алгебры $A^{(-)}$ (или алгебры A), обозначаемые $\operatorname{ad} A^{(-)}$ (или $\operatorname{ad} A$), образуют алгебру Ли с операцией коммутирования в качестве умножения. При этом отображение

$$\varphi\colon A^{(-)} \to \operatorname{ad} A^{(-)}, \quad \varphi\colon c \mapsto \operatorname{ad} c$$

является гомоморфизмом алгебр Ли, ядро которого совпадает с центром алгебры $A^{(-)}$ (алгебры A).

Проведённые рассуждения относятся к первоначальному знакомству с алгебрами Ли и хорошо известны. Применим их в нужном нам контексте к свободной ассоциативной алгебре $k\langle X\rangle$ над полем k от счётного множества переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Лемма 2.1. *Правонормированный n-линейный коммутатор от переменных $x_1, \ldots, x_n \in X$, взятых в любом порядке, представляется в виде алгебраической суммы правонормированных коммутаторов от этих переменных, начинающихся с переменной x_n.*

Доказательство. Имеем

$$[x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r-1}}, x_n, x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_{n-1}}] = -[x_n, [x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r-1}}], x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_{n-1}}] = \\ = -[([\operatorname{ad} x_{i_1}, \ldots, \operatorname{ad} x_{i_{r-1}}])x_n, x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_{n-1}}]. \quad \square$$

Полилинейное произведение переменных и правонормированных коммутаторов от них называется *коммутаторным одночленом*. Количество множителей, являющихся правонормированными коммутаторами, называется *коммутаторной степенью* коммутаторного одночлена. Коммутаторный одночлен нулевой коммутаторной степени — это просто произведение переменных. Правонормированный n-линейный коммутатор от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется *правильным*, если он имеет вид $[x_n, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}]$, где $i_2 < i_3 < \ldots < i_{n-1}$. Таким образом, правильный коммутатор однозначно определяется выбором переменной x_{i_1}, т. е. количество таких коммутаторов равно $n-1$.

Лемма 2.2. *Всякий n-линейный правонормированный коммутатор от переменных $x_1, \ldots, x_n$ представляется в виде алгебраической суммы правильных n-линейных коммутаторов и коммутаторных одночленов коммутаторной степени* 2.

Доказательство. В силу леммы 2.1 утверждение достаточно доказать для правонормированного коммутатора, начинающегося с переменной x_n. Предположим, что $x_{i_r} > x_{i_{r+1}}$. Тогда

$$[x_n, x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_{n-1}}] = [x_n, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r+1}}, x_{i_r}, \ldots, x_{i_{n-1}}] + \\ + \big[[[x_n, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r-1}}], [x_{i_r}, x_{i_{r+1}}]], x_{i_{r+2}}, \ldots, x_{i_{n-1}}\big],$$

где второе слагаемое представляется в виде суммы попарных произведений правонормированных коммутаторов. □

Введённые определения и доказанные утверждения, конечно, применимы к любому набору попарно различных между собой переменных.

Полилинейный коммутаторный одночлен называется *правильным*, если он имеет вид $u_1 \ldots u_m x_{j_1} \ldots x_{j_s}$, где u_i — правильные коммутаторы от соответствующих наборов переменных и $j_1 < \ldots < j_s$. В частности, единственным правильным одночленом нулевой коммутаторной степени (в его запись коммутаторы вообще не входят) от переменных $x_1, \ldots, x_n$ является моном $x_1 \ldots x_n$.

Лемма 2.3. *Количество правильных коммутаторных одночленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ равно $n!$.*

Доказательство. Обозначим через p_n количество правильных коммутаторных одночленов от n переменных. Индукцией по n докажем, что $p_n = n!$.

Очевидно, имеет место рекуррентное соотношение

$$p_n = \sum_{i=2}^{n} (i-1) C_n^i p_{n-i} + 1.$$

По предположению индукции имеем

$$p_n = \sum_{i=2}^{n} (i-1) \frac{n!}{i!\,(n-i)!}(n-i)! + 1 = \sum_{i=2}^{n} (i-1)\frac{n!}{i!} + 1 = n! \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i!} + 1.$$

Осталось индукцией по n доказать равенство

$$r_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i!} = \frac{n!-1}{n!}.$$

Используя предположение индукции, получаем

$$r_{n+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{i-1}{i!} = r_n + \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \\ = \frac{n!-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - (n+1) + n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}. \quad \square$$

Предложение 2.4. *Правильные коммутаторные одночлены образуют базис в пространстве n-линейных форм P_n.*

Доказательство. Ввиду леммы 2.3 достаточно доказать, что всякий моном из P_n линейно выражается через правильные коммутаторные одночлены. В качестве доказательства предложим алгоритм, выполняющий эту процедуру. Далее идёт кратное описание его шагов.

Шаг 1. На вход поступает моном $u \in P_n$. Возможны следующие случаи:

1) $u = x_1 x_2 \ldots x_n$. Алгоритм останавливается, поскольку u — правильный коммутаторный одночлен;
2) $u \neq x_1 x_2 \ldots x_n$. Тогда в u есть подслово вида $x_i x_j$, $i > j$, т. е. $u = a x_i x_j b$, $i > j$. Совершаем преобразование

$$u = a x_i x_j b := a x_j x_i b + a[x_i, x_j]b.$$

Шаг k. Моном u представлен в виде линейной комбинации коммутаторных одночленов. Возможны следующие случаи:

1) в запись u входит коммутаторный одночлен v, в котором левее одного из коммутаторов стоит переменная, т. е. $v = a x_i [*] b$. Совершаем преобразование

$$v := a[*] x_i b + a[*, x_i] b.$$

Здесь «содержимое» коммутатора обозначено символом $*$;
2) во всех коммутаторных одночленах, содержащихся в записи u, коммутаторы стоят в начале, но есть коммутаторный одночлен v, в котором имеется подслово $x_i x_j$, $i > j$, т. е. $v = [*_1] \ldots [*_r] x_{q_1} \ldots x_i x_j \ldots x_{q_s}$. Совершаем преобразование

$$v := [*_1] \ldots [*_r] x_{q_1} \ldots x_j x_i \ldots x_{q_s} + [*_1] \ldots [*_r] x_{q_1} \ldots [x_i, x_j] \ldots x_{q_s};$$

3) во всех коммутаторных одночленах, содержащихся в записи u, коммутаторные множители стоят в начале, не встречается подслов вида $x_i x_j$, $i > j$, но есть коммутаторный одночлен v, имеющий коммутаторный множитель, не являющийся правильным коммутатором, т. е. $v = v_1 \ldots v_r \ldots v_s x_{i_1} \ldots x_{i_t}$, $i_1 < \ldots < i_t$, где v_i — коммутаторы, причём v_r не является правильным коммутатором. По лемме 2.2 имеет место представление вида $v_r = w_0 + w_1$, где w_0 — правильный коммутатор степени, равной $\deg v_r$, а w_1 — алгебраическая сумма коммутаторных одночленов коммутаторной степени 2. Совершаем преобразование

$$v := v_1 \ldots w_0 \ldots v_s x_{i_1} \ldots x_{i_t} + v_1 \ldots w_1 \ldots v_s x_{i_1} \ldots x_{i_t};$$

4) во всех коммутаторных одночленах из записи u коммутаторные множители являются правильными и стоят в начале, а индексы свободных переменных образуют возрастающую последовательность. Такие коммутаторные одночлены правильные, цель достигнута, алгоритм останавливается.

На каждом шаге, совершающем преобразование, один из коммутаторных одночленов, входящих в запись u, заменяется на коммутаторные одночлены, в которых по сравнению с исходным коммутаторным одночленом происходит по крайней мере одно из следующих изменений параметров:

- уменьшается на 1 количество «инверсий» свободных переменных;
- номер одного из коммутаторных множителей (исчисляемый слева направо) уменьшается на 1;

- уменьшается на 1 количество свободных переменных;
- уменьшается на 1 количество коммутаторных множителей, не являющихся правильными;
- увеличивается на 1 количество коммутаторных множителей.

Поэтому работа алгоритма обязательно обрывается на конечном шаге. □

Построенная база в пространстве n-линейных форм P_n, состоящая из правильных коммутаторных одночленов, называется *канонической*.

3. Некоторые следствия из существования канонической базы в пространстве n-линейных форм P_n

С помощью канонической базы легко доказываются многие известные факты о T-идеалах свободной ассоциативной алгебры.

Назовём n-линейную форму *собственной*, если она аннулируется при специализации любой её переменной единичным элементом. Множество собственных n-линейных форм образует линейное подпространство $\Gamma_n \subseteq P_n$.

Следующее утверждение впервые доказано в [6] В. Шпехтом.

Предложение 3.1. *Всякий нетривиальный T-идеал $T \subseteq k\langle X\rangle$ свободной ассоциативной алгебры $k\langle X\rangle$ с единицей над полем нулевой характеристики k порождается лежащими в нём собственными полилинейными формами $T \cap \Gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Для краткости произведение коммутаторных множителей, начинающих правильный коммутаторный одночлен u, будем называть его «головой», а произведение свободных переменных, стоящих в конце u, — его «хвостом». Таким образом, правильное коммутаторное произведение u представимо в виде $u = vw$, где v — его голова, а w — хвост.

Пусть $f \in T \cap P_n$ — произвольная n-линейная форма, лежащая в T-идеале T. Выразим её через каноническую базу и выделим в отдельные слагаемые элементы базы с одним и тем же хвостом:

$$f = \sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=1}^{s_i}\alpha_{ij}v_{ij}\right)w_i, \quad \alpha_{ij} \in k,$$

где u_{ij}, $j = 1,\ldots,s_i$, — элемент канонической базы с номером j, имеющий хвост w_i, $w = 1,\ldots,t$, и голову v_{ij}. Если все хвосты в представлении f пустые, то f уже собственная n-линейная форма. Предположим, что существует непустой хвост $w_i \neq 1$. Все его переменные специализируем единичным элементом 1. Эта специализация аннулирует все слагаемые, кроме i-го. Имеем

$$f|_{w_i=1} = \sum_{j=1}^{s_i}\alpha_{ij}v_{ij} \in T,$$

причём правая часть равенства является собственной формой от соответствующего набора переменных. Осталось вспомнить, что в случае нулевой характеристики T-идеал порождается своими полилинейными элементами. $\square$

Проведённые рассуждения показывают, что n-линейная форма является собственной тогда и только тогда, когда в её представлении через каноническую базу все хвосты пустые, т. е. форма представляется в виде линейной комбинации произведений коммутаторов.

Обозначим через Λ_m T-идеал, порождённый $2m$-линейным произведением m коммутаторов второго порядка $[x_1,x_2]\,[x_3,x_4]\dots[x_{2m-1},x_{2m}]$. Характеризация T-идеала Λ_m была приведена автором в [1].

Предложение 3.2. *Полилинейный элемент свободной ассоциативной алгебры тогда и только тогда принадлежит T-идеалу Λ_m, когда его представление через каноническую базу содержит правильные коммутаторные одночлены коммутаторной степени не меньше m.*

Доказательство. Полилинейное следствие элемента

$$g_m = [x_1,x_2]\dots[x_{2m-1},x_{2m}]$$

является линейной комбинацией элементов вида

$$h = a[u_1,v_1]\dots[u_m,v_m]b,$$

где a, b, u_i, v_i — мономы. Поскольку коммутирование обладает дифференциальным свойством (правило Лейбница), элемент вида $[u_i,v_i]$ представляется в виде суммы коммутаторных одночленов вида $w = c[x_s,x_t]d$, где c, d — мономы, $x_s,x_t \in X$. Поэтому элемент h представи́м в виде суммы коммутаторных одночленов коммутаторной степени m. Но, как мы видели, алгоритм представления коммутаторного одночлена через каноническую базу при работе не понижает коммутаторной степени участвующих в нём коммутаторных одночленов. $\square$

Идеал тождеств алгебры верхнетреугольных матриц порядка m изучался многими авторами с различных точек зрения. Наиболее простое доказательство того, что над полем нулевой характеристики он совпадает с T-идеалом Λ_m, содержится в [3]. Но это доказательство становится ещё более простым, если использовать каноническую базу пространства n-линейных форм.

Предложение 3.3. *Идеал тождеств алгебры верхнетреугольных матриц порядка m над полем нулевой характеристики совпадает с T-идеалом Λ_m.*

Доказательство. Коммутатор любых элементов алгебры верхнетреугольных матриц порядка m лежит в её радикале, индекс нильпотентности которого равен m. Поэтому элементы T-идеала Λ_m являются тождествами этой алгебры. Покажем обратное.

Предположим, от противного, что существует полилинейный элемент $f \in k\langle X\rangle$, не лежащий в Λ_m, но являющийся тождеством алгебры верхнетреугольных матриц порядка m. Согласно предложению 3.2 это означает, что в представлении f через каноническую базу содержится коммутаторный одночлен наименьшей коммутаторной степени $k < m$. Пусть для определённости правильный коммутаторный одночлен

$$u=[x_{i_1},x_{j_{11}},\ldots,x_{j_{1r_1}}][x_{i_2},x_{j_{21}},\ldots,x_{j_{2r_2}}]\ldots[x_{i_k},x_{j_{k1}},\ldots,x_{j_{kr_k}}]x_{t_1}\ldots x_{t_l},\ k<m,$$

входит в запись f с коэффициентом $\alpha \neq 0 \in k$. Выполним следующую специализацию переменных в f:

$$x_{i_1} = e_{12}, \quad x_{j_{1q}} = e_{22}, \quad x_{i_2} = e_{23}, \quad x_{j_{2q}} = e_{33}, \ldots,$$
$$x_{i_k} = e_{k-1,k}, \quad x_{j_{kq}} = e_{kk}; \quad x_{t_q} = E = e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{mm}$$

для всех подходящих q. Эта специализация аннулирует все правильные коммутаторные одночлены из записи f, кроме u, принимающего значение e_{1k}. Таким образом, значение f при этой специализации равно αe_{1k}, противоречие. □

4. Стандартный базис T-идеала Λ_m

Теорема этого раздела является основной целью работы.

Подслова вида $x_i x_j$, $i > j$, в полилинейном мономе назовём *инверсией* (переменных). Две инверсии называются *независимыми*, если они не пересекаются.

Теорема 4.1. *Множество $2m$-линейных полиномов*

$$G = \{g_m^\sigma = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]\,[x_{\sigma(2m-1)}, x_{\sigma(2m)}] \mid$$
$$\sigma \in \mathrm{S}_{2m},\ \sigma(2i-1) > \sigma(2i),\ i = 1, \ldots, m\}$$

образует стандартный базис T-идеала Λ_m.

Доказательство. Доказательство вытекает из следующей серии простых утверждений.

1. Любой полилинейный моном u, содержащий не менее m независимых инверсий переменных, накрывает в смысле упорядоченности $\leqslant_0$ хотя бы один из старших мономов g_m^σ полиномов из G.

Действительно, возможно представление вида

$$u = a_0 x_{i_1} x_{j_1} a_1 \ldots a_{m-1} x_{i_m} x_{j_m} a_m,$$

где a_i — мономы и $i_k > j_k$, $k = 1, \ldots, m$. Тогда существует такая подстановка $\sigma \in \mathrm{S}_{2m}$, что отображение переменных

$$\varphi\colon x_{\sigma(2k-1)} \mapsto x_{i_k},\ x_{\sigma(2m)} \mapsto x_{j_k}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

является изотонным. Следовательно,

$$\bar{g}_m^\sigma = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(2m-1)} x_{\sigma(2m)} \leqslant_0 u.$$

Важный вывод состоит в том, что любой полилинейный моном, содержащий не менее m независимых инверсий переменных, является старшим мономом некоторого полилинейного элемента T-идеала Λ_m.

2. Обозначим через A_n^m количество n-линейных мономов в P_n, содержащих не менее m независимых инверсий переменных, а через B_n^m — количество элементов канонического базиса в P_n, содержащих не менее чем m коммутаторных множителей. Имеет место равенство $A_n^m = B_n^m$.

Сначала составим двухпараметрическое рекуррентное соотношение для вычисления величины A_n^m.

В каждом мономе $u \in P_n$ рассматриваемого типа выделим самую левую инверсию переменных:

$$u = x_{i_1} \dots x_{i_{j-1}} x_{i_{j+1}} \dots x_{i_k} x_{i_j} v,$$

где $i_k > i_j$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, а v — любой $(n-k)$-линейный моном от переменных $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$, содержащий не менее $m-1$ независимых инверсий переменных. Следовательно, искомое рекуррентное соотношение имеет вид

$$A_n^m = \sum_{k=2}^{n-2} (k-1) C_n^k A_{n-k}^{m-1}.$$

Теперь укажем двухпараметрическое рекуррентное соотношение для вычисления величины B_n^m.

Каждый элемент $u \in P_n$ канонического базиса коммутаторной степени не меньше m имеет вид

$$u = [x_{i_k}, x_{i_j}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{j-1}}, x_{i_{j+1}}, \dots, x_{i_{k-1}}] v,$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, а v — правильный коммутаторный одночлен от $n-k$ переменных $\{x_1, \dots, x_m\} \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ коммутаторной степени не меньше $m-1$. Отсюда вытекает искомое рекуррентное соотношение:

$$B_n^m = \sum_{k=2}^{n-2} (k-1) C_n^k B_{n-k}^{m-1}.$$

Таким образом, величины A_n^m и B_n^m удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению, поэтому они равны.

3. Согласно предложению 3.2 размерность пространства n-линейных элементов $\Lambda_m \cap P_n$ T-идеала Λ_m совпадает с B_n^m, а согласно равенству $A_n^m = B_n^m$ старший моном любого элемента пространства $\Lambda_m \cap P_n$ содержит не менее чем m независимых инверсий переменных и потому накрывает один из старших мономов элементов из G. Но это и означает, что G — стандартный базис T-идеала Λ_m. $\square$

Литература

[1] Латышев В. Н. Нематричные многообразия ассоциативных алгебр: Дис.... докт. физ.-мат. наук. — М., 1977.

[2] Латышев В. Н., Сербин Д. С. Стандартный базис T-идеала полиномиальных тождеств алгебры Грассмана // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, № 4 (16). — С. 134—138.

[3] Мальцев Ю. Н. Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц // Алгебра и логика. — 1971. — Т. 10, № 4. — С. 393—400.

[4] Щиголев В. В. Бесконечно базируемые T-пространства и T-идеалы: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — М., 2002.

[5] Latyshev V. N. A general version of standard basis and its application to T-ideals // Acta Appl. Math. — 2005. — Vol. 85. — P. 219—223.

[6] Specht W. Gesetze in Ringen // Math. Z. — 1950. — B. 52. — S. 557—589.