Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с псевдоцоколями ранга 3

А. В. ЧЕРЕДНИКОВА
Костромской государственный технологический университет
e-mail: cherednikova@bk.ru

УДК 512.541.7

Ключевые слова: квазиэндоморфизм, абелева группа, группа без кручения, сильно неразложимая группа, псевдоцоколь.

Аннотация

В статье получена классификация колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с псевдоцоколями ранга 3.

Abstract

A. V. Cherednikova, Rings of quasi-endomorphisms of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 *with pseudosocles of rank* 3, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 3, pp. 245—250.

In this paper, the classification of rings of quasi-endomorphisms of strongly indecomposable Abelian torsion-free groups of rank four with pseudosocles of rank three is obtained.

Все рассматриваемые в статье группы являются абелевыми группами без кручения конечного ранга. Через $\mathbb{Q}$ обозначим поле рациональных чисел.

Говорят, что группа G квазиравна группе $H (G \doteq H)$, если $G \supseteq nH \supseteq mG$ для некоторых ненулевых целых чисел n и m.

Под квазиразложением группы G понимается семейство ненулевых подгрупп G_i $(i \in I)$ делимой оболочки $\mathbb{Q} \otimes G$ группы G, таких что $G \doteq \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$. При этом каждая из групп G_i называется квазислагаемым группы G.

Группа G называется *сильно неразложимой*, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями.

Кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G — это минимальная рациональная алгебра, содержащая кольцо $\mathcal{E}(G)$ эндоморфизмов группы. $\mathcal{E}(G)$ естественно возникает при вложении G в делимую оболочку.

Псевдоцоколем группы G называется сервантная оболочка суммы всех минимальных сервантных вполне характеристических подгрупп группы G (обозначается через $\operatorname{Soc} G$). Заметим, что $\operatorname{Soc} G \neq 0$ для любой группы G.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 3, с. 245—250.

В статье даётся классификация колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с псевдоцоколями ранга 3.

Пусть G — группа. Если $M \subseteq G$, то $\langle M \rangle_*$ — сервантная подгруппа в G, порождённая множеством M.

Определения, факты и обозначения можно найти в [3, 4].

Теорема. *Пусть G — сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 4 с псевдоцоколем ранга 3. Тогда алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфна одной из следующих алгебр*:

$$\mathbf{A_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\}, \quad \mathbf{A_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & z \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A_3} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & z \\ 0 & 0 & x & t \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Доказательство. По условию $\operatorname{Soc} G$ имеет ранг 3. Зафиксируем линейно независимые элементы $x_1, x_2, x_3 \in \operatorname{Soc} G$. Возьмём $x_4 \in G \setminus \operatorname{Soc} G$. Так как подгруппа $\operatorname{Soc} G$ сервантна в G, элементы x_1, x_2, x_3, x_4 линейно независимы и, следовательно, образуют максимальную линейно независимую систему группы G.

Положим

$$R_1 = \langle x_1 \rangle_*, \quad R_2 = \langle x_2 \rangle_*, \quad R_3 = \langle x_3 \rangle_*, \quad R_4 = \langle x_4 \rangle_*.$$

Обозначим $i_k \colon R_k \to G$, $\pi_k \colon G \to \mathbb{Q} \otimes R_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ возникающие гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции. Тогда $i_k(x_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы G.

Всякий квазиэндоморфизм $\varphi \colon G \to G$ вполне определяется элементами $\varphi\, i_k(x_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, которые могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
\varphi\, i_1(x_1) &= \pi_1 \varphi\, i_1(x_1) + \pi_2 \varphi\, i_1(x_1) + \pi_3 \varphi\, i_1(x_1) + \pi_4 \varphi\, i_1(x_1),\\
\varphi\, i_2(x_2) &= \pi_1 \varphi\, i_2(x_2) + \pi_2 \varphi\, i_2(x_2) + \pi_3 \varphi\, i_2(x_2) + \pi_4 \varphi\, i_2(x_2),\\
\varphi\, i_3(x_3) &= \pi_1 \varphi\, i_3(x_3) + \pi_2 \varphi\, i_3(x_3) + \pi_3 \varphi\, i_3(x_3) + \pi_4 \varphi\, i_3(x_3),\\
\varphi\, i_4(x_4) &= \pi_1 \varphi\, i_4(x_4) + \pi_2 \varphi\, i_4(x_4) + \pi_3 \varphi\, i_4(x_4) + \pi_4 \varphi\, i_4(x_4).
\end{aligned} \tag{1}$$

С другой стороны, $\varphi\, i_k(x_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
\varphi\, i_1(x_1) &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2 + \alpha_{31} x_3 + \alpha_{41} x_4,\\
\varphi\, i_2(x_2) &= \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{32} x_3 + \alpha_{42} x_4,\\
\varphi\, i_3(x_3) &= \alpha_{13} x_1 + \alpha_{23} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \alpha_{43} x_4,\\
\varphi\, i_4(x_4) &= \alpha_{14} x_1 + \alpha_{24} x_2 + \alpha_{34} x_3 + \alpha_{44} x_4,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$.

Отображение

$$gf\colon \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$f\colon \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \pi_1\varphi\, i_1 & \pi_1\varphi\, i_2 & \pi_1\varphi\, i_3 & \pi_1\varphi\, i_4 \\ \pi_2\varphi\, i_1 & \pi_2\varphi\, i_2 & \pi_2\varphi\, i_3 & \pi_2\varphi\, i_4 \\ \pi_3\varphi\, i_1 & \pi_3\varphi\, i_2 & \pi_3\varphi\, i_3 & \pi_3\varphi\, i_4 \\ \pi_4\varphi\, i_1 & \pi_4\varphi\, i_2 & \pi_4\varphi\, i_3 & \pi_4\varphi\, i_4 \end{pmatrix}$$

и

$$g\colon \begin{pmatrix} \pi_1\varphi\, i_1 & \pi_1\varphi\, i_2 & \pi_1\varphi\, i_3 & \pi_1\varphi\, i_4 \\ \pi_2\varphi\, i_1 & \pi_2\varphi\, i_2 & \pi_2\varphi\, i_3 & \pi_2\varphi\, i_4 \\ \pi_3\varphi\, i_1 & \pi_3\varphi\, i_2 & \pi_3\varphi\, i_3 & \pi_3\varphi\, i_4 \\ \pi_4\varphi\, i_1 & \pi_4\varphi\, i_2 & \pi_4\varphi\, i_3 & \pi_4\varphi\, i_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

является изоморфизмом $\mathcal{E}(G)$ и подалгебры полной матричной алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ порядка 4 [3].

Так как из определения псевдоцоколя следует, что $\operatorname{Soc} G$ является сервантной вполне характеристической подгруппой группы G, равенства (1) примут вид

$$\begin{aligned} &\varphi\, i_1(x_1) = \pi_1\varphi\, i_1(x_1) + \pi_2\varphi\, i_1(x_1) + \pi_3\varphi\, i_1(x_1), \\ &\varphi\, i_2(x_2) = \pi_1\varphi\, i_2(x_2) + \pi_2\varphi\, i_2(x_2) + \pi_3\varphi\, i_2(x_2), \\ &\varphi\, i_3(x_3) = \pi_1\varphi\, i_3(x_3) + \pi_2\varphi\, i_3(x_3) + \pi_3\varphi\, i_3(x_3), \\ &\varphi\, i_4(x_4) = \pi_1\varphi\, i_4(x_4) + \pi_2\varphi\, i_4(x_4) + \pi_3\varphi\, i_4(x_4) + \pi_4\varphi\, i_4(x_4). \end{aligned}$$

Тогда равенства (2) примут вид

$$\begin{aligned} &\varphi\, i_1(x_1) = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3, \\ &\varphi\, i_2(x_2) = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3, \\ &\varphi\, i_3(x_3) = \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3, \\ &\varphi\, i_4(x_4) = \alpha_{14}x_1 + \alpha_{24}x_2 + \alpha_{34}x_3 + \alpha_{44}x_4. \end{aligned} \tag{3}$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{K}.$$

Так как $\mathcal{E}(G)$ является артиновым, радикал Джекобсона $\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)$ кольца $\mathcal{E}(G)$ нильпотентен [1].

Найдём максимальный нильпотентный идеал $\boldsymbol{I}$ кольца $\mathbf{K}$.

Легко проверить, что если $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица порядка n с рациональными элементами и для некоторых i, j выполняются условия $a_{ij} \neq 0$,

$a_{ji} \neq 0$, то матрица A не является нильпотентной. Из этого следует, что если для некоторого натурального n

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}^n = 0,$$

то

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{44} = 0 \tag{4}$$

и при $i \neq j$

$$\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}. \tag{5}$$

Вычисления показывают, что среди матриц кольца $\mathbf{K}$, удовлетворяющих условиям (4) и (5), нильпотентными являются следующие матрицы с рациональными элементами:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из вычислений следует, что кольца матриц вида K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 изоморфны кольцу матриц вида K_1.

Следовательно, $\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)$ является с точностью до изоморфизма подкольцом кольца

$$\mathbf{K_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Известно [2], что если группа G сильно неразложима, кольцо $\mathcal{E}(G)$ артиново справа и $\operatorname{rank}(G/\operatorname{Soc} G) < \infty$, то $\boldsymbol{N}\big(\mathcal{E}(G)\big) = \operatorname{Ann}(\operatorname{Soc} G)$, где $\boldsymbol{N}\big(\mathcal{E}(G)\big)$ — ниль-радикал кольца $\mathcal{E}(G)$,

$$\operatorname{Ann}(\operatorname{Soc} G) = \{\varphi \in \mathcal{E}(G) \mid \varphi(x) = 0,\ x \in \operatorname{Soc} G\}.$$

Так как радикал Джекобсона $\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)$ нильпотентен, он является ниль-идеалом [2]. Следовательно, $\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)(\operatorname{Soc} G) = 0$.

Возьмём произвольные элементы $g \in \operatorname{Soc} G$ и $\varphi \in \boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big) \subseteq \boldsymbol{I}$. Элемент g предста́вим в виде

$$g = n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3,$$

где $n_i \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, 3)$. Тогда

$$\varphi(g) = \varphi(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3) = n_1\varphi(x_1) + n_2\varphi(x_2) + n_3\varphi(x_3).$$

Значит, для того чтобы выполнялось равенство $\varphi(g) = 0$, достаточно выполнения условий $\varphi(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Учитывая равенства (3), получаем

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3 = 0,\\ &\alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3 = 0,\\ &\alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = 0,$$

то равенства (6) примут вид

$$\begin{aligned} &\alpha_{12}x_1 = 0,\\ &\alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Из первого равенства следует, что $\alpha_{12} = 0$. Элементы x_1 и x_2 линейно независимы. Тогда из второго равенства получаем, что $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$.

Таким образом,

$$\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_{14}\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24}\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle|\, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Так как $\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big) = \operatorname{Ann}(\operatorname{Soc} G)$, то $G/\operatorname{Soc} G$ является $\mathcal{E}(G)/\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)$-модулем. Поэтому $G/\operatorname{Soc} G$ можно рассматривать как векторное пространство над полем $\mathcal{E}(G)/\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)$. При этом должно выполняться следующее условие:

$$\dim_{\mathbb{Q}}(G/\operatorname{Soc} G) = \dim_{\mathcal{E}(G)/\boldsymbol{J}(\mathcal{E}(G))}(G/\operatorname{Soc} G) \cdot \dim_{\mathbb{Q}}\Big(\mathcal{E}(G)/\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)\Big).$$

Но $\dim_{\mathbb{Q}}(G/\operatorname{Soc} G) = 1$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{Q}}\Big(\mathcal{E}(G)/\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)\Big) = 1$. Получили, что

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y\\ 0 & x & 0 & z\\ 0 & 0 & x & t\\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle|\, x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A_3}.$$

По условию теоремы $\operatorname{Soc} G \neq G$. Следовательно, $\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big) \neq 0$ [2]. Значит, если $\operatorname{Soc} G$ имеет ранг 3, то $1 \leqslant \dim_{\mathbb{Q}}\Big(\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)\Big) \leqslant 3$.

Легко проверить, что

$$\dim_{\mathbb{Q}}\Big(\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)\Big) = 1 \iff \mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_1},$$
$$\dim_{\mathbb{Q}}\Big(\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)\Big) = 2 \iff \mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_2},$$
$$\dim_{\mathbb{Q}}\Big(\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)\Big) = 3 \iff \mathcal{E}(G) \cong \mathbf{A_3}.$$

Таким образом, теорема полностью доказана. □

Литература

[1] Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.

[2] Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Мат. сб. — 1974. — Т. 95, № 10. — С. 214—228.

[3] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974, 1977.