Разрешимость проблемы равенства слов для некоторых многообразий линейных квазигрупп

А. Х. ТАБАРОВ
Таджикский национальный университет
e-mail: tabarov63@rambler.ru

УДК 512.548.7+512.572

Ключевые слова: линейные квазигруппы, T-квазигруппы, медиальные квазигруппы, проблема тождества слов.

Аннотация

В работе доказана разрешимость алгоритмической проблемы равенства слов для свободных алгебр в некоторых многообразиях линейных квазигрупп.

Abstract

A. Kh. Tabarov, Algorithmic solvability of word problem for some varieties of linear quasigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 227—236.

The algorithmic word problem is solvable for free algebras in some varieties of linear quasigroups.

Под многообразием квазигрупп понимается многообразие алгебр, определяемое в сигнатуре $\Omega = \{\cdot, \backslash, /\}$ тождествами

$$\Sigma_0 = \{(xy)/y = x,\ (x/y)y = x,\ x(x\backslash y) = y,\ x\backslash(xy) = y\}. \tag{1}$$

Данное многообразие будем обозначать через $Q(\Omega, \Sigma)$ и далее всегда будем считать, что $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, где Σ_1 — любая (возможно, пустая) система тождеств сигнатуры Ω. Больше того, в том случае, когда система Σ_1 непустая, будем говорить, что многообразие квазигрупп $Q(\Omega, \Sigma)$ определяется (или характеризуется) системой тождеств Σ_1.

Одним из свойств квазигруппы, характеризующих её близость к группе, является наличие её изотопии на группу. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется *изотопной* квазигруппе (группе) $(Q, \circ)$, если существует такая тройка подстановок $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ на множестве Q, что для любых $x, y \in Q$ выполняется соотношение

$$\gamma(x \circ y) = \alpha x \cdot \beta y.$$

В классе квазигрупп, изотопных группам, большой интерес представляют так называемые *линейные квазигруппы*, впервые введённые В. Д. Белоусовым в [1]

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 227—236.

в связи с исследованием уравновешенных тождеств в квазигруппах. Согласно [1] квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется *линейной* над группой $(Q, +)$, если она имеет вид

$$xy = \varphi x + c + \psi y, \tag{2}$$

где $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(Q, +)$, c — фиксированный элемент из Q.

Важным подклассом линейных квазигрупп являются *T-квазигруппы*, введённые и детально исследованные Т. Кепкой и П. Немцем в [16, 17]. T-квазигруппы — это квазигруппы вида (2), где $(Q, +)$ — абелева группа. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется *медиальной*, если в ней выполняется тождество $xy \cdot uv = xu \cdot yv$. Согласно теореме Брака—Тойоды [2] медиальные квазигруппы линейны над абелевыми группами с условием $\varphi\psi = \psi\varphi$.

Алгоритмическим проблемам в теории квазигрупп посвящены работы Т. Эванса [12, 13], М. М. Глухова и А. А. Гварамии [6]. В 1951 г. Т. Эванс [12] доказал утверждение о положительной разрешимости проблемы равенства слов для конечно определённых алгебр всякого многообразия алгебр $V(\Sigma)$, в котором имеет место теорема о вложении каждой конечной частичной Σ-алгебры в алгебру из V. Путём приведения слов к каноническому виду Т. Эванс доказал проблему изоморфизма для некоторых классов мультипликативных систем, в частности для квазигрупп и луп [13].

В 1970—1971 гг. М. М. Глухов [4] сформулировал более сильное, чем теорема о вложении, условие, которое он назвал условием R, при выполнении которого в многообразии не только квазигрупп, но и универсальных алгебр положительно решаются алгоритмические проблемы равенства слов, изоморфизма и вхождения. Многообразия алгебр, в которых выполняется условие R, были названы R-многообразиями.

При изучении алгебр одного многообразия иногда бывает полезно использовать алгебры некоторого связанного с ним другого многообразия. Именно такой подход использовался в ряде работ при изучении квазигрупп, изотопных группам. В связи с этим важным представляется подход, предложенный в работе [11], связанный с эквивалентностью и рациональной эквивалентностью классов алгебр, применяемый нами при доказательстве основной теоремы. С использованием понятий эквивалентности и рациональной эквивалентности в [14] доказано, что класс примитивных линейных квазигрупп, в частности T-квазигрупп, является многообразием. Г. Б. Белявской и автором в работах [3, 10] установлены различные системы тождеств, характеризующие некоторые многообразия линейных квазигрупп и T-квазигрупп. Приведём введённое в [11] понятие эквивалентных классов алгебр.

Определение 1. Классы K_1, K_2 алгебр сигнатур соответственно Δ_1, Δ_2 называются эквивалентными, если существует биективное отображение

$$f \colon K_1 \to K_2,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любой алгебры $A \in K_1$ основные множества алгебр A и $f(A)$ совпадают;

2) для любых алгебр $A, B \in K_1$ отображение A в B является гомоморфизмом тогда и только тогда, когда оно является гомоморфизмом алгебры $f(A)$ в $f(B)$.

При этом отображение f называется эквивалентностью между классами K_1 и K_2.

Если f — эквивалентность между многообразиями алгебр K_1, K_2, то имеют место следующие утверждения:

— подмножество $A_1 \subset A$ является подалгеброй алгебры A тогда и только тогда, когда $f(A_1)$ — подалгебра алгебры $f(A)$;
— подмножество $M \subset A$ порождает алгебру A тогда и только тогда, когда M порождает алгебру $f(A)$;
— отношение эквивалентности на A является конгруэнцией алгебры A тогда и только тогда, когда оно является конгруэнцией алгебры $f(A)$;
— алгебра $A \in K_1$ является свободной в многообразии K_1 с базисом M тогда и только тогда, когда $f(A)$ свободна в K_2 с тем же базисом M;
— класс алгебр L из K_1 является подмногообразием в K_1 тогда и только тогда, когда класс $\{f(A)\colon A \in L\}$ является подмногообразием в K_2.

Среди всех эквивалентностей между классами алгебр особо выделяются так называемые рациональные эквивалентности.

Пусть K — класс алгебр сигнатуры Δ и X — алфавит переменных. Тогда по каждому Δ-слову P в алфавите X, содержащему в своей записи ровно n переменных, например $x_1, \ldots, x_n$, можно определить n-арную операцию w_P на каждой алгебре A из K. Значение этой операции на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ равно значению в A слова, полученного из P подстановкой вместо $x_1, \ldots, x_n$ соответственно элементов $a_1, \ldots, a_n$. Так определённую операцию называют производной операцией в сигнатуре Δ, соответствующей Δ-слову P.

Переводом сигнатуры Δ_1 в сигнатуру Δ_2 называется любое отображение $\tau\colon \Delta_1 \to \Delta_2$, при котором каждая операция $h \in \Delta_1$ отображается в некоторую производную операцию той же арности в сигнатуре Δ_2. Если τ — такой перевод, то по любой алгебре B сигнатуры Δ_2 можно определить алгебру $A = T_\tau(B)$ сигнатуры Δ_1 с тем же основным множеством, определив операцию $h \in \Delta_1$ как совпадающую с $\tau(h)$.

Классы алгебр K_1, K_2 сигнатур соответственно Δ_1, Δ_2 называются рационально эквивалентными, если существуют переводы сигнатур $\tau\colon \Delta_1 \to \Delta_2$ и $\sigma\colon \Delta_2 \to \Delta_1$ и биективное отображение $f\colon K_1 \to K_2$, такие что композиции $T_\tau T_\sigma$ и $T_\sigma T_\tau$ являются тождественными отображениями.

Очевидно, что рациональная эквивалентность классов алгебр является эквивалентностью, потому для рационально эквивалентных классов имеют место приведённые выше утверждения. Как и для любых алгебр, в многообразии квазигрупп важную роль играют свободные квазигруппы рассматриваемого многообразия. Однако так же как и в любых многообразиях алгебр, для конструктивного описания свободной квазигруппы с базисом A в том или ином многообразии квазигрупп необходимо иметь алгоритм распознавания эквивалентности слов. В общем случае эта проблема является сложной.

Решение этой проблемы в заданном многообразии $Q(\Omega,\Sigma)$ существенно зависит от определяющей его системы тождеств Σ. Существуют многообразия квазигрупп с разрешимой проблемой равенства слов. К ним относятся, в частности, все R-многообразия [4, 6]. Вместе с тем существуют и многообразия с неразрешимой проблемой равенства слов в свободных квазигруппах [7].

Для любого многообразия квазигрупп представляет интерес также вопрос о связи его свободных квазигрупп со свободными группами его группового изотопного замыкания. Впервые этот вопрос для многообразия T-квазигрупп рассматривался в работах [16, 17]. В них предложена конструкция свободной T-квазигруппы, основанная на использовании понятия рациональной эквивалентности многообразий алгебр с различными сигнатурами, введённого в работе [14] (см. также [15]).

В [14] были рассмотрены класс квазигрупп $Q(\Gamma)$ в сигнатуре $\Omega_1=\{\cdot,/,\backslash,u\}$, где u — символ 0-арной операции, и многообразие U алгебр сигнатуры $\Omega_2 = \{+,-,0,\alpha,\beta,\gamma,\delta,c\}$, где α, β, γ, δ — символы унарных, а c — символ 0-арной операции, заданное системой групповых тождеств

$$(x+y)+z=x+(y+z),\quad x+0=x,\quad 0+x=x,\quad x+(-x)=0,\quad (-x)+x=0$$

в сигнатуре $\{+,-,0\}$ и тождеств

$$x\alpha\gamma=x\gamma\alpha=x,\quad x\beta\delta=x\delta\beta=x,\quad 0\alpha=0\beta=0\gamma=0\delta=0.$$

Ниже мы, заменив в последней системе γ на α^{-1} и δ на β^{-1}, будем записывать её в виде

$$x\alpha\alpha^{-1}=x\alpha^{-1}\alpha=x,\quad x\beta\beta^{-1}=x\beta^{-1}\beta=x,\quad 0\alpha=0\beta=0\alpha^{-1}=0\beta^{-1}=0.$$

В качестве переводов $\tau\colon\Omega_1\to\Omega_2$ и $\sigma\colon\Omega_2\to\Omega_1$ были взяты отображения

$$\begin{aligned}
&\tau(\cdot)(x,y)=x\alpha+d+y\beta,\\
&\tau(/)(x,y)=(x-y\beta-c)\gamma,\\
&\tau(\backslash)(x,y)=(-c-x\alpha+y)\delta,\\
&\tau(u)=0,\\
&\\
&\sigma(+)(x,y)=(x/u)\big((u/u)\backslash y\big),\\
&\sigma(-)(x)=(u/u)\big((x/u)\backslash u\big),\\
&\sigma(\alpha)=x(u\backslash u),\quad \sigma(\beta)=(u/u)x,\\
&\sigma(\gamma)=x/(u\backslash u),\quad \sigma(\delta)=(u/u)\backslash x,\\
&\sigma(0)=u,\quad \sigma(c)=uu.
\end{aligned}$$

Доказано, что классы алгебр $Q(\Gamma)$ и U рационально эквивалентны. Отсюда следует, в частности, что $Q(\Gamma)$ — многообразие квазигрупп. Аналогичным образом доказано, что многообразиями являются классы леволинейных, праволинейных, линейных квазигрупп и T-квазигрупп.

Авторы отмечают, что полученные результаты о рациональной эквивалентности позволяют формулировать многие вопросы о квазигруппах на более привычном, близком к групповому языке алгебр из многообразия U. В частности, отмечается, что на этом пути можно строить свободные квазигруппы из многообразий квазигрупп $Q(\Gamma)$, $Q(A\Gamma)$ ($Q(A\Gamma)$ — многообразие квазигрупп, изотопных абелевым группам). Эта идея с неявным использованием эквивалентности многообразий и была реализована в [16, 17] для T-квазигрупп. По существу, там в несколько иных терминах была построена свободная алгебра с базисом X в сигнатуре, полученной расширением групповой сигнатуры символами унарных операций α, α^{-1}, β, β^{-1}, на ней определены квазигрупповые операции и в итоге получена свободная T-квазигруппа. При внимательном анализе работ [16, 17] выяснилось, что некоторый аналог такой конструкции можно предложить для многообразия всех линейных квазигрупп [9].

Как уже отмечалось выше, конструктивное описание свободных квазигрупп требует решения в соответствующем многообразии проблемы равенства слов в свободных квазигруппах, или, что то же самое, проблемы тождественных соотношений для квазигрупп рассматриваемого многообразия. В этом направлении М. М. Глуховым в докладе на алгебраической конференции, посвящённой 100-летию А. Г. Куроша, анонсирован следующий результат: если для свободных групп некоторого многообразия групп разрешима проблема равенства слов, то аналогичный факт имеет место и для его изотопного замыкания [5]. Однако из этого результата не следует решение проблемы равенства слов для многообразий различных типов линейных квазигрупп, поскольку в таких многообразиях существенную роль играют ограничения на подстановки, являющиеся компонентами изотопий. Поэтому проблема равенства слов для свободных квазигрупп из многообразий различных типов линейных квазигрупп остаётся открытой.

Покажем, что в некоторых многообразиях линейных квазигрупп проблема тождества слов в свободных квазигруппах может быть положительно решена путём объединения указанных выше двух подходов конструирования свободных квазигрупп. Предварительно докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *В многообразии всех T-квазигрупп разрешима проблема равенства слов для свободных алгебр.*

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобится привлечь вспомогательное многообразие алгебр, а именно многообразие $U(\Delta_1, S)$ алгебр сигнатуры $\Delta_1 = \Delta \cup \Delta_0$ с системой тождеств S, где $\Delta_0 = \{\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}\}$ — система 0-арных операций, $\Delta = \{+, -, 0\}$ — сигнатура групп, S — система тождеств

$$\left.\begin{aligned} &(x+y)+z = x+(y+z), \quad x+y = y+x, \\ &x+0 = x, \quad x+(-x) = 0, \quad -(x+y) = -x-y, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\gamma^{-1}\gamma x = x, \quad 0\gamma = 0, \quad (x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma, \quad \gamma \in \Delta_0. \tag{4}$$

Кроме того, будет использована свободная группа $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ с базисом $\{\alpha, \beta\}$.

Напомним, что каждый элемент группы G представляется единственным приведённым словом, т. е. словом, не содержащим подслов вида $\gamma\gamma^{-1}$, $\gamma \in \Delta_0$. При этом предполагается, что $(\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$.

Лемма. *В многообразии алгебр $U(\Delta_1, S)$ разрешима проблема равенства слов для свободных алгебр.*

Доказательство леммы. Пусть $F(A)$ — свободная алгебра многообразия $U(\Delta_1, S)$ с базисом A. Введём понятие канонического Δ_1-слова в алфавите A: Δ_1-слово R в алфавите A назовём каноническим, если $R = 0$ или R имеет вид

$$R = c_{11}a_1\gamma_{11} + \ldots + c_{1k_1}a_1\gamma_{1k_1} + \ldots + c_{nk_1}a_n\gamma_{nk_1} + \ldots + c_{nk_n}a_n\gamma_{nk_n}, \tag{5}$$

где $n > 0$, $c_{ij} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k_i \geqslant 0$, $\gamma_{ij} \in G$ и γ_{ij}, $j = 1, \ldots, k_i$, — попарно различные приведённые слова группы G при любом фиксированном $i \in \{1, \ldots, n\}$. Здесь под $ca_i\gamma$ следует понимать сумму c слагаемых $a_i\gamma$ при $c > 0$ и сумму $-c$ слагаемых при $c < 0$. Слагаемые вида $c_1a_i\gamma$, $c_2a_i\gamma$ будем называть подобными, а замену их суммы словом $(c_1 + c_2)a_i\gamma$ — приведением подобных. Очевидно, что приведение подобных можно осуществить элементарными преобразованиями слов по тождествам (3), (4).

Заметим ещё, что в сумме из (5) не расставлены скобки, определяющие порядок операций. Тем не менее равенство (5) является корректным в силу ассоциативного закона сложения. В этом же смысле ассоциативность будет использоваться и далее.

Докажем, что для любого Δ_1-слова P в алфавите A существует эквивалентное ему каноническое Δ_1-слово R и такое слово единственно с точностью до перестановки слагаемых.

Существование слова R докажем индукцией по рангу слова P.

Если $\operatorname{rang} P = 0$, то $P = 0$ или $P = a_i$, и утверждение очевидно. Допустим, что оно верно для всех слов ранга $r < m$, и рассмотрим случай, когда $\operatorname{rang} P = m > 0$.

Согласно определению Δ_1-слов возможны три случая.

1. $P = (P_1) + (P_2)$. В этом случае для нахождения искомого слова R достаточно найти сумму канонических слов для P_1, P_2, в ней, пользуясь тождествами (3), сгруппировать слагаемые по одинаковым сомножителям из A, в каждой из полученных сумм привести подобные и удалить нулевые слагаемые, если они имеются.
2. $P = (P_1)\gamma$, $\gamma \in \Delta_0$. В этом случае достаточно, пользуясь тождествами (4), приписать к каждому слагаемому канонического слова для P букву γ и произвести сокращения вида $\gamma^{-1}\gamma$, если такие будут.
3. $P = -(P_1)$. В этом случае достаточно в каноническом слове для P_1 заменить все коэффициенты из $\mathbb{Z}$ на противоположные числа.

Таким образом, существование канонического слова, эквивалентного слову P, доказано. Докажем теперь его единственность с точностью до перестановки слагаемых.

Для этого сначала из приведённого доказательства существования извлечём процедуру приведения любого данного Δ_1-слова P к каноническому виду.

Шаг 1. Пользуясь тождествами

$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad -(x+y) = -x-y, \quad (x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma, \quad \gamma \in \Delta_0,$$

раскрываем все скобки в слове P и приводим его к сумме слов вида $c_i a_i \gamma_i$.

Шаг 2. Пользуясь тождествами $\gamma^{-1}\gamma x = x$, $\gamma \in \Delta_0$, заменяем в каждом слове вида $c_i a_i \gamma_i$ слово γ_i из группы G приведённым словом.

Шаг 3. В полученной сумме приводим подобные.

Шаг 4. Пользуясь тождествами $0+x = x$, $x+0 = x$, удаляем нулевые слагаемые.

Шаг 5. Группируем слагаемые по сомножителям из A в оставшихся слагаемых.

Заметим, что описанная процедура не является алгоритмом, поскольку на шагах 3, 5 может проявиться неоднозначность. Полученные в итоге канонические слова могут быть разными, но легко убедиться, что они могут отличаться лишь перестановкой слагаемых.

Множество всех полученных таким образом канонических слов обозначим через $\Phi(P)$. Таким образом, все слова из $\Phi(P)$ канонические, эквивалентны слову P и отличаются друг от друга лишь перестановкой слагаемых в суммах с одинаковым сомножителем из A. При этом такая перестановка может быть произвольной.

Докажем, что любое каноническое слово, эквивалентное P, содержится в $\Phi(P)$. Пусть $R_1 \in \Phi(P)$ и R_2 — любое каноническое слово, эквивалентное P (полученное, возможно, каким-то другим методом). Тогда слова R_1, R_2 эквивалентны и, значит, от R_1 к R_2 можно перейти с помощью конечного числа элементарных преобразований:

$$R_1 \to T_1 \to T_2 \to \ldots \to T_m = R_2.$$

Докажем, что $\Phi(T_i) = \Phi(T_{i+1})$, $i = 1, \ldots, m-1$. Для этого необходимо рассмотреть всевозможные элементарные преобразования $g\colon T_i \to T_{i+1}$. При этом преобразование по тождеству ассоциативности можно не рассматривать, так как оно используется неявно при записи суммы многих слагаемых без расстановки скобок.

1. Пусть преобразование $g\colon T_i \to T_{i+1}$ произведено по тождеству $x+y = y+x$. Тогда суммы, полученные из слов T_i, T_{i+1}, после первого шага процедуры Φ будут отличаться лишь порядком слагаемых, а потому и после шагов 2, 3 мы получим слова, отличающиеся лишь порядком слагаемых. Следовательно, в этом случае $\Phi(T_i) = \Phi(T_{i+1})$.

2. Пусть преобразование $g\colon T_i \to T_{i+1}$ произведено по тождеству $-(x+y) = -x-y$. Тогда, применяя к словам T_i, T_{i+1} процедуру Φ, мы уже после первого шага получим одинаковые слова, и значит, $\Phi(T_i) = \Phi(T_{i+1})$.

3. Пусть преобразование $g\colon T_i \to T_{i+1}$ произведено по тождеству $\gamma^{-1}\gamma x = x$. Тогда, применяя к словам T_i, T_{i+1} процедуру Φ, мы после первого шага придём

соответственно к суммам S_1, S_2, причём некоторые слагаемые в S_2 будут получаться из соответствующих слагаемых суммы S_1 удалением $\gamma^{-1}\gamma$, значит, после второго шага эти суммы будут одинаковыми. Следовательно, и в этом случае имеем равенство $\Phi(T_i) = \Phi(T_{i+1})$.

Аналогичными рассуждениями это равенство доказывается и для тех случаях, когда g производится по другим тождествам из (3), (4).

Из доказанных равенств $\Phi(T_i) = \Phi(T_{i+1})$, $i = 1, \ldots, m-1$ следует, что

$$\Phi(R_1) = \Phi(R_2).$$

Таким образом, все канонические слова, эквивалентные слову P, отличаются лишь перестановкой слагаемых в суммах с одинаковыми сомножителями из A.

Отсюда получается и утверждение леммы. Для распознавания эквивалентности слов P_1, P_2 достаточно найти и сравнить множества $\Phi(P_1)$, $\Phi(P_2)$. P_1 и P_2 эквивалентны в алгебре $F(A)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(P_1) = \Phi(P_2)$. Очевидно, что для проверки равенства $\Phi(P_1) = \Phi(P_2)$ достаточно сравнить лишь по одному представителю из $\Phi(P_1)$, $\Phi(P_2)$. $\square$

Вернёмся теперь к доказательству теоремы 1.

Следуя [11,14,15], установим связь между многообразием $Q(\Omega, \Sigma)$ всех T-квазигрупп и многообразием алгебр $U(\Delta_1, S)$. Так как сигнатура Δ_1 содержит 0-арную операцию 0, то для установления эквивалентности многообразий необходимо и Ω расширить путём введения 0-арной операции. В связи с этим пока будем рассматривать многообразие $Q(\Omega_1, \Sigma)$, где $\Omega_1 = \{\cdot, /, \backslash, u\}$, u — символ 0-арной операции.

Известно (и очевидно), что если квазигруппа изотопна группе G, то она главно изотопна некоторой группе, изоморфной G. Так как многообразие групп замкнуто относительно изоморфизмов групп, то, не теряя общности, можно считать, что рассматриваемые квазигруппы главно изотопны группам из U. Поэтому, в отличие от [11, 14], мы не будем вводить в сигнатуру Δ_1 дополнительный символ унарной операции c и переводы сигнатур $\tau\colon \Omega_1 \to \Delta_1$ и $\sigma\colon \Delta_1 \to \Omega_1$ определим по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&\tau(\cdot)(x, y) = x\alpha + y\beta,\\
&\tau(/)(x, y) = (x - y\beta)\alpha^{-1},\\
&\tau(\backslash)(x, y) = (-x\alpha + y)\beta^{-1},\\
&\tau(u) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma(+)(x, y) = (x/u)\big((u/u)\backslash y\big),\\
&\sigma(-)(x) = (u/u)\big((x/u)\backslash u\big),\\
&\sigma(\alpha) = x(u\backslash u), \quad \sigma(\beta) = (u/u)x,\\
&\sigma(\alpha^{-1}) = x/(u\backslash u), \quad \sigma(\beta^{-1}) = (u/u)\backslash x,\\
&\sigma(0) = u.
\end{aligned}$$

Переводы τ и σ индуцируют взаимно-обратные отображения Ω_1-слов в Δ_1-слова и обратно. Для Ω_1-слова P Δ_1-слово $\tau(P)$ получается заменой всех операций из Ω_1 их τ-переводами. Аналогично для Δ_1-слова R определяется Ω_1-слово $\sigma(R)$. Заметим, что согласно результату Ф. Н. Сохацкого [8] система тождеств многообразия квазигрупп $Q(\Omega_1, \Sigma)$, изотопных абелевым группам, получается добавлением к системе Σ_0 тождеств, полученных из (3) заменой групповых операций их переводами.

Из [11,14] следует, что переводы τ и σ индуцируют также биективные и взаимно-обратные отображения T_τ, T_σ алгебр многообразий $U(\Delta_1, S)$ и $Q(\Omega_1, \Sigma)$ и указанные многообразия рационально эквивалентны. Следовательно, два Δ_1-слова эквивалентны в свободной алгебре $F(A)$ многообразия $U(\Delta_1, S)$ тогда и только тогда, когда их переводы эквивалентны в свободной квазигруппе $Q(A_1)$ с базисом $A_1 = A \cup \{u\}$ многообразия $Q(\Omega_1, \Sigma)$. Очевидно, что классы слов, образующие элементы свободной квазигруппы $Q(A)$ многообразия $Q(\Omega, \Sigma)$, являются подклассами некоторых классов квазигруппы $Q(A_1)$. Следовательно, элементы из $Q(A)$ равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие элементы в алгебре $F(A)$. Отсюда и из леммы следует утверждение теоремы 1. $\square$

Заметим, что аналогичным образом может быть доказана следующая теорема.

Теорема 2. *В многообразии всех медиальных квазигрупп разрешима проблема равенства слов для свободных алгебр.*

Отличие доказательства теоремы 2 от доказательства теоремы 1 будет обусловлено добавлением к системе тождеств (3) тождеств вида

$$\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Delta_0.$$

В связи с этим вместо свободной группы $G = \langle \alpha, \beta \rangle$ должна использоваться свободная абелева группа с базисом α, β.

Автор благодарит профессора М. М. Глухова за его неоценимую помощь и обсуждения при получении данных результатов.

Литература

[1] Белоусов В. Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах // Мат. сб. — 1966. — Т. 70 (112), № 1. — С. 55—97.

[2] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.

[3] Белявская Г. Б., Табаров А. Х. Ядра и центр линейных квазигрупп // Изв. АН РМ. Математика. — 1991. — № 3 (6). — С. 37—42.

[4] Глухов М. М. О свободных произведениях и алгоритмических проблемах в R-многообразиях универсальных алгебр // ДАН СССР. — 1970. — Т. 193, № 3. — С. 514—517.

[5] Глухов М. М. О свободных квазигруппах некоторых многообразий и их мультипликативных группах // Междунар. алгебр. конф., посвящённая 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008. — С. 68.

[6] Глухов М. М., Гварамия А. А. Об алгоритмических проблемах для некоторых классов квазигрупп // ДАН СССР. — 1967. — Т. 177, № 1. — С. 14—16.

[7] Мальцев А. И. Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп // Мат. сб. — 1966. — Т. 69, № 1. — С. 3—12.

[8] Сохацкий Ф. Н. Ассоциаты и разложения многоместных операций: Дис.. . . докт. физ.-мат. наук. — Киев, 2006.

[9] Табаров А. Х. Построение свободных линейных квазигрупп // Докл. АН РТ. — 2005. — Т. 48, № 11-12. — С. 22—28.

[10] Belyavskaya G. B., Tabarov A. Kh. One-sided T-quasigroups and irreducible balanced identities // Quasigroups and Related Systems. — 1994. — № 1. — P. 8—21.

[11] Csacany B. On the equivalence of certain classes of algebraic systems // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1962. — Vol. 23. — P. 46—57.

[12] Evans T. The word problem for abstract algebras // J. London Math. Soc. — 1951. — Vol. 28, no. 1. — P. 64—67.

[13] Evans T. The isomorphism problem for some classes of multiplicative systems // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 109. — P. 303—312.

[14] Jezek J., Kepka T. Quasigroups isotopic to a group // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1975. — Vol. 16, no. 1. — P. 59—76.

[15] Jezek J., Kepka T. Varieties of Abelian quasigroups // Czech. Math. J. — 1977. — Vol. 27. — P. 473—503.

[16] Kepka T., Nemec P. T-quasigroups. I // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. — 1971. — Vol. 12, no. 1. — P. 31—39.

[17] Kepka T., Nemec P. T-quasigroups. II // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. — 1971. — Vol. 12, no. 2. — P. 39—49.