Рекурсивные разложения по цепочке подпространств

А. В. СЛОВЕСНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: alexslovesnov@narod.ru

УДК 517.518.8

Ключевые слова: фреймы в конечномерных пространствах, циркулярная матрица Грама, рекурсивные разложения.

Аннотация

В работе рассматриваются рекурсивные разложения в гильбертовом пространстве $H = L_2[0,1]$. Обсуждаются связанные с этим понятием фреймы в конечномерных пространствах и предлагается конструктивный метод дополнения произвольного базиса до жёсткого фрейма. Построенный алгоритм дополнения применяется к базисам специального вида, матрица Грама которых представляет собой циркулянт. Проводится построение цепочки вложенных подпространств $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$ на основе функции, представимой в виде линейной комбинации своих сжатий и сдвигов. Основным результатом статьи является теорема о равномерной сходимости рекурсивного ряда Фурье по цепочке $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$ для непрерывных функций.

Abstract

A. V. Slovesnov, Recursive expansions with respect to a chain of subspaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 205—226.

In this work, recursive expansions in Hilbert space $H = L_2[0,1]$ are considered. We discuss a related notion of frames in finite-dimensional spaces. We also suggest a constructive approach to extend an arbitrary basis to obtain a tight frame. The algorithm of extending is applied to bases of a special form, whose Gram matrix is circulant. A construction of a chain of nested subspaces $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$ is given, and in its foundation lies an example of a function that can be expressed as a linear combination of its contractions and translations. The main result of the paper is the theorem that provides the uniform convergence of recursive Fourier series with respect to the chain $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$ for continuous functions.

1. Фреймы в конечномерных пространствах

Понятие абстрактного фрейма в гильбертовом пространстве впервые появилось в 1952 году в работе [16] при рассмотрении последовательностей, обладающих равномерной плотностью. В современной литературе многие авторы используют это понятие в основном в теории всплесков в пространствах L_2, основы которой можно найти в [4,12], а также в многочисленных приложениях.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 205—226.

К последним можно отнести работу [17], где, в частности, рассматриваются алгоритмы восстановления сигналов при наличии шума, и книгу [10] по обработке сигналов.

Системы элементов, образующие фрейм, можно рассматривать как в гильбертовых пространствах (сюда мы относим пространства бесконечного числа измерений), так и в конечномерных евклидовых или унитарных пространствах. При этом в обоих случаях одной из главных задач является построение или конструктивное описание фреймов общего вида. В гильбертовых пространствах конструктивный подход в решении этой задачи обеспечивает теорема, истоки которой можно отнести к результатам М. А. Наймарка [11], полученными ещё до появления работы [16]. Согласно этой теореме любой жёсткий фрейм можно понимать как образ ортонормированного базиса при ортогональном проектировании на подпространство. Аналогичное описание произвольных фреймов, но с использованием базисов Рисса, можно найти в [7]. Если говорить о фреймах в конечномерных пространствах, то здесь можно отметить работу [5] и монографию [15]. В первой из них, в частности, представлены необходимые и достаточные условия для системы векторов, при которых она является фреймом, а также показано существование равномерных (состоящих из векторов одинаковой длины) фреймов Парсеваля произвольных объёмов.

В этом разделе мы опишем конструктивный метод дополнения произвольного базиса до фрейма, основанный на результатах, аналогичных приведённым в [5], а также рассмотрим вопрос об объёме фреймов, полученных таким образом.

Прежде чем переходить к конечномерному случаю, дадим общие определения. Пусть H — гильбертово пространство над полем действительных или комплексных чисел. Система

$$\Phi = \{\varphi_k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

элементов этого пространства называется *фреймом*, если существуют такие положительные числа $B \geqslant A > 0$, что для любого вектора $x \in H$ выполнено неравенство

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi_k, x)|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

Указанные числа A и B называются соответственно нижней и верхней *границами фрейма*, а их отношение $k(\Phi) = B/A$ — *коэффициентом обусловленности*. При $k(\Phi) = 1$ фрейм называется *жёстким*, а, в частности, при $A = B = 1$ — *фреймом Парсеваля*. Нас будут интересовать жёсткие фреймы в конечномерных евклидовых пространствах, для которых мы определим ещё одну характеристику: следуя [5], количество векторов, составляющих фрейм, будем называть *объёмом*.

При работе с жёсткими фреймами нам понадобится их эквивалентное определение, которое в литературе иногда называется свойством разложимости. Пусть V — n-мерное евклидово пространство. Система ненулевых векторов

$$\Phi = \{v_k,\ k = 1, \ldots, l\}$$

из V образует жёсткий фрейм с границей $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, если для любого вектора $v \in V$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{l} (v, v_k) v_k = \lambda \cdot v. \tag{1}$$

Стоит отметить, что аналогичное свойство справедливо и для гильбертовых пространств. Поскольку разложение (1) справедливо для любого вектора $v \in V$, то фрейм как система векторов имеет ранг n, откуда следует неравенство для объёма $l \geqslant n$. Нетрудно заметить, что равенство $l = n$ возможно лишь в том случае, когда система Φ состоит из ортогональных векторов одинаковой длины $\sqrt{\lambda}$, — для этого в равенстве (1) достаточно положить $v = v_k$ и использовать единственность разложения по базису. Таким образом, равенство $l = n$ отвечает весьма частному случаю фрейма, а общий случай соответствует неравенству $l > n$.

Согласно вышесказанному, в любом фрейме можно выделить подсистему векторов, образующих базис пространства V. Ниже нам потребуется решение в некотором смысле обратной задачи, а именно мы опишем способ, позволяющий дополнить произвольный базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ системой векторов $\{\psi_s\}_{s=1}^{m}$ таким образом, чтобы вся совокупность

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m\}$$

образовывала жёсткий фрейм.

Итак, зафиксируем некоторый базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ и рассмотрим произвольную систему векторов $\{\psi_s\}_{s=1}^{m}$, $m \geqslant 1$. Обозначим буквой A матрицу размера $n \times m$, $A = \{a_i^j\}$, столбцы которой — коэффициенты разложения векторов $\{\psi_s\}_{s=1}^{m}$ по базису $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $G = \{g_i^j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ — матрица Грама для базиса $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$, $g_i^j = (\varphi_i, \varphi_j)$. Тогда система*

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m\}$$

образует жёсткий фрейм с границей λ тогда и только тогда, когда матрицы A и G удовлетворяют уравнению

$$(A \cdot A^{\mathrm{T}} + E) \cdot G = \lambda \cdot E \iff A \cdot A^{\mathrm{T}} = \lambda \cdot G^{-1} - E, \tag{2}$$

где A^{T} — транспонированная матрица A.

Доказательство. Для доказательства обратимся к формуле (1) и заметим, что она линейна по v. Следовательно, разложение (1) справедливо для любого вектора $v \in V$ тогда и только тогда, когда оно имеет место для каждого из базисных векторов. Подставив в эту формулу $v = \varphi_r$, получим

$$\lambda \cdot \varphi_r = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_r, \varphi_k) \varphi_k + \sum_{s=1}^{m} (\varphi_r, \psi_s) \psi_s, \quad r = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Используя определение матриц A и G, а также линейность скалярного произведения, правую часть этого уравнения можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}(\varphi_r,\varphi_k)\varphi_k+\sum_{s=1}^{m}(\varphi_r,\psi_s)\psi_s=\sum_{k=1}^{n}g_r^k\varphi_k+\sum_{s=1}^{m}\left(\varphi_r,\sum_{p=1}^{n}a_p^s\varphi_p\right)\psi_s=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}g_r^k\varphi_k+\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{p=1}^{n}a_p^s\cdot g_r^p\right)\psi_s=\sum_{k=1}^{n}g_r^k\varphi_k+\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{p=1}^{n}a_p^s\cdot g_r^p\right)\left(\sum_{q=1}^{n}a_q^s\varphi_q\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}g_r^k\varphi_k+\sum_{q=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{m}a_q^s\cdot\sum_{p=1}^{n}a_p^sg_r^p\right)\cdot\varphi_q=\sum_{k=1}^{n}\left(g_r^k+\sum_{s=1}^{m}a_k^s\cdot\sum_{p=1}^{n}a_p^sg_r^p\right)\cdot\varphi_k.$$

Так как векторы $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ образуют базис, то система уравнений (3) эквивалентна системе

$$g_r^k+\sum_{s=1}^{m}a_k^s\cdot\sum_{p=1}^{n}a_p^sg_r^p=\lambda\delta_r^k,\quad r,k=1,\dots,n,$$

где δ_r^k — символ Кронекера. Учитывая симметричность матриц G и E, индексы k и r элементов g_r^k и δ_r^k можно поменять местами. В результате имеем

$$g_k^r+\sum_{s=1}^{m}a_k^s\cdot\sum_{p=1}^{n}a_p^sg_r^p=\lambda\delta_k^r,\quad r,k=1,\dots,n.$$

Записывая последнюю систему в матричной форме, получаем утверждение леммы. □

Замечание 1. Матричное уравнение (2) даже при фиксированной границе λ может иметь более одного решения. Чтобы это увидеть, можно рассмотреть следующий пример. Пусть $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ — ортонормированный базис пространства V, а система $\{v_1,\dots,v_l\}$, $l>n$, образует жёсткий фрейм с границей μ. Тогда базис E можно дополнить до жёсткого фрейма с границей $\lambda=\mu+1$ как минимум двумя различными способами:

1) $\{e_1,\dots,e_n,v_1,\dots,v_l\}$,
2) $\{e_1,\dots,e_n,\sqrt{\mu}e_1,\dots,\sqrt{\mu}e_n\}$.

Единственность можно гарантировать, например, для базиса с матрицей Грама $G=\lambda E$. В этом случае лишь нулевая матрица $A=0$ будет удовлетворять уравнению (2).

С помощью леммы 1 можно получить способ построения фреймов в конечномерных пространствах. Мы сформулируем его в виде теоремы, доказав её конструктивно.

Теорема 1. *Любой базис $\Phi=\{\varphi_k,\ k=1,\dots,n\}$ конечномерного пространства V можно дополнить до жёсткого фрейма с некоторой границей $\lambda>0$, добавив к нему систему $\Psi=\{\psi_k,\ k=1,\dots,n\}$, состоящую из такого же числа векторов.*

Доказательство. Для доказательства теоремы построим в явном виде матрицу A, которая будет удовлетворять уравнению (2). Поскольку матрица Грама G системы $\Phi = \{\varphi_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ симметрическая, невырожденная и положительно определённая, то все её собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ вещественны и положительны. Кроме этого, в пространстве V существует ортонормированный базис $E = \{e_k,\ k = 1, \ldots, n\}$, состоящий из собственных векторов матрицы G. Если буквой C обозначить матрицу перехода от базиса Φ к базису E, то произведение $C^{-1}GC$ будет диагональной матрицей $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Зафиксируем некоторое число λ, большее любого из собственных чисел: $\lambda > \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$. Определим матрицу A по формуле

$$A = C\sqrt{T}, \quad T = \operatorname{diag}(\lambda/\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda/\lambda_n - 1),$$

и покажем, что она будет решением уравнения (2). Для этого преобразуем произведение $A \cdot A^{\mathrm{T}}$, используя ортогональность матрицы C:

$$A \cdot A^{\mathrm{T}} = \big(C\sqrt{T}\big) \cdot \big(C\sqrt{T}\big)^{\mathrm{T}} = CTC^{\mathrm{T}} = CTC^{-1}.$$

Вспоминая определение матрицы T, имеем

$$CTC^{-1} = C(\lambda D^{-1} - E)C^{-1} = \lambda(CDC^{-1})^{-1} - E = \lambda G^{-1} - E,$$

что и требовалось. Теорема доказана. □

Итак, алгоритм построения жёстких фреймов описан, и мы переходим к обсуждению объёмов систем, полученных таким образом. Поскольку, как уже отмечалось, существуют фреймы Парсеваля произвольного объёма, никаких ограничений на матрицу решения уравнения (2) в общем случае нет. Однако при доказательстве теоремы 1 мы выбирали границу фрейма λ с условием $\lambda > \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$, что приводит к увеличению объёма системы как минимум вдвое.

Лемма 2. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы Грама G базиса $\Phi = \{\varphi_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Тогда объём фрейма, полученного дополнением базиса Φ, с границей λ, подчиняющейся условию $\lambda > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$, не меньше чем $2n$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\lambda G^{-1} - E$ из уравнения (2) и докажем, что её ранг равен n. Для этого вычислим её определитель, воспользовавшись определением характеристического многочлена матрицы G:

$$\det(\lambda \cdot G^{-1} - E) = \det(G^{-1}) \cdot \det(\lambda E - G) = \det(G^{-1}) \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n).$$

Принимая во внимание условие $\lambda > \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$, получаем, что $\det(\lambda \cdot G^{-1} - E) \neq 0$, или $\operatorname{rk}(\lambda \cdot G^{-1} - E) = n$. Так как ранг произведения матриц не превышает ранга каждого из сомножителей, из уравнения (2) выводим

$$n = \operatorname{rk}(\lambda \cdot G^{-1} - E) = \operatorname{rk}(AA^{\mathrm{T}}) \leqslant \operatorname{rk} A \leqslant m.$$

Следовательно, объём фрейма, равный $m+n$, не меньше чем $2n$. Лемма доказана. □

Результат, полученный в лемме 2, любопытно сопоставить с двумя примерами известных фреймов.

Пример 1. Рассмотрим в качестве пространства V плоскость $\mathbb{R}^2$ и на ней систему $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, состоящую из трёх единичных векторов, где каждый последующий получен из предыдущего вращением на угол $2\pi/3$:

$$\varphi_1 = \bigl(\sqrt{3}/2,\, -1/2\bigr), \quad \varphi_2 = (0,\, 1), \quad \varphi_3 = \bigl(-\sqrt{3}/2,\, -1/2\bigr).$$

Нетрудно проверить, что система Φ образует жёсткий фрейм с границей $\lambda = 3/2$, равной отношению объёма фрейма к размерности пространства V. Если векторы φ_1 и φ_3 считать в этой тройке базисными, а вектор φ_2 — дополняющим этот базис до фрейма, то матрицы G и A из уравнения (2) окажутся равными

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь, в отличие от леммы 2, количество дополняющих векторов на единицу меньше размерности пространства, а граница фрейма λ совпадает с одним из собственных чисел матрицы G: $\lambda_1 = 1/2$ и $\lambda_2 = 3/2$. Если же выбрать границу, подчиняющуюся условию леммы 2, например $\lambda = 9/2$, то дополнительными векторами согласно теореме 1 будут выступать

$$\psi_1 = 2(\varphi_1 + \varphi_2) = (0, -2), \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = (\sqrt{3}, 0).$$

Пример 2. Существует также многомерный аналог системы, описанный выше. В [6] дано описание жёсткого фрейма в n-мерном евклидовом пространстве V, содержащего $n+1$ векторов и названного фреймом «Мерседес-Бенц». Такое название объясняется расположением концов входящих в систему векторов, которые образуют вершины n-мерного симплекса. Граница этого фрейма также равна отношению объёма фрейма к размерности пространства и составляет $\lambda = (n+1)/n$. По аналогии с примером 1 можно сформировать базис из первых n векторов, а оставшийся один вектор выбрать дополняющим. Матрицы G и A в этом случае примут вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1/n & -1/n & \dots & -1/n \\ -1/n & 1 & -1/n & \dots & -1/n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1/n & -1/n & \dots & -1/n & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что граница фрейма в этом примере также совпадает с одним из двух собственных значений $\lambda_1 = 1/n$ и $\lambda_2 = (n+1)/n$, причём кратность последнего равна $n-1$.

2. Базисы с циркулярной матрицей Грама

В дальнейшем нам потребуются фреймы, полученные пополнением базиса евклидова пространства размерности n, матрица Грама которого имеет вид

$$G=\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots & 0 & b \\ b & a & b & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 \dots\dots\dots\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots\dots\dots & 0 & b & a & b \\ b & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots & 0 & b & a \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матрица такого вида является частным случаем *циркулянта*, в котором все строки получаются из первой строки циклическим сдвигом. Следуя [1], квадратную матрицу M мы назовём циркулянтом, если она имеет вид

$$M=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Случай $n=2$ представляется тривиальным, и мы его не рассматриваем. В последующих выкладках мы будем считать, что $n \geqslant 3$. В [1] также показано, что собственные числа таких матриц и соответствующие им собственные векторы вычисляются по формулам

$$\lambda_j = c_0 + c_1 r_j + \ldots + c_{n-1} r_j^{n-1}, \quad v_j = (1, r_j, \ldots, r_j^{n-1}), \quad j = 0, \ldots, n-1, \tag{6}$$

где набор $\{r_0, \ldots, r_{n-1}\}$ — это решение уравнения $r^n = 1$ в комплексных числах. Подставив

$$c_0 = a, \quad c_1 = b, \quad c_2 = \ldots = c_{n-2} = 0, \quad c_{n-1} = b$$

в выражение (6) для собственных чисел, получим

$$\lambda_j = a + br_j + br_j^{n-1} = a + br_j + b\bar{r}_j = a + 2b\cos\alpha_j, \quad \alpha_j = \frac{2\pi j}{n}, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

Нетрудно заметить, что $\lambda_j = \lambda_{n-j}$ для $j = 1, \ldots, [(n-1)/2]$, поэтому собственные числа λ_j, $j = 1, \ldots, [(n-1)/2]$, имеют кратность 2. Таким образом, при нечётных n набор $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_{(n-1)/2}\}$ включает в себя все собственные числа, а при чётных к нему следует добавить $\lambda_{n/2} = a - 2b$.

Перейдём к нахождению собственных векторов. Для $\lambda_0 = a + 2b$ и $\lambda_{n/2} = a - 2b$ (при чётных n) они вычисляются совсем просто и равны соответственно $v_0 = (1, \ldots, 1)$ и $v_{n/2} = (1, -1, \ldots, 1, -1)$. Для чисел λ_j, $j = 1, \ldots, [(n-1)/2]$, векторы v_j, выписанные в формуле (6), являются комплексными, поэтому вещественные собственные векторы получаются из них выделением вещественной и мнимой частей: $v_{j,1} = \operatorname{Re} v_j$ и $v_{j,2} = \operatorname{Im} v_j$. При этом выполняются соотношения

$$\begin{cases} v_{j,1} = (1, \cos\alpha_j, \ldots, \cos(n-1)\alpha_j) = v_{n-j,1}, \\ v_{j,2} = (0, \sin\alpha_j, \ldots, \sin(n-1)\alpha_j) = -v_{n-j,1}, \end{cases} \quad j = 1, \ldots, [(n-1)/2]. \tag{7}$$

Покажем, что векторы $v_{j,1}$ и $v_{j,2}$, $j = 1, \ldots, [(n-1)/2]$, соответствующие одному собственному значению, ортогональны, а их длины равны и составляют $v_{j,1}^2 = v_{j,2}^2 = n/2$:

$$
\begin{aligned}
1)\ \ v_{j,1}^2 &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \cos^2 k\alpha_j = 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \cos 2k\alpha_j = \\
&= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2\sin\alpha_j}\sum_{k=1}^{n-1} \cos 2k\alpha_j \sin\alpha_j = \\
&= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4\sin\alpha_j}\sum_{k=1}^{n-1} (\sin(2k+1)\alpha_j - \sin(2k-1)\alpha_j) = \\
&= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4\sin\alpha_j}(\sin(2n-1)\alpha_j - \sin\alpha_j) = \\
&= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4\sin\alpha_j}(-2\sin\alpha_j) = n/2;
\end{aligned}
$$

$$
2)\ \ v_{j,1}^2 + v_{j,2}^2 = n \implies v_{j,2}^2 = n - v_{j,1}^2 = n/2;
$$

$$
3)\ \ (v_{j,1}, v_{j,2}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\alpha_j = \frac{1}{4\sin\alpha_j}\sum_{k=1}^{n-1} (\cos(2k-1)\alpha_j - \cos(2k+1)\alpha_j) = 0.
$$

Следовательно, векторы v_0, $v_{j,1}$ и $v_{j,2}$, $j = 1, \ldots, [(n-1)/2]$, а также $v_{n/2}$ (при чётных n) при соответствующей нормировке образуют ортогональную матрицу. Здесь, для полноты дальнейшего изложения, было бы уместным сделать следующие замечания.

Замечание 2. Все собственные числа матрицы G вида (4) при любой размерности пространства лежат на отрезке $[a - 2|b|, a + 2|b|]$. Таким образом, выбрав произвольное число $\lambda > a + 2|b|$, мы можем воспользоваться теоремой 1 и дополнить базис с матрицей Грама G до жёсткого фрейма с границей λ. При этом коэффициенты дополняющих векторов в этом базисе совпадают с точностью до соответствующего множителя с компонентами указанных выше собственных векторов.

Замечание 3. Полученные здесь результаты мы будем использовать при рассмотрении конечномерных подпространств V^n гильбертова пространства $L_2[0,1]$, натянутых на систему функций с матрицей Грама G вида (4). В каждом подпространстве нам потребуется фрейм Парсеваля, который мы построим в соответствии с теоремой 1. При этом базисные функции по построению будут образовывать разбиение единицы и обладать свойством локализации: носитель каждой из них будет представлять собой отрезок длины d_n с условием $d_n \to 0$, $n \to \infty$. Как видно из формул (7), дополняющие функции подобной локализацией не обладают.

При изучении рекурсивных разложений нам потребуются две леммы, касающиеся матриц, обратных к циркулянтам (4).

Лемма 3. *Пусть матрица G размера $n \times n$, $n \geqslant 3$, имеет вид (4), где числа a и b подчиняются условию $a > 2|b|$. Тогда элементы её обратной матрицы $P = G^{-1} = \{p_i^k,\ 1 \leqslant i, k \leqslant n\}$ удовлетворяют неравенству*

$$|p_i^k| \leqslant C_1,$$

где величина C_1 не зависит от i, k, n, т. е. является абсолютной постоянной.

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|_m$ — операторная норма матриц размера $n \times n$ относительно евклидовой векторной нормы $\|\cdot\|_v$:

$$\|A\|_m = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{\|x\|_v = 1} \|Ax\|_v.$$

Если числа $\{\mu_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ — собственные значения матрицы P, то имеют место соотношения

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant n} \mu_k \leqslant \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mu_k, \quad \|P\|_m = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mu_k.$$

Как отмечалось выше, собственные числа матрицы G $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, лежат на отрезке $[a - 2|b|, a + 2|b|]$, поэтому

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \mu_k \leqslant \frac{1}{a - 2|b|} =: C_1,$$

т. е.

$$\|P\|_m \leqslant C_1. \tag{8}$$

С другой стороны, для элементов матрицы P справедливо неравенство

$$|p_i^k| \leqslant \|(p_1^k \ldots p_n^k\|_v = \|Pw_k\|_v \leqslant \|P\|_m, \tag{9}$$

где вектор w_k имеет одну ненулевую компоненту, равную 1, расположенную на k-м месте. Объединяя неравенства (8) и (9), получаем требуемую оценку. Лемма доказана. □

В лемме 3 мы получили равномерную по n оценку сверху модуля каждого элемента матрицы G^{-1}. Ниже мы покажем, что при дополнительных ограничениях на числа a и b имеют место более сильные неравенства.

Лемма 4. *Пусть матрица G размера $n \times n$, $n \geqslant 3$, имеет вид (4), где числа a и b подчиняются условиям $a > 0$, $b > 0$ и $r := a/b > 2$. Тогда элементы обратной к G матрицы $P = G^{-1} = \{p_i^k,\ 1 \leqslant i, k \leqslant n\}$ удовлетворяют неравенству*

$$\sum_{k=1}^{n} |p_i^k| \leqslant C_2,$$

где величина C_2 не зависит от i и n, т. е. является абсолютной постоянной.

Доказательство. Заметим, что матрица P, будучи обратной к циркулянту G, сама является циркулянтом. Это можно увидеть, например, из равенства

$P\cdot G = E$, записанного поэлементно. Отсюда следует, что доказательство леммы достаточно провести только для индекса $i = 1$.

Выпишем скалярные уравнения, соответствующие равенству $P \cdot G = E$, содержащие элементы первой строки матрицы P:

$$\begin{cases} ap_1^1 + bp_1^2 + bp_1^n = 1, \\ bp_1^1 + ap_1^2 + bp_1^3 = 0, \\ \quad \vdots \\ bp_1^{n-2} + ap_1^{n-1} + bp_1^n = 0, \\ bp_1^1 + bp_1^{n-1} + ap_1^n = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Уравнения с номерами $2, \ldots, n-1$ являются однородными, поэтому мы можем переписать их в виде рекуррентных соотношений:

$$p_1^k = -rp_1^{k-1} - p_1^{k-2}, \quad k = 3, \ldots, n.$$

Чтобы решить эти уравнения в явном виде, запишем их в матричной форме

$$\begin{pmatrix} p_1^k \\ p_1^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{k-1} \\ p_1^{k-2} \end{pmatrix} \tag{11}$$

и сведём задачу к возведению соответствующей матрицы в степень:

$$\begin{pmatrix} p_1^k \\ p_1^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-2} \begin{pmatrix} p_1^2 \\ p_1^1 \end{pmatrix}, \quad k = 3, \ldots, n.$$

Для удобства определим величину $q := (r + \sqrt{r^2 - 4})/2$, удовлетворяющую, согласно условиям леммы, неравенству $q > 1$. Имеет место разложение

$$\begin{pmatrix} -r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C\Lambda C^{-1}, \quad C := \begin{pmatrix} q & -1 \\ 1 & -q \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix},$$

с помощью которого можно вычислить решение уравнения (11):

$$\begin{pmatrix} p_1^k \\ p_1^{k-1} \end{pmatrix} = C\Lambda^{k-2}C^{-1} = \\ = \frac{(-1)^k}{q - q^{-1}} \begin{pmatrix} q^{k-1} - q^{-(k-1)} & q^{k-2} - q^{-(k-2)} \\ -\bigl(q^{k-2} - q^{-(k-2)}\bigr) & -\bigl(q^{k-3} - q^{-(k-3)}\bigr) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^2 \\ p_1^1 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$p_1^k = \frac{(-1)^k}{q - q^{-1}} \bigl(q^{k-2}(qp_1^2 + p_1^1) - q^{-(k-1)}(p_1^2 + qp_1^1)\bigr), \quad k = 3, \ldots, n. \tag{12}$$

Прямыми вычислениями можно проверить, что формула (12) остаётся верной и при $k = 1$, $k = 2$.

Теперь оценим сумму модулей полученных элементов сверху:

$$\sum_{k=1}^{n}|p_1^k| \leqslant \frac{|qp_1^2+p_1^1|}{q-q^{-1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}q^{k-2}+\frac{|p_1^2+qp_1^1|}{q-q^{-1}}\cdot\sum_{k=1}^{n}q^{-(k-1)}=$$

$$=|qp_1^2+p_1^1|\cdot\frac{(q^n-1)}{(q^2-1)(q-1)}+|p_1^2+qp_1^1|\cdot\frac{1-q^{-n}}{(q-q^{-1})(1-q^{-1})}. \quad (13)$$

По лемме 3 второе слагаемое ограничено сверху равномерно по n. Для оценки первого найдём $|p_1^1+qp_1^2|$ в явном виде. Подставив в последнее уравнение системы (10) формулы (12) для p_1^{n-1} и p_1^n и выразив p_1^2 через p_1^1, получим

$$qp_1^2+p_1^1=\frac{p_1^1\cdot(q^2-1)(q^{-n}+(-1)^{n-1}q^{-1})}{q^n-q^{-n}}.$$

Опять используя лемму 3, заключаем, что модуль числителя полученной дроби равномерно по n ограничен сверху, а знаменатель можно оценить снизу величиной $1/2\cdot q^n$. Это позволяет равномерно по n оценить первое слагаемое в (13), что и требовалось. Лемма доказана. □

3. Рекурсивное разложение по цепочке подпространств

В классической и современной литературе существует множество работ, в которых обсуждаются ортогональные системы функций в гильбертовых пространствах и разложения по ним. В работе [8] предлагается обобщение таких разложений с сохранением основных свойств (тождество Бесселя, неравенство Бесселя, эквивалентность равенства Парсеваля и сходимости разложения). В отличие от классического определения, здесь очередной коэффициент Фурье зависит от предыдущих, а сам процесс разложения строится рекурсивным образом. При таком подходе существует две принципиально разные возможности: система разложения либо фиксируется, либо меняется во время разложения в зависимости от результатов, полученных на предыдущих шагах. Первый случай представлен в работах [3, 9], а второй, к которому, в частности, относятся так называемые «жадные алгоритмы», исследуется в статьях [2, 18]. Стоит также отметить, что, возможно, впервые рекурсивный процесс разложения был рассмотрен в работе [14].

В этом разделе мы рассмотрим пример рекурсивного разложения элементов гильбертова пространства $L_2[0,1]$ по цепочке вложенных подпространств, определения и обозначения для которого заимствованы из работы [9].

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над полем действительных или комплексных чисел с выделенной системой замкнутых подпространств $\{H^n\}_{n=1}^{\infty}$, $H^n\subset H$. Зафиксируем в каждом подпространстве H^n конечную или счётную ортоподобную систему (или, что то же самое, фрейм Парсеваля) $\Phi^n = \{\varphi_k^n,\ k = 1,\ldots,K^n\}$, где K^n — конечное число или ∞. Рассмотрим произвольный элемент $f \in H$ и определим для него рекурсивное разложение по цепочке подпространств $\{H^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 1 [9]. Рекурсивное разложение элемента $f \in H$ определяется следующим образом:

1) пусть нулевой остаток приближения равен $r^0 := f$;
2) если задан остаток приближения r^{n-1}, то полагаем

$$\hat{f}_k^n := (r^{n-1}, \varphi_k^n), \quad k = 1,\ldots,K^n, \quad r^n := r^{n-1} - \sum_{k=1}^{K^n} \hat{f}_k^n \varphi_k^n.$$

При этом числа $\hat{f}_k^n$ называются *рекурсивными коэффициентами Фурье*, а выражения вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K^n} \hat{f}_k^n \varphi_k^n, \quad S^N = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K^n} \hat{f}_k^n \varphi_k^n = f - r^N -$$

рекурсивным рядом Фурье и его частичными суммами соответственно.

Перечислим основные свойства, справедливые для рекурсивных разложений по цепочке пространств (см. [9]).

1. Для любого элемента $f \in H$ и любого натурального n выполняется аналог известного тождества Бесселя

$$\|r^N\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K^n} |\hat{f}_k^n|^2.$$

2. Для любого элемента $f \in H$ справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K^n} |\hat{f}_k^n|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

3. Сумма рекурсивного ряда Фурье элемента f совпадает с f в том и только в том случае, когда выполняется аналог равенства Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K^n} |\hat{f}_k^n|^2 = \|f\|^2.$$

Если говорить геометрическим языком, то очередной шаг рекурсивного разложения, скажем с номером n, есть не что иное, как ортогональная проекции остатка r^{n-1} на ортогональное дополнение к подпространству H^n: $r^n = (I - D^n)r^{n-1}$, где I — тождественный оператор, а D^n — оператор ортогонального проектирования на H^n. Такое понимание рекурсивного разложения оказывается полезным при рассмотрении цепочки вложенных подпространств, когда для любого натурального n выполняется соотношение $H^n \subset H^{n+1}$. В этом случае формулы для остатков приближения и частичных сумм рекурсивного ряда Фурье значительно упрощаются и имеют вид

$$r^n = (I - D^n)f, \quad S^n = D^n f = \sum_{k=1}^{K^n} (f, \varphi_k^n)\varphi_k^n.$$

Отсюда, в частности, видно, что при дополнительном условии $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H^n} = H$ остаток приближения r^n будет стремиться к нулю, или, другими словами, рекурсивный ряд Фурье произвольного $f \in H$ будет сходиться (по норме пространства H) к разлагаемому элементу. Ниже мы рассмотрим пространство $H = L_2[0,1]$ и в нём построим цепочку конечномерных подпространств, которая удовлетворяет всем перечисленным требованиям и обладает дополнительным свойством: рекурсивный ряд Фурье для непрерывных функций сходится к разлагаемому элементу по норме $C[0,1]$.

При построении указанной цепочки подпространств, основным свойством которых является вложенность, нам потребуется функция $g^0(x)$ класса $C[-1,1]$, представимая в виде линейной комбинации своих сжатий и сдвигов. Разбив отрезок $[-1,1]$ на три равные части, определим $g^0(x)$ следующим образом. На среднем участке $[-1/3, 1/3]$ положим $g^0(x) \equiv 1$, а на крайних участках $[-1,-1/3]$ и $[1/3,1]$ построим две канторовы лестницы, восходящую и нисходящую соответственно (рис. 1). В результате получится неотрицательная, непрерывная, кусочно-монотонная функция, для которой справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$g^0(x) = \frac{1}{2}g_1^1(x) + g_2^1(x) + g_3^1(x) + \frac{1}{2}g_4^1(x) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot g^0\left(3\left(x+\frac{2}{3}\right)\right) + g^0\left(3\left(x+\frac{2}{9}\right)\right) + g^0\left(3\left(x-\frac{2}{9}\right)\right) + \frac{1}{2}\cdot g^0\left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right). \tag{14}$$

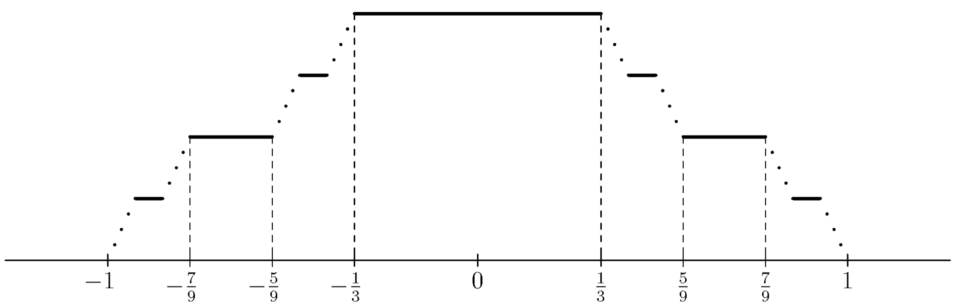

Рис. 1

Доказательство. Нетрудно заметить, что это равенство выполняется на среднем участке $[-1/3, 1/3]$. Действительно, на отрезках $[-1/3, -1/9]$ и $[1/9, 1/3]$ все слагаемые, за исключением одного ($g_2^1(x)$ и $g_3^1(x)$ соответственно), равного тождественной единице, обращаются в ноль, а на отрезке $[-1/9, 1/9]$ складываются две канторовы лестницы, также дающие в сумме тождественную единицу. Таким образом, с учётом симметрии формулы (14) относительно $x = 0$ и чётности функции $g^0(x)$ доказательство леммы достаточно провести для одного из крайних участков: $[-1, -1/3]$ или $[1/3, 1]$. Рассмотрим первый из них. Здесь равенство (14) содержит лишь два отличных от нуля слагаемых и имеет вид

$$g^0(x) = \frac{1}{2}g_1^1(x) + g_2^1(x). \tag{15}$$

На отрезке $[-7/9, -5/9]$, где $g_1^1(x) \equiv 1$ и $g_2^1(x) \equiv 0$, а также в концевых точках $x = -1$ и $x = -1/3$ эта формула сомнений не вызывает, поэтому рассмотрения требуют лишь отрезки $[-1, -7/9]$ и $[-5/9, -1/3]$. На них все участвующие в равенстве (15) функции — канторовы лестницы с совпадающими участками постоянства. Так как значение каждой канторовой лестницы на участке постоянства линейно выражается через значения на концах одного из отрезков $[-1, -7/9]$ и $[-5/9, -1/3]$, то на каждом таком участке равенство (15) выполняется. Во всех остальных точках оно справедливо по непрерывности. Лемма доказана. $\square$

Замечание 4. Согласно определению функции $g^0(x)$ длина основного участка, где $g^0(x) \equiv 1$, совпадает с длинами промежуточных участков, на которых построены канторовы лестницы. Покажем, что на самом деле длину промежуточных участков можно сделать сколь угодно малой по сравнению с длиной основного. Для этого зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$, разобьём отрезок $[-1, 1]$ на три части I_1, I_2, I_3 с длинами $2/(k+2)$, $2k/(k+2)$ и $2/(k+2)$ соответственно и определим функцию $\tilde{g}^0(x)$ следующим образом. На основном участке I_2 положим $\tilde{g}^0(x) \equiv 1$, а на промежуточных I_1 и I_3 достроим две канторовы лестницы, для которых построение проводится по такому же принципу: каждый раз соответствующий отрезок разбивается на три части с длинами, относящимися как $1 : k : 1$. Функция $\tilde{g}^0(x)$ раскладывается в линейную комбинацию своих сжатий (с коэффициентом $k + 2$) и сдвигов

$$\tilde{g}^0(x) = \frac{1}{2}\tilde{g}_1^1(x) + \tilde{g}_2^1 + \ldots + \tilde{g}_{l-1}^1(x)(x) + \frac{1}{2}\tilde{g}_l^1(x), \quad l = k + 3,$$

при этом отношение длин основного и промежуточного участков равно k.

Лемма 5 позволяет построить цепочку вложенных подпространств

$$V^1 \subset V^2 \subset \ldots \subset V^{n-1} \subset V^n \subset \ldots$$

пространства $H = L_2[0, 1]$. Для этого рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ две 1-периодические функции, $f_1^0(x)$ и $f_2^0(x)$, каждая из которых получается из $g^0(x)$ сжатием с коэффициентом $8/3$ и сдвигом на $1/6$ и $2/3$ соответственно с последующим продолжением по периодичности (рис. 2). При этом отрезок $[0, 1]$ мы

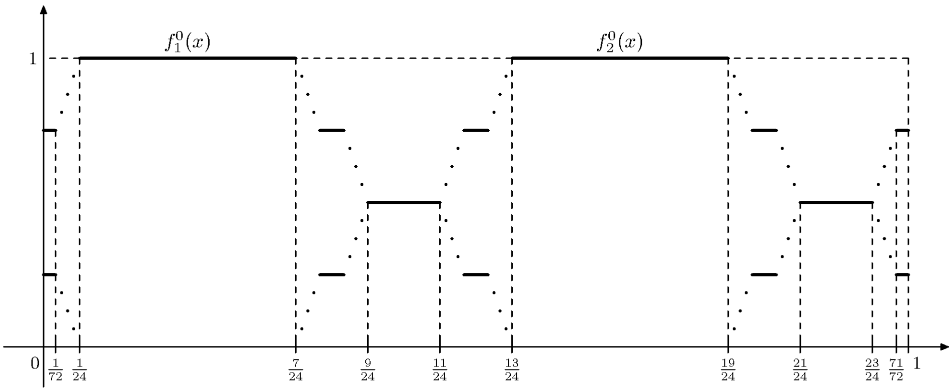

Рис. 2

разобьём на четыре равных по длине участка:

$$I_1^0=\left[\frac{1}{24},\frac{7}{24}\right],\quad I_2^0=\left[\frac{7}{24},\frac{13}{24}\right],\quad I_3^0=\left[\frac{13}{24},\frac{19}{24}\right],\quad I_4^0=\left[\frac{19}{24},1\right]\cup\left[0,\frac{1}{24}\right].$$

На первом и третьем участках, которые мы будем называть *основными*, одна из функций совпадает с тождественной единицей, а вторая обращается в ноль. Второй и четвёртый участки, которые мы назовём *промежуточными*, представляют собой пересечения носителей $f_1^0(x)$ и $f_2^0(x)$, и на каждом из них располагаются две канторовы лестницы. Отметим, что функции $f_1^0(x)$ и $f_2^0(x)$ подобраны так, чтобы выполнялось равенство $f_1^0(x)+f_2^0(x)\equiv 1$.

В качестве подпространства V^0 выберем линейную оболочку функций f_1^0 и f_2^0 в пространстве H:

$$V^0:=\operatorname{span}\langle f_1^0,f_2^0\rangle.$$

Последующие подпространства $V^1,V^2,\ldots,V^n,\ldots$ будем строить по индукции. По лемме 5 функции $f_1^0(x)$ и $f_2^0(x)$ раскладываются в линейную комбинацию четырёх своих «копий», полученных сжатием и сдвигом (и, возможно, продолжением по периодичности). При этом первая из функций, участвующая в разложении $f_1^0(x)$, совпадает с последней функцией из разложения $f_2^0(x)$ и наоборот. Таким образом, выписав формулы для $f_1^0(x)$ и $f_2^0(x)$, аналогичные (14), мы получим не восемь, а шесть новых 1-периодических функций $f_1^1(x),f_2^1(x),\ldots,f_6^1(x)$, которые мы примем за базис подпространства V^1:

$$V^1:=\operatorname{span}\langle f_1^1,\ldots,f_6^1\rangle.$$

Носители указанных базисных функций порождают естественное разбиение отрезка $[0,1]$ на 12 чередующихся участков, 6 из которых мы по аналогии с описанием пространства V^0 назовём основными и 6 — промежуточными. Основной участок — это подмножество отрезка $[0,1]$, на котором лишь одна из функций совпадает с тождественной единицей, а остальные обращаются в ноль. Промежуточный участок, будучи пересечением носителей двух соседних базисных функций, является основанием двух канторовых лестниц. Отметим также, что набор функций $f_1^1(x), f_2^1(x), \ldots, f_6^1(x)$ образует на отрезке $[-1, 1]$ разбиение единицы:

$$f_1^1(x) + \ldots + f_6^1(x) = f_1^0(x) + f_2^0(x) \equiv 1.$$

Продолжив по индукции эту процедуру, на шаге с номером n мы получим подпространство V^n размерности $\dim(V^n) = 2 \cdot 3^n$, порождённое базисными функциями $f_1^n, f_2^n, \ldots, f_{2\cdot 3^n}^n$. Отрезок $[0, 1]$ при этом разбивается на чередующиеся основные и промежуточные участки в количестве $4 \cdot 3^n$, для которых мы введём специальные обозначения: k-й основной участок мы будем обозначать I_{2k-1}^n, а k-й промежуточный — I_{2k}^n. Отметим свойства построенного семейства подпространств $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$, которые вытекают непосредственно из построения.

1. Полученное семейство $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из вложенных подпространств:
$$V^1 \subset V^2 \subset \ldots \subset V^{n-1} \subset V^n \subset \ldots .$$
2. Базисные функции подпространства V^n, $n \in \mathbb{N}$, образуют на отрезке $[-1, 1]$ разбиение единицы
$$0 \leqslant f_k^n \leqslant 1, \quad k = 1, \ldots, 2 \cdot 3^n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \sum_{k=1}^{2\cdot 3^n} f_k^n(x) \equiv 1.$$
3. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ непустым пересечением обладают лишь носители соседних базисных функций:
$$\operatorname{supp} f_i^n \cap \operatorname{supp} f_j^n \neq \varnothing, \ i < j \implies i = j - 1 \quad \text{или} \quad i = 1, \ j = 2 \cdot 3^n.$$

Перейдём к свойствам, которые нуждаются в более детальном рассмотрении. В дальнейшем нам потребуется матрица Грама G^n базисных функций $f_1^n, f_2^n, \ldots, f_{2\cdot 3^n}^n$ подпространства V^n. Согласно построению и свойству 3 матрица G^n является циркулянтом и имеет вид (4) с числами a и b, зависящими от n. Эту зависимость отражает следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть G^n — матрица Грама вида* (4) *для системы $f_1^n, f_2^n, \ldots, f_{2\cdot 3^n}^n$. Тогда ненулевые коэффициенты этой матрицы имеют вид $a^n = (2/5) \cdot 3^{-n}$ и $b^n = (1/20) \cdot 3^{-n}$.*

Доказательство. Поскольку базисные функции подпространства V^n получаются из соответствующих базисных функций пространства V^{n-1} сжатием с коэффициентом 3, то $a^n = a^0 \cdot 3^{-n}$ и $b^n = b^0 \cdot 3^{-n}$. Числа a^0, b^0 определяются равенствами

$$a^0 := \int_0^1 \big(f_1^0(x)\big)^2 \, dx, \quad b^0 := \int_{7/24}^{13/24} f_1^0(x) \cdot f_2^0(x) \, dx$$

и вычисляются непосредственно. Если обозначить через $\varphi(x)$ канторову лестницу на отрезке $[0,1]$, то, используя равенства

$$a^0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \varphi^2(x)\,dx, \quad b^0 = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \varphi(x)\cdot\bigl(1-\varphi(x)\bigr)\,dx, \tag{16}$$

доказательство леммы можно свести к вычислению интегралов

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx, \quad \int\limits_0^1 \varphi^2(x)\,dx.$$

По определению канторовой лестницы имеем

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{2k-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}\cdot\left(2\sum_{k=1}^{2^{n-1}}k - 2^{n-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-2}}{6^n} = \frac{1}{2},$$

$$\int\limits_0^1 \varphi^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{(2k-1)^2}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{12^n}\cdot\left(4\sum_{k=1}^{2^{n-1}}k^2 - 4\sum_{k=1}^{2^{n-1}}k + 2^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{12^n}\cdot\frac{2^{n-1}(4^n-1)}{3} = \frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right) = \frac{3}{10}.$$

Подставляя найденные значения в равенства (16), находим, что $a^0 = 2/5$, $b^0 = 1/20$. Лемма доказана. □

Чтобы перейти к рассмотрению рекурсивных разложений по цепочке $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$, нам осталось показать, что объединение построенных подпространств является всюду плотным множеством в пространстве $H = L_2[0,1]$. Мы докажем более сильное утверждение.

Лемма 7. *Объединение* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n$ *является всюду плотным подмножеством в пространстве* $C_1[0,1] := \{f \in C[0,1] \mid f(0) = f(1)\}$. *В частности, оно всюду плотно в* $H = L_2[0,1]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in V^n$ и проанализируем её график. Поскольку $V^n = \operatorname{span}\langle f_1^n, \ldots, f_{2\cdot 3^n}^n\rangle$, то функция f представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2\cdot 3^n} c_k \cdot f_k^n(x). \tag{17}$$

Чтобы избежать в последующих выкладках излишних оговорок, введём дополнительно две величины:

$$f_{2\cdot 3^n+1}(x) := f_1(x), \quad c_{2\cdot 3^n+1} := c_1.$$

Из представления (17) видно, что на каждом основном участке I_{2k-1}^n, $k = 1, \dots, 2 \cdot 3^n$, функция $f(x)$ тождественно равна c_k, а на промежуточном участке I_{2k}^n, $k = 1, \dots, 2 \cdot 3^n$, который является пересечением $\operatorname{supp} f_k^n \cap \operatorname{supp} f_{k+1}^n$, справедливо равенство

$$f(x) = c_k f_k^n + c_{k+1} f_{k+1}^n = c_k f_k^n + c_{k+1}(1 - f_k^n) = c_{k+1} + (c_k - c_{k+1}) f_k^n.$$

Таким образом, на участке I_{2k}^n функция $f(x)$ является монотонной, а её график получается растяжением канторовой лестницы с коэффициентом $c_k - c_{k+1}$ с последующим сдвигом вдоль оси ординат на c_{k+1}.

Теперь рассмотрим произвольную функции $g \in C_1[0,1]$ и для заданного $\varepsilon > 0$ подберём число $n \in \mathbb{N}$ и функцию $f \in V^n$ так, что $\|f - g\|_{C[0,1]} < \varepsilon$. Так как функция g непрерывна на отрезке $[0,1]$, она равномерно непрерывна на нём, следовательно,

$$\exists n\colon |x_1 - x_2| < 3^{-n} \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon. \tag{18}$$

Выберем в качестве коэффициента c_k, $k = 1, \dots, 2 \cdot 3^n$, значение функции g в некоторой точке k-го основного промежутка, $c_k := g(\xi_k)$, $\xi_k \in I_{2k-1}^n$, и составим линейную комбинацию (17). Зафиксируем некоторую точку $x \in [0,1]$ и оценим модуль разности $|f(x) - g(x)|$. В зависимости от выбранной точки x возможны два случая.

1. Если точка x попадает на основной участок I_{2k-1}^n, то с учётом (18) имеем

$$|f(x) - g(x)| = |g(\xi_k) - g(x)| < \varepsilon,$$

так как $x, \xi_k \in I_{2k-1}^n$ и $|I_{2k-1}^n| = (1/4) \cdot 3^{-n}$.

2. В противном случае точка x принадлежит некоторому промежуточному участку I_{2k}^n, для которого в силу монотонности функции $f(x)$ справедливо

$$\begin{aligned}
&\exists\, \theta \in [0,1]\colon f(x) = \theta \cdot g(\xi_k) + (1 - \theta) \cdot g(\xi_{k+1}) \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow |f(x) - g(x)| = |\theta \cdot g(\xi_k) + (1 - \theta) \cdot g(\xi_{k+1}) - g(x)| \leqslant \\
&\quad \leqslant \theta \cdot |g(\xi_k) - g(x)| + (1 - \theta) \cdot |g(\xi_{k+1}) - g(x)|) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

так как $|\xi_k - x|, |\xi_{k+1} - x| \leqslant (1/2) \cdot 3^n$.

Следовательно, для любого $x \in [0,1]$ имеет место неравенство $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, что эквивалентно оценке $\|f - g\|_{C[0,1]} < \varepsilon$. Лемма доказана. □

Рассмотрим построенную цепочку подпространств

$$V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^{n-1} \subset V^n \subset \dots$$

и рекурсивное разложение элементов $f \in H = L_2[0,1]$ по описанной выше схеме. В качестве базиса в подпространстве V^n выберем систему векторов

$$\bigl\{\varphi_1^n(x) := 3^{n/2} \cdot f_1^n(x),\ \varphi_2^n(x) := 3^{n/2} \cdot f_2^n(x), \dots,\ \varphi_{2 \cdot 3^n}^n(x) := 3^{n/2} \cdot f_{2 \cdot 3^n}^n(x)\bigr\}.$$

Согласно лемме 6 в этом случае матрица Грама G^n базисных векторов имеет вид (4) с коэффициентами $a = 2/5$ и $b = 1/20$. По замечанию 3 в каждом подпространстве V^n можно построить ортоподобную систему, после чего произвести рекурсивное разложение некоторой функции $f \in L_2[0,1]$ по цепочке $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Как было показано выше, объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n$ всюду плотно в $L_2[0,1]$, а значит, рекурсивный ряд Фурье сходится к f по норме пространства $L_2[0,1]$. Справедлива также следующая теорема.

Теорема 2. *Для любой непрерывной функции $f \in C_1[0,1]$ рекурсивный ряд Фурье по цепочке подпространств $\{V^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно.*

Доказательство. Рассмотрим шаг рекурсивного разложения с номером n. Пусть G — матрица Грама базисных векторов пространства V^n и $P = (G)^{-1}$. Отметим, что формально следовало бы указать зависимость матриц P и G от n, но она не подчёркивается с целью упрощения дальнейшего изложения. Как уже отмечалось выше, в случае вложенных подпространств остаток приближения r^n можно представить в виде $r^n = (I - D^n)f$, где D^n является оператором ортогонального проектирования на подпространство V^n, поэтому

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{2\cdot 3^n} c_k^n \varphi_k^n(x). \tag{19}$$

Коэффициенты c_k^n, $k = 1, \dots, 2\cdot 3^n$, можно найти, решив систему линейных уравнений

$$(r^n, \varphi_j^n) = 0, \quad j = 1, \dots, 2\cdot 3^n \iff$$
$$\iff \left(\sum_{k=1}^{2\cdot 3^n} c_k^n \varphi_k^n,\ \varphi_j^n \right) = (f, \varphi_j^n) \iff G \begin{pmatrix} c_1^n \\ \vdots \\ c_{2\cdot 3^n}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_1^n) \\ \vdots \\ (f, \varphi_{2\cdot 3^n}^n) \end{pmatrix}.$$

Домножая последнее равенство на G^{-1}, получаем

$$\begin{pmatrix} c_1^n \\ \vdots \\ c_{2\cdot 3^n}^n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} (f, \varphi_1^n) \\ \vdots \\ (f, \varphi_{2\cdot 3^n}^n) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что операторы D^n, а значит и операторы $I - D^n$, являются ограниченными в пространстве $C[0,1]$ равномерно по n. Пусть $M := \|f\|_{C[0,1]}$. Тогда

$$|(f, \varphi_k^n)| = \left| \int_0^1 f(t)\varphi_k^n(t)\,dt \right| \leqslant M \cdot \int_0^1 \varphi_k^n(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot M \cdot 3^{-n/2},$$

где последнее равенство получено из следующих соображений:

$$3^{n/2} = \int_0^1 \sum_{k=1}^{2\cdot 3^n} \varphi_k^n(t)\,dt = 2\cdot 3^n \int_0^1 \varphi_k^n(t)\,dt,$$

следовательно,

$$\int_0^1 \varphi_k^n(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot 3^{-n/2}.$$

Используя обозначения леммы 4, заключаем, что

$$|c_k^n| = \left|\sum_{j=1}^{2\cdot 3^n} p_k^j(f,\varphi_j^n)\right| \leqslant \frac{1}{2}\cdot M\cdot 3^{-n/2}\cdot \sum_{j=1}^{2\cdot 3^n}|p_k^j| \leqslant \frac{1}{2}\cdot MC_2\cdot 3^{-n/2}.$$

Заметим, что в равенстве

$$D^n f(x) = \sum_{k=1}^{2\cdot 3^n} c_k^n\varphi_k^n(x)$$

для каждого фиксированного x в правой части присутствуют не более двух ненулевых слагаемых. Следовательно, учитывая ограниченность каждой из базисных функций, $\varphi_k^n(x)\leqslant 3^{n/2}$, имеем

$$|D^n f(x)| \leqslant MC_2 \iff \|D^n\|_C \leqslant C_2.$$

При этом для оператора $I-D^n$ справедлива оценка $\|I-D^n\|_C \leqslant C_2+1$. Таким образом, равномерная ограниченность операторов D^n и $I-D^n$ в пространстве $C[0,1]$ доказана.

Для оценки $\|r^n\|_C$ рассмотрим, как и выше, функцию

$$\tilde{f}(x) := 3^{-n/2}\sum_{k=1}^{2\cdot 3^n} f(\xi_k^n)\varphi_k^n(x),$$

где ξ_k^n — некоторая точка k-го основного промежутка. Тогда теми же рассуждениями, которые использовались при доказательстве леммы 7, можно показать, что

$$\|f-\tilde{f}\|_{C[0,1]} \leqslant w_f\left(\frac{1}{2}\cdot 3^{-n}\right),$$

где $w_f(\cdot)$ — колебание функции f. Следовательно,

$$\|r^n\|_C = \|(I-D^n)(f)\|_C = \|(I-D^n)(f-\tilde{f})\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \|I-D^n\|_C\cdot\|f-\tilde{f}\|_C \leqslant (C_2+1)\cdot w_f\left(\frac{1}{2}\cdot 3^{-n}\right).$$

Из последнего неравенства следует равномерная сходимость рекурсивного ряда Фурье. Теорема доказана. □

Замечание 5. В соответствии со схемой рекурсивного разложения по цепочке подпространств для вычисления коэффициентов рекурсивного ряда Фурье и остатка приближения в каждом подпространстве необходимо фиксировать фрейм Парсеваля. Однако, как было показано при доказательстве теоремы 2, рекурсивное разложение на шаге с номером n сводится к ортогональной проекции на подпространство V^n, а остаток находится по формуле (19). Матрица $P^n = (G^n)^{-1}$ вычисляется в явном виде, поэтому формально при вычислении остатка необходимость в построении фрейма Парсеваля отпадает. Тем не менее найденные в разделе 2 векторы, дополняющие базис V^n до фрейма, позволяют производить соответствующие вычисления гораздо эффективнее.

Замечание 6. При доказательстве теоремы 2 мы установили равномерную ограниченность операторов ортогонального проектирования D^n в пространстве $C[0,1]$. В [13] изучаются проекторы на подпространства ломаных над всевозможными разбиениями отрезка $[0,1]$ и показано, что точная оценка сверху для норм таких проекторов равна 3.

Литература

[1] Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.

[2] Галатенко В. В. Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 1. — С. 59—70.

[3] Галатенко В. В. Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 7. — С. 21—36.

[4] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

[5] Драбкова Е. С., Новиков С. Я. Объём фрейма Парсеваля // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2007. — № 9/1 (59). — С. 91—106.

[6] Истомина М. Н., Певный А. Б. О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес-Бенц // Мат. просвещение. Сер. 1. — 2007. — Вып. 11. — С. 105—112.

[7] Кашин Б. С., Куликова Т. Ю. Замечание об описании фреймов общего вида // Мат. заметки. — 2002. — Т. 72, вып. 6. — С. 941—945.

[8] Лукашенко Т. П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2001. — № 1. — С. 6—10.

[9] Лукашенко Т. П., Садовничий В. А. О рекурсивных разложениях по цепочке систем // Докл. РАН. — 2009. — Т. 425, № 6. — С. 1—6.

[10] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. — М.: Мир, 2005.

[11] Наймарк М. А. Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. — 1940. — Т. 4, № 3. — С. 277—318.

[12] Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2006.

[13] Освальд П. О норме в C ортопроекторов на подпространства ломаных // Мат. заметки. — 1977. — Т. 21, № 4. — С. 495—502.

[14] Стечкин Б. С., Стечкин С. Б. Среднее квадратическое и среднее арифметическое // ДАН СССР. — 1961. — Т. 137, №2. — С. 287—290.

[15] Christensen O. Introduction to Frames and Riesz Bases. — Boston: Birkhäuser, 2002.

[16] Duffin R. J., Schaeffer A. C. A class of nonharmonic Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 72. — P. 341—366.

[17] Goyal V. K., Kovacevich J., Kelner J. A. Quantized frame expansions with erasures // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2001. — Vol. 10, no. 3. — P. 203—233.

[18] Temlyakov V. N. Weak greedy algorithms // Adv. Comp. Math. — 2000. — Vol. 12, no. 2-3. — P. 193—208.