Вполне целозамкнутые модули и кольца. II*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный
торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: вполне целозамкнутый модуль, цепное кольцо, малоинъективный модуль.

Аннотация

Цепная справа или слева область A является вполне целозамкнутым правым A-модулем в точности тогда, когда A — инвариантная цепная область, содержащая не более двух первичных идеалов.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Completely integrally closed modules and rings. II, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 237—243.

A right or left uniserial domain A is a completely integrally closed right A-module if and only if A is an invariant uniserial domain with at most two prime ideals.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными. В предыдущей работе [1] были введены вполне целозамкнутые модули. Модуль X называется *вполне целозамкнутым*, если для любого его подмодуля Y каждый гомоморфизм $Y \to X$, переводящий в себя некоторый существенный подмодуль модуля Y, продолжается до гомоморфизма $X \to X$. Модуль X называется *квазиинъективным*, если для любого его подмодуля Y каждый гомоморфизм $Y \to X$ продолжается до гомоморфизма $X \to X$. Каждый квазиинъективный модуль вполне целозамкнут. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ является вполне целозамкнутым неквазиинъективным $\mathbb{Z}$-модулем. В [1] было показано, что класс всех вполне целозамкнутых колец содержит все самоинъективные кольца и все коммутативные области, вполне целозамкнутые (в классическом смысле) в своих полях частных. Если мы говорим «A — цепное кольцо», это значит, что A_A и ${}_AA$ — цепные модули.

Основным результатом данной работы является теорема 1.

Теорема 1. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — вполне целозамкнутая справа, цепная справа или слева область*;
2) *A — вполне целозамкнутая слева, цепная справа или слева область*;

*Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 237—243.

3) *A — локальная область, над которой все циклические правые модули вполне целозамкнуты*;
4) *A — локальная область, над которой все циклические левые модули вполне целозамкнуты*;
5) *A — инвариантная цепная область и A содержит не более двух первичных идеалов.*

Все циклические правые A-модули инъективны в точности тогда, когда A — полупростое артиново кольцо [6]. В [5] описаны кольца, над которыми все циклические правые модули квазиинъективны. Над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ все циклические модули квазиинъективны, но квазиинъективный циклический $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-модуль $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ не инъективен.

Мы разобьём доказательство теоремы 1 на ряд утверждений. Некоторые из них представляют самостоятельный интерес.

Приведём необходимые определения и обозначения. Модуль называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Модуль M называется *инвариантным*, если в M все подмодули вполне инвариантны[1]. Через $J(A)$ обозначается радикал Джекобсона кольца A. Если M — правый (левый) модуль над кольцом A и X — подмножество в M, то правый (соответственно левый) аннулятор множества X в A обозначается через $r(X)$ (соответственно $\ell(X)$) и является правым (соответственно левым) идеалом кольца A. Правый A-модуль M называется *несингулярным*, если M не имеет таких ненулевых элементов m, что $r(m)$ — существенный правый идеал кольца A. Подмодуль Y модуля X называется *существенным*, если Y имеет ненулевое пересечение с каждым ненулевым подмодулем в X. Модуль M называется *равномерным*, если в M любые два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение[2]. Подкольцо A кольца Q называется *классически вполне целозамкнутым справа* в Q, если A содержит каждый такой элемент $q \in Q$, что $q^n a \in A$ для некоторого неделителя нуля $a \in A$ и для всех $n \in \mathbb{N}$. Кольцо без ненулевых делителей нуля называется *областью*. Собственный идеал X кольца A называется *первичным* (*вполне первичным*), если A/X — первичное кольцо (соответственно область). Модуль M называется *малоинъективным*, если каждый эндоморфизм любого его подмодуля продолжается до эндоморфизма модуля M. Модуль M называется *квазинепрерывным* [4] или *π-инъективным* [3]) при выполнении следующих эквивалентных условий [3, 4]:

1) для любого подмодуля X модуля M каждый идемпотентный эндоморфизм модуля X продолжается до идемпотентного эндоморфизма модуля M;
2) для любого подмодуля X модуля M каждое конечное прямое разложение $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ продолжается до прямого разложения $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$.

Следующая лемма 1 проверяется непосредственно.

---

[1] Ясно, что кольцо A инвариантно справа (слева) в точности тогда, когда все его правые (левые) идеалы являются идеалами.

[2] Ясно, что модуль равномерен в точности тогда, когда все его ненулевые подмодули существенны. Кроме того, равномерные справа области совпадают с правыми областями Оре.

Лемма 1. *Для кольца A равносильны следующие условия*:
1) $aAb = 0$ *для любых таких элементов* $a, b \in A$, *что* $ab = 0$;
2) *в кольце A все правые аннуляторы являются идеалами*;
3) *в кольце A все левые аннуляторы являются идеалами.*

Лемма 2. *Для кольца A равносильны следующие условия*:
1) *в кольце A все правые аннуляторы являются идеалами и каждый эндоморфизм любого главного правого идеала продолжается до эндоморфизма модуля* A_A;
2) A — *инвариантное слева кольцо.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть a и b — любые два элемента кольца A. Достаточно доказать, что $ab \in Aa$. По условию $r(a)$ — идеал кольца A. Поэтому $r(a) \subseteq r(ab)$. Кроме того, $aA \cong A_A/r(a)$ и $abA \cong A_A/r(ab)$. Поэтому существует такой модульный эпиморфизм $f\colon aA \to abA \subseteq aA$, что $f(a) = ab$. Так как f — эндоморфизм главного правого идеала aA, то по условию 1) f продолжается до эндоморфизма g модуля A_A. Обозначим через c элемент $g(1)$ кольца A. Тогда $ab = g(1 \cdot a) = ca \in Aa$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). В кольце A все левые аннуляторы являются идеалами. По лемме 1 в кольце A все правые аннуляторы являются идеалами. Пусть $a \in A$, f — эндоморфизм главного правого идеала aA и $f(a) = ab$, где $b \in A$. Так как кольцо A инвариантно слева, то $ab = ca$ для некоторого элемента $c \in A$. Существует такой эндоморфизм g модуля A_A, что $g(x) = cx$ для всех $x \in A$. Тогда g — продолжение гомоморфизма f. $\square$

Лемма 3 [1]. *Каждый вполне целозамкнутый модуль малоинъективен и каждый малоинъективный модуль квазинепрерывен. Следовательно, каждый вполне целозамкнутый или малоинъективный неразложимый модуль равномерен.*

Лемма 4 [1]. *Если M — модуль и M является несингулярным или инвариантным модулем, то M вполне целозамкнут в точности тогда, когда M малоинъективен.*

Модуль называется *конечномерным*, если он не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Кольцо A называется *правым кольцом Голди*, если A — конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов.

Замечание 5. По теореме Голди [2, п. 9.13] каждое полупервичное правое кольцо Голди обладает полупростым артиновым классическим правым кольцом частных.

Лемма 6 [1]. *Пусть A — полупервичное правое кольцо Голди и Q — его полупростое артиново классическое правое кольцо частных. Равносильны следующие условия*:
1) A — *вполне целозамкнутое справа кольцо*;
2) A — *малоинъективное справа кольцо*;
3) A — *классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в* Q.

Лемма 7. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — вполне целозамкнутое справа, несингулярное справа кольцо без нетривиальных идемпотентов*;
2) *A — малоинъективное справа, несингулярное справа кольцо без нетривиальных идемпотентов*;
3) *A — вполне целозамкнутая справа, равномерная справа область*;
4) *A — инвариантная слева область, A имеет классическое двустороннее тело частных Q, причём A — классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q.*

Доказательство. Импликация 4) $\Longrightarrow$ 3) вытекает из леммы 6.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) очевидна.

Эквивалентность условий 1) и 2) вытекает из леммы 4.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Так как кольцо A не имеет нетривиальных идемпотентов, то A_A — вполне целозамкнутый неразложимый модуль. По лемме 3 кольцо A равномерно справа. Непосредственно проверяется, что несингулярное справа, равномерное справа кольцо A является областью.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Так как A — равномерная справа область, то A имеет классическое правое тело частных Q. По лемме 6 A — классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q. По лемме 2 область A инвариантна слева. Тогда область A равномерна слева и имеет классическое левое тело частных. Поэтому классическое правое тело частных Q является двусторонним телом частных области A. $\square$

Лемма 8. *Пусть A — малоинъективная справа область и a — необратимый элемент области A.*

1. $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} a^iA = 0.$
2. *Если главный правый идеал aA строго содержит некоторый первичный идеал P области A, то $P = 0$.*

Доказательство. 1. Можно считать, что $a \neq 0$. По лемме 7 область A имеет классическое тело частных Q, которое содержит элемент a^{-1}. Обозначим через X правый идеал $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} a^iA$ области A. Существует такой эндоморфизм f модуля X_A, что $f(x) = a^{-1}x$ для всех $x \in X = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} a^iA$. По условию эндоморфизм f продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля A_A. Обозначим $b = g(1) \in A$. Допустим, что $X \neq 0$. Возьмём ненулевой элемент $x \in X$. Тогда $a^{-1}x = f(x) = g(1 \cdot x) = bx$, откуда следует, что $a^{-1} = b \in A$ и элемент a обратим в A. Получено противоречие. Поэтому $X = 0$.

2. Пусть $h\colon A \to A/P$ — естественный кольцевой эпиморфизм. Так как $P \subsetneq aA$, то $h(a) \neq h(0)$, $P = aY \subseteq Y$ для некоторого идеала Y области A и $h(a)h(Y) = h(0)$. По лемме 2 область A инвариантна слева. Тогда $h(A)$ — инвариантное слева первичное кольцо. Поэтому $h(A)$ — область, причём

$h(a)h(Y) = h(0)$. Тогда $h(Y) = h(0)$, $Y \subseteq P \subseteq Y$ и $P = Y$. Поэтому $P = aP$ и $P \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} a^i A$. По утверждению 1 $P = 0$. □

Лемма 9. *Пусть A — малоинъективная справа, цепная справа область.*

1. *A имеет не более двух первичных идеалов.*
2. *A — инвариантная цепная область.*

Доказательство. По лемме 2 область A инвариантна слева.

1. Допустим противное. Тогда инвариантная слева, цепная справа область A имеет ненулевой первичный идеал P, строго лежащий в $J(A)$. Пусть $a \in J(A) \setminus P$. Это противоречит утверждению 2 леммы 8.

2. Так как A — инвариантная слева, цепная справа область, то A — цепная слева область. Остаётся показать, что область A инвариантна справа. Достаточно доказать, что $ba \in aA$ для любых ненулевых элементов $a \in J(A)$, $b \in A$. Допустим, что $ba \notin aA$. Так как A — цепная справа область, то $aA \subseteq baA$. Тогда $a = bac$ для некоторого ненулевого элемента $c \in A$, причём элемент c не является обратимым в A, поскольку $ba \notin aA$. Поэтому $c \in J(A)$ и $a = b^i a c^i$ для всех натуральных чисел i. Тогда $0 \neq a \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Ac^i$.

Так как A — область и $0 \neq a \in J(A)$, то $a \notin Aa^2$. Поэтому правый идеал aA не лежит в $Aa^2 = Aa^2A$. Пусть $h\colon A \to Aa^2$ — естественный кольцевой эпиморфизм. Так как $h\bigl(J(A)\bigr)$ — единственный первичный идеал кольца $h(A)$, то $h\bigl(J(A)\bigr)$ — первичный радикал кольца $h(A)$. Поэтому $h(c)$ — нильпотентный элемент кольца $h(A)$. Тогда $c^n = xa^2$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in A$. Так как $0 \neq a \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Ac^i$, то $0 \neq a \in Axa^2$. Поэтому $1 \in Aa$, и получаем противоречие. □

Лемма 10. *Пусть A — инвариантная цепная область и Q — её классическое тело частных. Если $q \in Q \setminus A$, то $q^{-1} \in A$. Кроме того, равносильны следующие условия*:

1) *A — классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q*;
2) *A — малоинъективная справа область*;
3) *$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} a^i A = 0$ для любого необратимого элемента a области A*;
4) *A имеет не более двух первичных идеалов.*

Доказательство. Пусть $q = ab^{-1} \in Q \setminus A$, где a и b — ненулевые элементы цепной области A. Так как $ab^{-1} \notin A$, то $a \notin Ab$. Поэтому $b \in Aa$ и $q^{-1} = ba^{-1} \in A$.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из леммы 7.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) следует из утверждения 1 леммы 8.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Допустим противное. Тогда инвариантная цепная область A имеет ненулевой первичный идеал X, строго лежащий в $J(A)$. Первичный идеал X инвариантного кольца A вполне первичен. Пусть

$a \in J(A) \setminus X$. Так как идеал X инвариантного цепного кольца A не содержит идеал aA, то главный идеал aA строго содержит вполне первичный идеал X. Поэтому $X = aX$. Тогда $X = a^i X$ для всех i. Поэтому $X \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} a^i A = 0$ и $X = 0$. Получено противоречие.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 3). Пусть a — необратимый элемент инвариантной цепной области A, $X = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} a^i A$ и $h\colon A \to A/X$ — естественный эпиморфизм. Тогда a — элемент первичного идеала $J(A)$ области A. Допустим, что $X \neq 0$. Так как 0 — первичный идеал и A имеет не более двух первичных идеалов, то кольцо $h(A)$ имеет ровно один первичный идеал $h\big(J(A)\big)$, который является первичным радикалом кольца $h(A)$. Так как первичный радикал является ниль-идеалом, то элемент $h(a)$ нильпотентен. Поэтому $a^n \in X = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} a^i A$ для некоторого натурального числа n. Тогда $a^n = a^{n+1} b$ для некоторого элемента b области A. Поэтому $1 = ab$ и элемент a обратим. Получено противоречие.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $0 \neq q \in Q$, $0 \neq a \in A$ и $q^i a \in A$ для всех натуральных чисел i. Допустим, что $q \notin A$. Тогда $q^{-1} = b$ — необратимый элемент области A. Обозначим через Y ненулевой идеал $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q^i a$ области A. Так как $qY \subseteq Y$ и $q^{-1} = b \in A$, то $Y \subseteq bY \subseteq Y$, $Y = bY$ и $Y = b^i Y$ для всех i. Поэтому $Y \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} b^i A = 0$. Получено противоречие. □

Лемма 11. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — вполне целозамкнутая справа, цепная справа область*;
2) *A — вполне целозамкнутая справа, цепная слева область*;
3) *A — малоинъективная справа, цепная справа область*;
4) *A — малоинъективная справа, цепная слева область*;
5) *A — инвариантная цепная область, имеющая не более двух первичных идеалов.*

Доказательство. Эквивалентности 1) $\Longleftrightarrow$ 3) и 2) $\Longleftrightarrow$ 4) вытекают из леммы 7.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 5) следует из леммы 9.

Импликация 5) $\Longrightarrow$ 4) следует из леммы 10.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 3). Пусть a и b — два ненулевых элемента области A. Так как по лемме 3 область A равномерна справа, то $ac = bd \neq 0$ для некоторых ненулевых элементов $c, d \in A$. Так как A — цепная слева область, то либо $c = xd$, либо $d = yc$ для некоторых $x, y \in A$. Поэтому либо $axd = bd$, либо $ac = byc$. Так как A — область, то либо $b = ax$, либо $a = by$. Поэтому A — цепная справа область. □

Лемма 12 [5]. *Пусть A — инвариантное цепное кольцо и A имеет ровно один первичный идеал. Тогда все циклические правые A-модули и все циклические левые A-модули квазиинъективны.*

Лемма 13. *Пусть M — модуль и все его фактор-модули являются неразложимыми квазинепрерывными модулями. Тогда M — цепной модуль.*

Доказательство. Пусть X и Y — подмодули в M, $X \not\subseteq Y$. Пусть $h\colon M \to M/(X \cap Y)$ — естественный эпиморфизм. Неразложимый квазинепрерывный модуль $h(M)$ равномерен. Кроме того, $h(X) \cap h(Y) = h(0)$ и $h(X) \neq h(0)$. Тогда $h(Y) = h(0)$ и $Y = X \cap Y \subseteq X$. □

Лемма 14. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — локальная область, над которой все циклические правые модули вполне целозамкнуты*;
2) *A — локальная область, над которой все циклические левые модули вполне целозамкнуты*;
3) *A — локальная область, над которой все циклические правые модули малоинъективны*;
4) *A — локальная область, над которой все циклические левые модули малоинъективны*;
5) *A — инвариантная цепная область и A имеет не более двух первичных идеалов.*

Доказательство. Достаточно доказать эквивалентность условий 1), 3) и 5).

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) следует из леммы 3.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 5). По лемме 11 достаточно доказать, что A — цепное справа кольцо. По лемме 3 все циклические правые A-модули квазинепрерывны. Так как каждый циклический модуль над локальным кольцом A является неразложимым модулем, то по лемме 13 A — цепное справа кольцо.

Докажем импликацию 5) $\Longrightarrow$ 1). Пусть B — идеал инвариантного кольца A. Достаточно показать, что A/B — вполне целозамкнутый правый модуль над кольцом A/B. Если $B = 0$, то утверждение следует из леммы 11. Если $B \neq 0$, то утверждение следует из леммы 12. □

Замечание 15. Теорема 1 вытекает из лемм 11 и 14.

Литература

[1] Туганбаев А. А. Вполне целозамкнутые модули и кольца // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 8. — С. 213—228.
[2] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.
[3] Goel V. K., Jain S. K. π-injective modules and rings whose cyclics are π-injective // Commun. Algebra. — 1978. — Vol. 6, no. 1. — P. 59—73.
[4] Jeremy L. Modules et anneaux quasi-continus // Can. Math. Bull. — 1974. — Vol. 17, no. 2. — P. 217—228.
[5] Koehler A. Rings with quasi-injective cyclic modules // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2. — 1974. — Vol. 25. — P. 51—55.
[6] Osofsky B. L. Rings all of whose finitely generated modules are injective // Pacific J. Math. — 1964. — Vol. 14. — P. 645—650.