

# Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем\*

**В. В. ТРОФИМОВ, М. В. ШАМОЛИН**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова*

e-mail: shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

УДК 517+531.01

**Ключевые слова:** интегрируемая система, гамильтонова система, диссипативная система, характеристический класс, первый интеграл.

## Аннотация

В работе излагаются результаты, относящиеся к теории геометрических инвариантов вполне интегрируемых гамильтоновых систем, а также к классификации интегрируемых случаев из динамики маломерного и многомерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Последние задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией. Первая часть работы представляет собой основу докторской диссертации В. В. Трофимова (1953–2003), которая по частям ранее уже была опубликована. Тем не менее в нынешнем цельном виде она не выходила в свет, этот пробел мы решили восполнить. Вторая же часть является уже развитием результатов, изложенных в докторской диссертации М. В. Шамолина и также в настоящем варианте не появлялась. Эти две части достаточно хорошо дополняют друг друга, что и инициировало данную работу (её наброски возникли ещё в 1997 году).

## Abstract

*V. V. Trofimov, M. V. Shamolin, Geometric and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 4, pp. 3–229.*

This paper presents results referred to geometric invariant theory of completely integrable Hamiltonian systems and also to the classification of integrable cases of low-dimensional and high-dimensional rigid body dynamics in a nonconservative force field. The latter problems are described by dynamical systems with variable dissipation. The first part of the work is the base the doctoral dissertation of V. V. Trofimov (1953–2003), which was in parts already published. However, in the present entire form, it was not appeared, and we decided to fill in this gap. The second part is a development of the results presented in the doctoral dissertation of M. V. Shamolin, and it was not appeared in the present variant. These two parts well complement one another, which initiated this work (its sketches already appeared in 1997).

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00231-а).

## Содержание

|                                                                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение</b>                                                                                                       | <b>6</b>  |
| <b>1. Тензорные расширения алгебр Ли</b>                                                                              | <b>18</b> |
| 1.1. Теорема инволютивности для тензорных расширений алгебр Ли . . .                                                  | 18        |
| 1.2. Уравнения Эйлера на тензорных расширениях и аналоги<br>уравнений магнитной гидродинамики . . . . .               | 29        |
| 1.3. Секционные операторы для алгебры Ли $\Omega(G)$ . . . . .                                                        | 31        |
| 1.4. Интегралы уравнений Эйлера на $\Omega(G)^*$ . . . . .                                                            | 37        |
| 1.5. Общая конструкция секционных операторов . . . . .                                                                | 41        |
| 1.6. Канонические координаты на орбитах коприсоединённого<br>представления тензорных расширений групп Ли . . . . .    | 44        |
| <b>2. Обобщённые классы Маслова</b>                                                                                   | <b>45</b> |
| 2.1. Обобщённые классы Маслова на пространстве путей . . . . .                                                        | 45        |
| 2.2. Проекция обобщённых классов Маслова из пространства путей<br>в многообразия . . . . .                            | 50        |
| 2.3. Индексы подмногообразий в многообразиях с аффинной<br>связностью . . . . .                                       | 54        |
| 2.4. Обобщённый индекс Маслова лагранжева подмногообразия<br>в симплектическом многообразии . . . . .                 | 56        |
| 2.5. Индексы торов Лиувилля . . . . .                                                                                 | 59        |
| 2.6. Характеристические классы и индексы на торах Лиувилля . . . . .                                                  | 60        |
| 2.7. Обобщённые классы Маслова в симплектических векторных<br>расслоениях . . . . .                                   | 65        |
| 2.8. Характеристические классы в псевдоримановой геометрии . . . . .                                                  | 68        |
| 2.9. Теорема де Рама и примеры симплектических связностей . . . . .                                                   | 72        |
| 2.10. Лоскутно-аффинные многообразия . . . . .                                                                        | 79        |
| <b>3. Обобщённые классы Маслова, минимальные поверхности<br/>и гамильтоновы системы</b>                               | <b>82</b> |
| 3.1. Относительные характеристические классы минимальных<br>поверхностей . . . . .                                    | 82        |
| 3.2. Плоские симплектические связности на орбитах<br>коприсоединённого представления трёхмерных групп Ли . . . . .    | 83        |
| 3.3. Плоские симплектические связности на орбитах<br>коприсоединённого представления четырёхмерных групп Ли . . . . . | 91        |
| 3.4. Плоские симплектические связности на орбитах<br>коприсоединённого представления пятимерных групп Ли . . . . .    | 102       |

|                                                                                                                                                                               |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.5. Плоские симплектические связности на орбитах<br>коприсоединённого представления нильпотентных групп Ли<br>размерности шесть . . . . .                                    | 141        |
| 3.6. Плоские симплектические связности на орбитах<br>коприсоединённого представления тензорных расширений групп<br>Ли малых размерностей . . . . .                            | 159        |
| <b>4. Полная интегрируемость некоторых классов неконсервативных<br/>систем</b>                                                                                                | <b>168</b> |
| 4.1. Предварительные рассуждения и результаты . . . . .                                                                                                                       | 169        |
| 4.2. Динамические системы с переменной диссипацией как класс<br>систем, допускающих полное интегрирование . . . . .                                                           | 171        |
| 4.3. Системы с симметриями и переменной диссипацией с нулевым<br>средним . . . . .                                                                                            | 174        |
| 4.4. Системы на $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ , или двумерном цилиндре . . .                                                                       | 176        |
| 4.5. Системы на $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times \mathbb{R}^2\{z_1, z_2\}$ , или<br>касательном расслоении к двумерной сфере . . . . . | 178        |
| <b>5. Случаи полной интегрируемости в трансцендентных функциях<br/>в динамике и некоторые инвариантные индексы</b>                                                            | <b>181</b> |
| 5.1. Системы из плоской динамики твёрдого тела,<br>взаимодействующего со средой . . . . .                                                                                     | 181        |
| 5.2. Системы из пространственной динамики твёрдого тела,<br>взаимодействующего со средой . . . . .                                                                            | 190        |
| 5.3. Инвариантные индексы, характеризующие счётные семейства<br>неэквивалентных фазовых портретов . . . . .                                                                   | 198        |
| <b>6. Случаи полной интегрируемости в динамике симметричного<br/>четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле</b>                                                     | <b>207</b> |
| 6.1. Различные варианты движения . . . . .                                                                                                                                    | 207        |
| 6.2. Два случая динамической симметрии четырёхмерного тела . . . .                                                                                                            | 208        |
| 6.3. Физические предположения и уравнения на $so(4)$ . . . . .                                                                                                                | 209        |
| 6.4. Динамика в $\mathbb{R}^4$ . . . . .                                                                                                                                      | 210        |
| 6.5. Обобщённая задача о движении тела под действием следящей<br>силы . . . . .                                                                                               | 210        |
| 6.6. Случай (6.1) . . . . .                                                                                                                                                   | 210        |
| 6.7. Случай (6.2) . . . . .                                                                                                                                                   | 213        |
| <b>7. Заключение</b>                                                                                                                                                          | <b>216</b> |

*Светлой памяти профессора  
Валерия Владимировича Трофимова*

Ничего нельзя узнать, ничему нельзя научиться, ни в чём нельзя удостовериться: чувства ограничены, разум слаб, жизнь коротка.

Анаксагор

## Введение

Первая часть работы представляет собой основу докторской диссертации В. В. Трофимова (1953—2003), которая по частям ранее уже была опубликована. В нынешнем цельном виде она не выходила в свет, этот пробел его соавтор и решил восполнить.

Построение и классификация вполне интегрируемых гамильтоновых систем на симплектических многообразиях — одна из центральных проблем симплектической геометрии. Бурное развитие этого раздела пришлось на восьмидесятые годы XX века. Были найдены новые эффективные методы построения вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Достаточно упомянуть школы С. П. Новикова [72, 110], А. Т. Фоменко [159, 160], В. П. Маслова [100, 101], Л. Д. Фаддеева [128], В. И. Арнольда [19, 20], Марсдена [213], Вейнштейна [242]. Получены глубокие классификационные теоремы для вполне интегрируемых систем с двумя степенями свободы — теория А. Т. Фоменко [159, 160]. Новые дифференциально геометрические идеи развивались М. Громовым [206]. Используя геометрические свойства почти комплексных структур, согласованных с симплектической структурой, он построил новые инварианты симплектических многообразий.

Задача построения вполне интегрируемых гамильтоновых систем на орбитах коприсоединённого представления групп Ли является одной из важнейших в современной симплектической геометрии. Многие проблемы прикладного и теоретического характера естественно приводят к этим задачам; отметим, к примеру, важную задачу интегрирования геодезических потоков. Основными методами построения таких систем служат сдвиги инвариантов коприсоединённого представления группы Ли, цепочки подалгебр, сдвиги базисных функций конечномерных представлений в функциональных пространствах, согласованные скобки Пуассона,  $R$ -матрицы. Полный обзор этих методов можно найти в [154—157].

Для классификации интегрируемых гамильтоновых систем в настоящее время используются инварианты различной природы (см., например, работы А. Т. Фоменко, А. В. Болсинова, А. А. Ошемкова). В. П. Масловым [100, 101] было открыто, что для построения глобальных асимптотических решений дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) (\lambda^{-1} D_x)^\alpha f(x) = 0$$

имеется фундаментальное препятствие — известные классы Маслова. Это же препятствие возникает в задаче построения трансверсальных лагранжевых под-расслоений в симплектических расслоениях. Классы Маслова изучались с различных точек зрения и были обобщены на высшие размерности в работах В. И. Арнольда, А. Б. Гивенталя, М. В. Карасёва, Д. Б. Фукса, Ж. Лиона, М. Вернь, П. Дазора, М. де Госсона, Дж. Морвана (см., например, [17, 20, 76, 95, 162, 200, 205, 211, 215]). Первое такое обобщение было сделано В. И. Арнольдом и изучено Д. Б. Фуком [17, 162]. В связи с конструкциями обобщённых классов Маслова естественным образом возникают симплектические связности. Этот объект изучался в работах В. С. Буслаева, Е. А. Налимовой, М. Б. Верникова, Ю. И. Леви, В. Г. Леймлейна, Х. Гессе, А. Лихнеровича, Р. Мирона, В. Опроя, Ф. Тондёра, Дж. Вея (см., например, [41, 45, 88, 90, 91, 103, 209, 212, 214, 234, 240]).

В современной математической физике большую роль играют алгебры Ли малых размерностей (см. [73, 216]). В [216] были вычислены инварианты коприсоединённого представления групп Ли малых размерностей. Мы будем использовать результаты и обозначения этой работы.

Данная работа состоит из шести глав. В первой главе развивается метод построения вполне интегрируемых гамильтоновых систем на орбитах коприсоединённого представления групп Ли. Построена новая теория вполне интегрируемых гамильтоновых систем на тензорных расширениях алгебр Ли. В качестве приложения этой методики найдены новые примеры вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Оказалось, что таким способом можно доказать полную интегрируемость ранее известных уравнений, обобщающих на многомерный случай конечномерные аналоги уравнений магнитной гидродинамики. Главными результатами этой главы являются новый метод построения вполне интегрируемых гамильтоновых систем и теорема о полной интегрируемости уравнений Эйлера на тензорных расширениях полупростых алгебр Ли и, в частности, аналоги уравнений магнитной гидродинамики, что составляет основное содержание работ [136—142, 144—150, 236].

Вторая глава посвящена геометрическим конструкциям, необходимым для классификации гамильтоновых систем с большим запасом первых интегралов. Разработан новый метод построения геометрических инвариантов, основанный на предложенном авторами обобщении классов Маслова. Во второй главе изучены свойства обобщённых классов Маслова различных геометрических структур, это составляет основное её содержание. Основные результаты этой главы опубликованы в [139—142, 144—151, 236—239].

В третьей главе исследованы вполне интегрируемые системы с нетривиальными обобщёнными классами Маслова на орбитах коприсоединённого представления групп Ли малых размерностей. Приведены обширные технические вычисления. Построение вполне интегрируемых гамильтоновых систем на тензорных расширениях алгебр Ли малых размерностей описано в [135].

В качестве примера укажем только одно важное следствие предъявленных новых методик исследования вполне интегрируемых гамильтоновых систем на однородных симплектических многообразиях.

**Следствие.** Пусть  $G$  — неразложимая вещественная алгебра Ли,  $\dim G = 3, 4, 5$ ,  $G \neq \mathfrak{so}(3)$ , или  $G$  — неразложимая вещественная нильпотентная алгебра Ли,  $\dim G = 6$ . Тогда на всех орбитах  $\mathcal{O}_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $g_s$ , отвечающей алгебре Ли

$$G_s = (\dots (G \otimes \mathbb{R}[x_1]/(x_1^2)) \otimes \dots) \otimes \mathbb{R}[x_s]/(x_s^2),$$

определены нетривиальные классы Маслова, где  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+1}$ , если  $\dim G = 3$ ;  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+2}$ , если  $\dim G = 4$  и  $\text{ind } G = 0$ ;  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+1}$ , если  $\dim G = 4$  и  $\text{ind } G = 2$ ;  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+2}$ , если  $\dim G = 5$  и  $\text{ind } G = 1$ ;  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+1}$ , если  $\dim G = 5$  и  $\text{ind } G = 3$ ;  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+1}$ , если  $\dim G = 6$  и  $\text{ind } G = 4$ ;  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+2}$ , если  $\dim G = 6$  и  $\text{ind } G = 2$ .

На всех этих орбитах построены в явном виде вполне интегрируемые гамильтоновы системы, на торах Лиувилля которых индексы Маслова нетривиальны.

Опишем теперь первые три главы подробнее, а затем перейдём к рассмотрению содержания последних глав.

Первая глава посвящена изложению нового метода построения вполне интегрируемых гамильтоновых систем. Оказывается, что по каждой алгебре Ли  $G$ , для которой на пространстве  $G^*$  имеется полный инволютивный набор функций, можно построить бесконечную серию алгебр Ли

$$G \otimes \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/(x_1^{m_1+1}, \dots, x_n^{m_n+1}),$$

обладающих этим же свойством.

В разделе 1.1 излагается основной алгоритм, связанный с тензорными расширениями алгебр Ли. Пусть  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  — многочлены. Рассмотрим фактор-кольцо  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/(a_1, \dots, a_q) = \mathcal{K}$ , где  $(a_1, \dots, a_q)$  — идеал в  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ , порождённый  $a_1, \dots, a_q$ ,  $\pi: \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathcal{K}$  — естественная проекция,  $\varepsilon_i = \pi(x_i)$ .

Расширим кольцо скаляров алгебры Ли  $G$  до кольца  $\mathcal{K}$ , т. е. рассмотрим алгебру Ли  $G \otimes \mathcal{K} = G_{\mathcal{K}}$  с естественной скобкой Ли. Поле  $\mathbb{R}$  лежит в  $\mathcal{K}$ , поэтому  $G \otimes \mathcal{K} = G_{\mathcal{K}}$  можно рассматривать как алгебру Ли над  $\mathbb{R}$ . Полученную алгебру Ли обозначим через  $\Omega_a(G)$ , где  $a = (a_1, \dots, a_q)$ . Вообще говоря, не существует методики продолжения функций с пространства  $G^*$  на  $G_{\mathcal{K}}^*$  для произвольного набора  $a = (a_1, \dots, a_q)$ . Основные результаты работы относятся к случаю, когда  $a = (x_1^{m_1+1}, \dots, x_n^{m_n+1})$ .

Пусть  $e_1, \dots, e_r$  — базис алгебры Ли  $G$ . Тогда векторы  $\varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} e_j$ ,  $1 \leq j \leq r = \dim G$ ,  $0 \leq \alpha_i \leq m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , образуют базис алгебры Ли  $\Omega_a(G)$ . Координаты в  $G^*$  в базисе, дуальном к  $e_i$ , обозначим через  $x_i$ , а координаты

в  $\Omega_a(G)^*$  в базисе, дуальном к  $\varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} e_j$ , обозначим через  $x(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_j$ . Введём в  $\Omega_a(G)^*$  переменные

$$z_i = \sum_{\alpha_j + \beta_j = m_j} \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} x(\beta_1, \dots, \beta_n)_i.$$

Пусть  $F(x_1, \dots, x_r)$  — аналитическая функция на  $G^*$  (или на некотором открытом подмножестве  $U \subset G^*$ ). Раскладывая  $F(z_1, \dots, z_r)$  в ряд Тейлора и подставляя  $z_i$ , мы получим конечную сумму, так как достаточно высокие степени элементов  $\varepsilon_i$  равны нулю. Поэтому  $F(z_1, \dots, z_r)$  можно представить в виде

$$F(z_1, \dots, z_r) = \sum_{0 \leq \alpha_j \leq m_j, j=1, \dots, n} \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x(\beta_1, \dots, \beta_n)_i).$$

Обозначим набор функций  $\{F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$  через  $\mathcal{A}(F)$ .

Основное свойство алгоритма (A) содержится в следующей теореме.

**Теорема.** Пусть аналитические функции  $F_1(x), \dots, F_N(x)$ , определённые на пространстве  $G^*$ , находятся в инволюции относительно канонической симплектической структуры на всех орбитах коприсоединённого представления группы Ли, ассоциированной с алгеброй Ли  $G$ . Тогда все функции из семейства  $\mathcal{A}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(F_N)$  находятся в инволюции относительно канонической симплектической структуры на всех орбитах коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega_a(g)$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega_a(G)$ . Если  $\{F_i\}$  функционально независимы на  $G^*$ , то все функции из семейства  $\mathcal{A}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(F_N)$  функционально независимы на пространстве  $\Omega_a(G)^*$ . Если  $G$  — алгебраическая алгебра Ли, то из того, что  $F_1, \dots, F_N$  — полный инволютивный набор функций на  $G^*$ , вытекает, что  $\mathcal{A}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(F_N)$  — полный инволютивный набор функций на  $\Omega_a(G)^*$ .

В разделе 1.2 изучаются уравнения Эйлера на пространствах  $\Omega_a(G)^*$ . Оказывается, что методика, изложенная в разделе 1.1, позволяет доказать гамильтоновость известных уравнений, связанных с магнитной гидродинамикой. Уравнения магнитной гидродинамики несжимаемой невязкой идеально проводящей жидкости имеют в качестве конечномерного аналога следующую систему дифференциальных уравнений, найденную в [46]:

$$\dot{M} = [\Omega, M] - [H, J], \quad \dot{H} = [\Omega, H].$$

Здесь  $M, H \in \mathfrak{so}(n)$  и  $\Omega = (R_g^{-1})^*$ ,  $\dot{g}$  — правый сдвиг на единицу группы  $\mathrm{SO}(n)$  вектора скорости  $\dot{g} \in T_g \mathrm{SO}(n)$ ,  $J = \mathrm{Ad}_g h$ ,  $h$  — напряжённость магнитного поля в теле,  $M$  — кинетический момент в пространстве.

**Теорема.** Уравнения  $\dot{M} = [\Omega, M] - [H, J]$ ,  $\dot{H} = [\Omega, H]$  являются гамильтоновыми на всех орбитах коприсоединённого представления группы Ли, ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega(\mathfrak{so}(n)) = \mathfrak{so}(n) \otimes (\mathbb{R}[x]/(x^2))$ .

В разделе 1.3 строятся операторы  $C: \Omega(G)^* \rightarrow \Omega(G)$ , для которых уравнения Эйлера из раздела 1.2 будут обладать свойством полной интегрируемости по Лиувиллю. Построенные операторы имеют следующий вид:

$$C = C(a, b, D) = \begin{pmatrix} \Phi_a^{-1} \text{ad}_b^* & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad C: \Omega(G)^* \rightarrow \Omega(G),$$

где  $\Phi_a^{-1}(x) = \text{ad}_x^* a$ ,  $x \in \Omega(G)$ ,  $a \in \Omega(G)^*$ ,  $a = (0, a_1) \in \Omega(G)^*$  — элемент общего положения в  $\Omega(G)^*$ ,  $b \in \ker \Phi_a$  — элемент общего положения в алгебре Ли  $\Omega(G)$ ,  $D: \ker \text{ad}_b^* \rightarrow \ker \Phi_a$  — произвольный самосопряжённый линейный оператор,  $\Omega(G) = G \otimes (\mathbb{R}[x]/(x^2))$ .

Это построение выполнено для комплексных полупростых алгебр Ли, компактных вещественных форм в полупростых комплексных алгебрах Ли, нормальных компактных подалгебр в комплексных полупростых алгебрах Ли.

В разделе 1.4 доказывается теорема о полной интегрируемости уравнений Эйлера с построенными в разделе 1.3 операторами инерции.

**Теорема.** Пусть  $G$  — комплексная полупростая алгебра Ли, или её компактная вещественная форма, или нормальная компактная подалгебра,  $\dot{x} = \text{ad}_{C(x)}^*(x)$  — уравнения Эйлера на пространстве  $\Omega(G)^*$  с описанными выше операторами инерции  $C$ . Тогда эта система уравнений Эйлера вполне интегрируема по Лиувиллю на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления группы Ли, ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega(G)$ . Соответствующий коммутативный набор первых интегралов строится с использованием алгоритма (A), описанного в разделе 1.1.

В разделе 1.5 излагается общая конструкция линейных операторов, для которых уравнения Эйлера  $\dot{x} = \text{ad}_{C(x)}^*(x)$  обладают большим запасом первых интегралов, коммутирующих между собой.

В разделе 1.6 показано, как, используя алгоритм (A), можно канонические координаты на орбитах коприсоединённого представления группы Ли  $g$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $G$ , продолжить до канонических координат на орбитах коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega(g)$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega(G) = G \otimes (\mathbb{R}[x]/(x^2))$ .

Во второй главе строятся инварианты, необходимые для классификации гамильтоновых систем с большим запасом первых интегралов. Более точно, излагается конструкция обобщённых классов Маслова—Арнольда для случая произвольных многообразий с аффинной связностью.

В разделе 2.1 показано, что естественное обобщение классов Маслова—Арнольда приводит к построению некоторых классов когомологий пространства путей. Напомним сначала классическую конструкцию классов Маслова—Арнольда. Если  $N^n$  — лагранжево подмногообразие стандартного симплектического пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , то связывание с точкой  $x \in N^n$  перенесённого в начало  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$  касательного пространства  $T_x N^n$  определяет отображение

$$f: N^n \rightarrow \Lambda(n) \cong U(n)/O(n).$$

Отображение  $f$  индуцирует отображение  $f^*$  в когомологиях

$$f^*: H^*(\Lambda(n)) \rightarrow H^*(N^n),$$

позволяющее определить характеристические классы лагранжева подмногообразия  $N^n$ : если  $a \in H^*(\Lambda(n))$ , то определён класс когомологий  $f^*(a) \in H^*(N^n)$ .

Всё это можно переписать для многообразий с аффинной связностью. Пусть  $X^n$  — гладкое многообразие, на котором задана аффинная связность  $\Gamma_{jk}^i$ ,  $L^m$  — произвольное подмногообразие в  $X^n$ . В этой ситуации определены обобщённые классы Маслова подмногообразия  $L^m$ . Выберем и зафиксируем точку  $x_0 \in X^n$ . Введём обозначение

$$[X^n, L^m] = \{\alpha: [0, 1] \rightarrow X^n\},$$

$\alpha$  — такое кусочно-гладкое отображение отрезка  $[0, 1]$  в многообразие  $X^n$ , что  $\alpha(0) = x_0$  и  $\alpha(1) \in L^m$ .

Определим отображение  $f: [X^n, L^m] \rightarrow G_m(T_{x_0}X^n)$  пространства  $[X^n, L^m]$  в грассманиан  $G_m(T_{x_0}X^n)$ , порождённый касательным пространством  $T_{x_0}X^n$ ,  $m = \dim L^m$ . Если  $\alpha \in [X^n, L^m]$ , то касательное пространство  $T_{\alpha(1)}L^m$  переносится параллельно относительно связности  $\Gamma_{jk}^i$  в точку  $x_0 = \alpha(0)$  вдоль пути  $\alpha$ . Образ пространства  $T_{\alpha(1)}L^m$  при этом параллельном переносе обозначим через  $f(\alpha)$ . Подпространство  $f(\alpha)$  является по определению образом пути  $\alpha$  при отображении  $f$ , которое назовём *касательным представлением многообразия  $L^m$* . Оно индуцирует отображение  $f^*$  в когомологиях  $f^*: H^*(G_m(T_{x_0}X^n)) \rightarrow H^*([X^n, L^m])$ .

Пусть  $a \in H^*(G_m(T_{x_0}X^n))$  — произвольный класс когомологий грассманиана  $G_m(T_{x_0}X^n)$ . Тогда классы когомологий вида  $f^*(a) \in H^*([X^n, L^m])$  назовём обобщёнными классами Маслова подмногообразия  $L^m \subset X^n$ .

Основные свойства этих классов собраны в следующей теореме.

**Теорема.**

1. Обобщённые классы Маслова не зависят от выбора связности  $\Gamma_{jk}^i$  на многообразии  $L^m \subset X^n$ .
2. Если  $L^m \subset \mathbb{R}^{2n}$  — лагранжево подмногообразие в стандартном симплектическом пространстве

$$\left( \mathbb{R}^{2n}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n), \omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i \right),$$

то обобщённые классы Маслова, определённые относительно симплектической связности на  $\mathbb{R}^{2n}$ , совпадают с классическими классами Маслова—Арнольда (после естественных отождествлений пространств когомологий).

3. Классы Маслова—Арнольда лагранжева подмногообразия  $L^n \subset \mathbb{R}^{2n}$  не зависят от выбора плоской симплектической связности в пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$ .

В разделе 2.2 показано, что в некоторых случаях характеристические классы, определённые на пространстве путей  $[X^n, L^m]$ , где  $X^n$  — многообразие с аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i$ , можно спроектировать в некоторые классы когомологий подмногообразия  $L^m$ . Однако результат проекции уже зависит от выбора связности.

Итак, пусть  $M^m$  — многообразие с аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i$ . Параллельный перенос вдоль кривой  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , из фиксированной точки  $x_0 = \gamma(0)$  в точку  $x = \gamma(1)$  обозначим через  $\tau_\gamma^{-1}$ . Если  $V$  — произвольное подпространство касательного пространства  $T_{x_0}M^m$ , то  $\tau_\gamma^{-1}V$  — корректно определённое подпространство в  $T_xM^m$ .

Предположим, что  $x = x_0 = \gamma(0) = \gamma(1)$ . Тогда предыдущее замечание показывает, что группа голономии  $H = H_{x_0}(M^m)$  с базисной точкой  $x_0$  действует на грассмановом многообразии  $G_k(T_{x_0}M^m)$ ,  $k = \dim V$ .

Введём в рассмотрение приведённое пространство Грассмана (приведённый грассманиан)

$$HG_k(T_{x_0}M^m) = G_k(T_{x_0}M^m)/H_{x_0}(M^m).$$

Предположим, что  $N^n \subset M^m$  — произвольное подмногообразие, а  $x_0 \in M^m$  — фиксированная точка. Для произвольной точки  $x \in N^n$  рассмотрим произвольную кривую  $\gamma(t)$ , такую что  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x$ , и параллельный перенос  $\tau_\gamma^{-1}$  из точки  $x_0$  в точку  $x$  вдоль  $\gamma$ . Тогда можно было бы определить отображение  $f: N^n \rightarrow G_n(T_{x_0}M^m)$  по правилу  $f(x) = \tau_\gamma(T_xN^n) \subset T_{x_0}M^m$ , но это определение некорректно. Если имеется ещё одна кривая  $\beta(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , такая что  $\beta(0) = x_0$ ,  $\beta(1) = x$ , то определено подпространство  $\tau_\beta(T_xN^n) \subset T_{x_0}M^m$ . Имеется линейное преобразование  $A \in H = H^*(M^m)$  из группы голономии  $H = H^*(M^m)$ , такое что  $A(\tau_\beta(T_xN^n)) = \tau_\gamma(T_xN^n)$ . Поэтому мы имеем корректно определённое отображение  $f: N^n \rightarrow HG_n(T_{x_0}M^m)$  подмногообразия  $N^n$  в приведённый грассманиан  $HG_n(T_{x_0}M^m)$ .

Отображение  $f$  индуцирует отображение  $f^*$  в когомологиях

$$f^*: H^*(HG_n(T_{x_0}M^m)) \rightarrow H^*(N^n).$$

Тогда определены естественные характеристические классы

$$a(N^n) = f^*(a) \in H^*(N^n),$$

$a \in H^*(HG_n(T_{x_0}M^m))$  — произвольный класс когомологий приведённого грассманиана. Эти классы назовём *относительными характеристическими классами пары*  $(M^m, N^n)$ .

Показано, что эти классы обращаются в нуль для вполне геодезических подмногообразий.

В разделе 2.3 вводится понятие индекса подмногообразия, которое необходимо для того, чтобы сравнивать относительные характеристические классы разных подмногообразий в данном многообразии с аффинной связностью. Интегрирование соответствующих классов когомологий по рассматриваемому подмногообразию даёт индекс  $a[N^n]$  подмногообразия  $M^m \subset N^n$ .

Динамические системы можно классифицировать с разных точек зрения. А. Т. Фоменко поставил задачу классификации гамильтоновых вполне интегрируемых систем с точностью до бордантности. Это понятие находит своё отражение в рамках общей теории классов Маслова в аффинной геометрии. Два замкнутых ориентированных многообразия  $N_1^n$  и  $N_2^n$  называются *vf-кобордантными* (кобордизм с векторными полями), если существуют компактное ориентированное многообразие  $W^{n+1}$ , такое что  $\partial W^{n+1} = N_1^n \cup N_2^n$ , и невырожденное касательное векторное поле  $v$  на  $W^{n+1}$ , которое определяется внутренними нормальными в точках  $N_1^n$  и внешними нормальными в точках  $N_2^n$ . Имеется полное описание таких кобордизмов (см. [220]).

**Теорема.** Пусть подмногообразие  $N^n$  в многообразии  $M^m$  с аффинной связностью *vf*-кобордантно нулю. Тогда все индексы подмногообразия  $N^n$  равны нулю.

В разделе 2.4 вводятся обобщённые классы Маслова и соответствующие индексы для лагранжевых подмногообразий в симплектических многообразиях. Для их построения мы должны рассмотреть специальный класс связностей на симплектических многообразиях — симплектические связности. Такие связности характеризуются равенством  $\nabla_k \omega_{ij} = 0$ , где  $\omega_{ij}$  — симплектическая структура на многообразии  $M^{2n}$ . В этой ситуации группа голономии действует на лагранжевом грассманиане  $\Lambda(T_{x_0} M^{2n})$ , и мы можем определить приведённый лагранжев грассманиан  $H\Lambda(T_{x_0} M^{2n})$  и отображение  $f: N^n \rightarrow H\Lambda(T_{x_0} M^{2n})$  лагранжева подмногообразия  $N^n$  в приведённый лагранжев грассманиан  $H\Lambda(T_{x_0} M^{2n})$ . В этой ситуации имеются обобщённые классы Маслова  $f^*(a)$  для лагранжева подмногообразия  $N^n$ , где  $f^*: H^*(H\Lambda(T_{x_0} M^{2n})) \rightarrow H^*(N^n)$ .

Указано соответствующее отношение кобордантности лагранжевых подмногообразий и доказана теорема инвариантности обобщённых индексов Маслова относительно этого отношения эквивалентности.

В разделе 2.5 рассмотрен случай вполне интегрируемых гамильтоновых систем  $\dot{x} = \text{sgrad } H$  на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$ . Пусть  $F_1, \dots, F_n$  — полный инволютивный набор первых интегралов. Тогда совместная компактная связная поверхность уровня

$$\{x \in M^{2n} : F_1(x) = c_1, \dots, F_n(x) = c_n\}$$

является лагранжевым тором, и для него определены обобщённые классы Маслова.

В разделе 2.6 строится плоская симплектическая связность, ассоциированная с вполне интегрируемой гамильтоновой системой, которая позволяет построить нетривиальные классы и индексы Маслова на торах Лиувилля вполне интегрируемой гамильтоновой системы. Здесь же предложен алгоритм для продолжения плоских метрик с многообразия  $M$  на касательное расслоение  $TM$ , что позволяет строить богатые серии примеров плоских симплектических связностей.

В разделе 2.7 конструкции раздела 2.1 распространяются на более общие связности, чем связности в касательном расслоении к многообразию. Построение

ны обобщённые классы Маслова для подрасслоений в векторных расслоениях, а также для лагранжевых подрасслоений в симплектических векторных расслоениях. Определено соответствующее понятие кобордантности и доказаны теоремы инвариантности обобщённых индексов относительно этого отношения эквивалентности.

В разделе 2.8 рассмотрен случай псевдоримановых многообразий и изотропных подмногообразий в них. Оказывается, что все основные конструкции обобщённых классов Маслова можно повторить и для этого случая. Введено соответствующее понятие кобордантности и доказана теорема инвариантности по отношению к этому отношению эквивалентности.

В разделе 2.9 исследуются параллельные симплектические структуры на римановых многообразиях. Для них доказано уточнение теоремы де Рама о разложении.

**Теорема.** Пусть  $M$  — связное односвязное полное риманово многообразие, допускающее параллельную относительно связности Леви-Чивита  $\Gamma_{jk}^i$  симплектическую структуру  $\omega_{ij}$ , т. е.  $\Gamma_{jk}^i$  — симплектическая связность. Тогда  $M$  изометрично прямому произведению  $M_0 \times M_1 \times \dots \times M_k$ , где  $M_0$  — евклидово пространство, причём  $\omega|_{M_0}$  — симплектическая структура на  $M_0$ , а  $M_1, \dots, M_k$  — односвязные полные неприводимые римановы многообразия.

В разделе 2.9 также построены примеры параллельных симплектических структур на римановом многообразии.

Используя связности абсолютного параллелизма, построенные по вполне интегрируемой гамильтоновой системе, мы вводим новое понятие относительного класса Маслова одной вполне интегрируемой гамильтоновой системы по отношению к другой.

В разделе 2.10 строится аналог лоскутно-симплектических многообразий, введённых А. Т. Фоменко для изучения понятия жёсткой бордантности интегрируемых гамильтоновых боттовских систем. Оказывается, что для лоскутно-симплектических многообразий существует аналог в теории многообразий с аффинной связностью — лоскутно-аффинные многообразия. Для этого класса многообразий можно определить все основные конструкции обобщённых классов Маслова. В частности, справедлива теорема инвариантности обобщённых индексов подмногообразий относительно  $\text{vf}$ -кобордизма.

В третьей главе рассматриваются приложения обобщённых классов Маслова и их вычисление для торов Лиувилля широких серий вполне интегрируемых гамильтоновых систем на орбитах коприсоединённого представления групп Ли.

В разделе 3.1 обсуждается гипотеза А. Т. Фоменко о том, что классы Маслова—Арнольда «почти всегда» тривиальны для минимальных лагранжевых подмногообразий. Эта гипотеза была доказана в [69, 87] для случая  $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ . А. Т. Фоменко выдвинул гипотезу, что «разумно определённые» характеристические классы типа Маслова—Арнольда для минимальных подмногообразий в симплектических многообразиях должны быть равны нулю. Частичный ответ на этот вопрос даёт конструкция, изложенная выше.

**Теорема.**

1. Пусть  $f: M^m \rightarrow N^{m+1}$  — изометрическая иммерсия, где  $M^m$  — компактное ориентированное риманово многообразие без границы, а  $N^{m+1}$  — плоское ориентированное риманово многообразие. Если  $f$  минимальна и устойчива (относительно функционала объёма), то все относительные характеристические классы пары  $M^m \subset N^{m+1}$  равны нулю.
2. Пусть  $M^m$  — компактное ориентированное подмногообразие без границы в параллелизуемом многообразии  $N^n$ ,  $f$  — изометрия. Если  $f$  минимальна и устойчива (относительно функционала объёма), то все относительные характеристические классы пары  $M^m \subset N^n$  равны нулю.

В разделе 3.2 в явном виде вычислены плоские симплектические связности на орбитах общего положения коприсоединённого представления трёхмерных групп Ли.

**Теорема.** На всех орбитах общего положения коприсоединённого представления трёхмерных групп Ли имеется плоская симплектическая связность, обобщённые классы Маслова по отношению к которой нетривиальны, за исключением группы  $SO(3)$ .

В разделе 3.3 в явном виде вычислены симплектические связности на орбитах общего положения коприсоединённого представления четырёхмерных групп Ли.

**Теорема.** На всех орбитах общего положения коприсоединённого представления четырёхмерных групп Ли имеется плоская симплектическая связность, обобщённые классы Маслова по отношению к которой нетривиальны.

В разделе 3.4 в явном виде вычислены плоские симплектические связности на орбитах общего положения коприсоединённого представления пятимерных групп Ли.

**Теорема.** На всех орбитах общего положения коприсоединённого представления пятимерных групп Ли имеется плоская симплектическая связность, обобщённые классы Маслова по отношению к которой нетривиальны.

В разделе 3.5 в явном виде вычислены плоские симплектические связности на орбитах общего положения коприсоединённого представления нильпотентных шестимерных групп Ли.

**Теорема.** На всех орбитах общего положения коприсоединённого представления нильпотентных шестимерных групп Ли имеется плоская симплектическая связность, обобщённые классы Маслова по отношению к которой нетривиальны.

Кроме того, в разделах 3.2—3.5 на пространстве  $G^*$ , дуальном к алгебре Ли  $G$  (рассмотренной в этих разделах), построены в явном виде такие функции, что после их ограничения на орбиты общего положения коприсоединённого представления мы получим канонические координаты сразу на всех орбитах такого типа.

В разделе 3.6 построены плоские симплектические связности на орбитах общего положения коприсоединённого представления тензорных расширений  $\Omega(g)$  групп Ли, изученных в разделах 3.2—3.5. Доказана нетривиальность обобщённых классов Маслова по отношению к этим связностям. На пространствах  $\Omega(G)^*$ , двойственных к алгебрам Ли  $\Omega(G)$ , указаны такие функции, что после их ограничения на орбиты  $\mathcal{O}$  общего положения коприсоединённого представления мы получим канонические координаты сразу на всех орбитах  $\mathcal{O}$  такого типа.

Вторая часть работы является развитием результатов, изложенных в докторской диссертации М. В. Шамолина и также в настоящем варианте не публиковалась. Две части, по мнению одного из соавторов, достаточно хорошо дополняют друг друга, именно это и инициировало данную работу (её наброски появились ещё в 1997 году).

Если в первой части работы рассматриваются консервативные системы, для которых разработана техника исследования, опирающаяся на топологические инварианты, то во второй её части изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для систем из второй части работы необходимо в некотором смысле «в лоб» интегрировать основное уравнение динамики. Мы обобщаем старые, а также получаем новые случаи полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике двумерного, трёхмерного и четырёхмерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил.

Вторая часть работы посвящена развитию качественных методов в теории неконсервативных систем, возникающих, например, в таких областях науки, как динамика твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, теория колебаний и др. В принципе, данный материал может быть интересен как специалистам по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, динамики твёрдого тела, так и механики жидкости и газа.

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно трудно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удаётся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (например, притягивающих и отталкивающих фокусов).

Получены новые семейства фазовых портретов систем с переменной диссипацией на маломерных и многомерных многообразиях. Обсуждаются вопросы их абсолютной или относительной грубости. Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твёрдого тела, в том числе, в классической задаче о движении сферического маятника, помещённого в поток набегающей среды.

Вторая, «негамильтонова», часть работы тесно связана с «гамильтоновой» первой частью, поскольку в явном виде получены инварианты динамических систем с переменной диссипацией.

В разделе 4.1 приводятся предварительные соображения и кратко обсуждаются полученные ранее результаты. В разделе 4.2 конкретизируются так называемые динамические системы с переменной диссипацией. Данный класс характеризуется как класс систем, в ряде случаев допускающих полное интегрирование. Поскольку в системе присутствуют отталкивающие и притягивающие предельные множества, полное интегрирование если и может производиться, то только в классе трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций.

Сначала обсуждаются наглядные характеристики таких систем, а затем даётся определение (или, точнее, одно из определений) системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним.

В разделе 4.3 вводится в рассмотрение важный класс динамических систем с дополнительными симметриями. На самом деле вводимые симметрии вполне естественны, поскольку, вообще говоря, правую часть системы можно разложить в ряд Фурье, при этом часто бывает, что эти ряды конечны. Вводимый класс систем оказывается классом систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Приводятся естественные примеры из динамики двухмерного и трёхмерного твёрдого тела.

В разделе 4.4 изучаются системы с симметриями на двумерном цилиндре. И хотя часть материала уже появлялась в печати, автор счёл нужным опубликовать этот материал в данном контексте.

Элементы теории систем на касательном расслоении к двумерной сфере изучаются в разделе 4.5. Приводится достаточно общий вид таких систем третьего порядка, допускающих наличие трансцендентных первых интегралов.

Глава 5 посвящена исследованию новых случаев интегрируемости в плоской (двумерной) и пространственной (трёхмерной) динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, т. е. случаев, описываемых динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Подавляющая часть данного материала ранее не публиковалась. Преимущество данного материала состоит в том, что практически все исследуемые системы описывают вполне конкретные движения и имеют соответствующие гидродинамические аналогии.

Особенно важен раздел 5.3. Там на примере конкретной динамической системы вводится характеристический индекс, «кодирующий» тип фазового портрета (абсолютно) грубой системы. При этом каждый такой индекс соответствует топологически изолированному (т. е. неэквивалентному другим типам) типу фазового портрета.

Последняя, шестая, глава посвящена исследованию интегрируемых случаев в динамике четырёхмерного твёрдого тела, помещённого в неконсервативное силовое поле. Она представляет собой относительно законченный результат по исследованию уравнений движения динамически симметричного четырёхмерного твёрдого тела в двух логически возможных случаях в зависимости от вида его тензора инерции, находящегося в неконсервативном поле сил, построенном из поля силы сопротивления, взятого из динамики трёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой.

Конечно, исследованию случаев полной интегрируемости уравнений движения четырёхмерного твёрдого тела посвящено огромное количество работ. Мы не претендуем в данном вопросе на некое первенство. Однако при исследовании «маломерных» уравнений движения вполне конкретных (двумерных и трёхмерных твёрдых тел в неконсервативном поле сил, а именно в поле сил сопротивления) пришла идея обобщить уравнения на случай движения четырёхмерного твёрдого тела в аналогичном поле неконсервативных сил. В результате такого обобщения получились два случая интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырёхмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы, позволяющей методическим образом понизить порядок общей системы динамических уравнений движения и приводящей систему к виду системы с переменной диссипацией с нулевым средним.

Соавтор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору А. В. Михалёву за ценные обсуждения.

## 1. Тензорные расширения алгебр Ли

### 1.1. Теорема инволютивности для тензорных расширений алгебр Ли

#### 1.1.1. Тензорные расширения алгебр Ли

Рассмотрим произвольную алгебру Ли  $G$  размерности  $r$  над полем  $k$ . Обозначим через  $k[x_1, \dots, x_n]$  кольцо многочленов над полем  $k$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Пусть  $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$  — такие многочлены, что  $f_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Пусть  $\mathcal{K}$  — фактор-кольцо:  $\mathcal{K} = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_s)$ , где  $(f_1, \dots, f_s)$  — идеал в  $k[x_1, \dots, x_n]$ , натянутый на полиномы  $f_1, \dots, f_s$ , и  $\pi: k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathcal{K}$  — естественная проекция. Через  $\varepsilon_i$  обозначим образ  $x_i$  при отображении  $\pi$ . Алгебра  $\mathcal{K}$  над полем  $k$  мультипликативно порождается элементами  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathcal{K}$ . Расширим кольцо скаляров алгебры Ли  $G$  до  $\mathcal{K}$ , т. е. рассмотрим алгебру Ли  $G_{\mathcal{K}} = G \otimes \mathcal{K}$  над кольцом  $\mathcal{K}$ . Поле  $k$  лежит в кольце  $\mathcal{K}$ , поэтому мы можем рассматривать алгебру Ли  $G_{\mathcal{K}}$  над полем  $k$ . Полученную алгебру Ли над полем  $k$  обозначим через  $\Omega_f(G)$ , где  $f = (f_1, \dots, f_s)$  — полиномиальное отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такое что  $f(0) = 0$ .

Утверждается, что  $\Omega_f(G)$  является расширением алгебры Ли  $G$ . Для доказательства достаточно построить эпиморфизм алгебр Ли  $g: \Omega_f(G) \rightarrow G$ . Заметим, что любой элемент  $y \in \Omega_f(G)$  можно представить в виде

$$y = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} x_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}, \quad x_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in G.$$

Положим  $g(y) = x_{0, \dots, 0}$ . Очевидно, что это эпиморфизм алгебр Ли. Алгебра Ли  $\Omega_f(G)$  является несущественным расширением алгебры Ли  $G$ . Действительно, поскольку  $G$  вкладывается как подалгебра в  $\Omega_f(G)$ , то  $\Omega_f(G)$  есть полупрямая сумма  $G$  и некоторой алгебры Ли  $M$  по представлению  $\rho: G \rightarrow \text{Der}(M)$ , где  $\text{Der}(M)$  — алгебра Ли дифференцирований  $M$ . В нашем случае  $M$  — идеал в  $G \otimes \mathcal{K}$ , порождённый подпространствами  $\varepsilon_1 G, \dots, \varepsilon_n G$ . Тогда  $\Omega_f(G)$  как линейное пространство есть  $G + M$ . Полупрямая сумма  $G$  и  $M$  берётся по естественному гомоморфизму алгебры Ли  $G$  в алгебру Ли дифференцирований идеала  $M$ :  $\rho(x) = \text{ad}_x$ .

**Замечание.** Положим в вышеизложенной конструкции  $s = 1$ ,  $n = 1$ ,  $f_1(x) = x^2$ ,  $k = \mathbb{R}$ , т. е.  $\mathcal{K} = \mathbb{R}[x]/(x^2)$ . Тогда получим алгебру Ли  $\Omega(G)$ , для которой в [233] предложен алгоритм вычисления инвариантов коприсоединённого представления соответствующей группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $G$ . Этот алгоритм окажется частным случаем описанного ниже алгоритма (A).

**Замечание.** Если рассмотреть произвольное полиномиальное отображение  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  без условия  $f(0) = 0$ , то получим алгебру Ли  $\Omega_f(G)$ , содержащую  $G$  в качестве подалгебры.

Мы будем в дальнейшем заниматься алгебрами Ли  $\Omega_f(G)$ , где

$$f \in (x_1^{m_1+1}, \dots, x_n^{m_n+1}) \in (k[x_1, \dots, x_n])^n.$$

В этом случае расширение  $\Omega_f(G)$  обозначим через  $\Omega_{m_1 \dots m_n}(G)$ .

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис алгебры Ли  $G$ . Тогда векторы

$$\varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} e_j, \quad 1 \leq j \leq r, \quad 0 \leq \alpha_i \leq m_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

образуют базис алгебры Ли  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ .

Обозначим через  $G^*$  пространство, дуальное к пространству  $G$ . Если  $e_i \in G$  ( $i = 1, \dots, r$ ) — базис пространства  $G$ , то дуальный базис в  $G^*$  обозначим через  $e^i$ . Он определяется соотношением  $\langle e^i, e_j \rangle = \delta_j^i$ . Здесь  $\langle f, x \rangle$  — значение функционала  $f \in G^*$  на векторе  $x \in G$ . Координаты в  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , в базисе, дуальном к базису  $\varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} e_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ ,  $0 \leq \alpha_i \leq m_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , обозначим через  $x(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_j$ , а координаты в базисе, дуальном к  $e_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ), — через  $x_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ).

Рассмотрим фактор-кольцо  $\mathcal{K} = \mathbb{R}[x]/(x^2 - \alpha x - \beta)$ . Тогда операция коммутирования в алгебре Ли  $G \otimes \mathcal{K} = \Omega^{\alpha, \beta}(G)$  имеет вид

$$[x_1 + \varepsilon y_1, x_2 + \varepsilon y_2] = [x_1, x_2] + \beta[y_1, y_2] + \varepsilon([y_1, x_2] + [x_1, y_2] + \alpha[y_1, y_2]),$$

$$x_i, y_i \in G \quad (i = 1, 2),$$

здесь  $\varepsilon$  — образ переменной  $x$  при естественной проекции  $\pi: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathcal{K}$ .

Как уже отмечалось выше,  $\Omega^{\alpha, 0}(G)$  является расширением алгебры Ли  $G$ .

**Лемма 1.1.1.** Пусть  $\beta + \alpha^2/4 = \theta + \eta^2/4 = 0$ . Тогда  $\Omega^{\alpha, \beta}(G)$  изоморфна  $\Omega^{\eta, \theta}(G)$  и эти алгебры Ли изоморфны стандартной алгебре Ли  $\Omega^{0, 0}(G)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\beta + \alpha^2/4 = 0$ . Тогда положим  $\varepsilon - \alpha/2 = \delta$  и определим отображение

$$\varphi: \Omega^{\alpha, \beta}(G) = G + \varepsilon G \rightarrow \Omega^{0, 0}(G) = G + \delta G$$

по формуле  $\varphi(x + \varepsilon y) = (x + \alpha y/2) + \delta y$ . Очевидно, что  $\varphi$  — изоморфизм линейных пространств. Из определения коммутатора в алгебрах Ли  $\Omega^{0, 0}(G)$  и  $\Omega^{\alpha, \beta}(G)$  и из того, что  $\beta + \alpha^2/4 = 0$ , непосредственным вычислением получаем, что  $\varphi[x, y] = [\varphi x, \varphi y]$ , т. е.  $\varphi$  является изоморфизмом алгебр Ли, что и утверждалось.  $\square$

В дальнейшем в приложениях к интегрированию уравнений магнитной гидродинамики будет использоваться алгебра Ли  $\Omega^{0, 0}(G)$ , которую мы будем обозначать через  $\Omega(G)$ .

### 1.1.2. Формулировки основных теорем

Пусть  $G$  — алгебра Ли. В пространстве  $\Omega_m(G)^*$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , дуальном к расширению  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , определим переменные

$$z_i = \sum_{\alpha_j + \beta_j = m_j, j=1, \dots, n} \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} x(\beta_1, \dots, \beta_n)_i = x(m_1, \dots, m_n)_i + z'_i =$$

$$= x(m_1, \dots, m_n)_i + \sum_{\alpha_j + \beta_j = m_j, j=1, \dots, n, \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0} \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} x(\beta_1, \dots, \beta_n)_i.$$

**Описание алгоритма (A).** Пусть  $F(x_1, \dots, x_r)$  — аналитическая (например, полиномиальная) функция на пространстве  $G^*$ . На пространстве  $\Omega_m(G)^*$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , рассмотрим функцию  $F(z_1, \dots, z_r)$  со значениями в кольце  $\mathcal{K}$ . Раскладывая  $F(x_1, \dots, x_r)$  в ряд Тейлора и подставляя  $z_i$ , мы получим конечную сумму, так как достаточно высокие степени элемента  $\varepsilon_i$  равны нулю.

Итак,  $F(z_1, \dots, z_r)$  — корректно определённая функция на пространстве  $\Omega_m(G)^*$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , со значениями в алгебре  $\mathcal{K}$ . Эту функцию можно представить в следующем виде:

$$F(z_1, \dots, z_r) = \sum_{0 \leq \alpha_j \leq m_j, j=1, \dots, n} \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x(\beta_1, \dots, \beta_n)_i).$$

Функции  $F_{\alpha_1 \dots \alpha_n} : \Omega(G)^* \rightarrow k$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , назовём *однородными компонентами функции*  $F(z_1, \dots, z_r)$ . Алгоритм (А) по определению функцию  $F$  на пространстве  $G^*$  будет переводить в набор однородных компонент  $\mathcal{A}(F) = \{F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}$  функции  $F(z_1, \dots, z_r)$ .

Отметим, что если  $F(x_1, \dots, x_r)$  — аналитическая функция на открытом подмножестве  $U \subset G^*$ , то функции  $F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  определены на некотором открытом подмножестве  $\hat{U} \subset \Omega_m(G)^*$ . Эта ситуация возникает, например, при рассмотрении рациональных инвариантов коприсоединённого представления.

Цель настоящего раздела — доказательство следующих свойств алгоритма (А).

**Теорема 1.1.2.** Пусть  $F_1, \dots, F_N$  — функционально независимые инварианты коприсоединённого представления односвязной группы Ли  $g$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $G$ . Тогда все функции семейства  $\mathcal{A}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(F_N)$  являются инвариантами коприсоединённого представления односвязной группы Ли  $\Omega_m(g)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , причём инварианты  $\mathcal{A}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(F_N)$  в совокупности функционально независимы на пространстве  $\Omega_m(G)^*$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ .

**Теорема 1.1.3.** Пусть функции  $F_1, \dots, F_N$ , определённые на  $G^*$ , находятся в инволюции относительно формы Кириллова на всех орбитах коприсоединённого представления группы Ли  $g$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $G$ . Тогда все функции  $\mathcal{A}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(F_N)$  на выходе алгоритма (А) находятся в инволюции относительно формы Кириллова на всех орбитах коприсоединённого представления алгебры Ли  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ . Если  $F_1, \dots, F_N$  функционально независимы на  $G^*$ , то все функции семейства  $\mathcal{A}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(F_N)$  функционально независимы на  $\Omega_m(G)^*$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ .

**Определение 1.1.4.** Пусть  $F_1, \dots, F_N$  — полный набор функционально независимых инвариантов коприсоединённого представления группы Ли, ассоциированной с алгеброй Ли  $G$ . Мы скажем, что *инварианты выделяют орбиты*, если размерность орбиты максимальной размерности коприсоединённого представления группы Ли, ассоциированной с  $G$ , равна  $\dim G - N$ .

**Замечание.** Класс таких алгебр Ли непуст. Например, все полупростые алгебры Ли  $G$  и борелевские подалгебры в  $G$  принадлежат этому классу.

Следствием теоремы 1.1.2 является следующее утверждение ( $\text{ind } G$  означает индекс алгебра Ли  $G$ , см. [70]).

**Теорема 1.1.5.** Пусть инварианты алгебры Ли  $G$  выделяют орбиты. Тогда

$$\text{ind } \Omega_m(G) = \dim_k \mathcal{K} \cdot \text{ind } G,$$

причём алгоритм (А) в этом случае перерабатывает полный набор инвариантов коприсоединённого представления группы Ли, ассоциированной с алгеброй Ли  $G$ , в полный набор инвариантов коприсоединённого представления группы Ли, ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ .

**Определение 1.1.6.** Скажем, что семейство  $S$  функций на пространстве  $L^*$ , где  $L$  — алгебра Ли, является *полным инволютивным*, если

- а) любые две функции  $f, g \in S$  находятся в инволюции относительно формы Кириллова на всех орбитах коприсоединённого представления группы Ли  $\mathcal{L}$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $L$ ;
- б) количество функций семейства  $S$  равно

$$N = \text{codim } \mathcal{O} + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O},$$

где  $\mathcal{O}$  — орбита максимальной размерности коприсоединённого представления группы Ли  $\mathcal{L}$ ;

- в) подмножество

$$\{x \in \mathcal{L}: \text{rk}\{df_{1,x}, \dots, df_{N,x}\} < N\}$$

не содержит открытых подмножеств  $S = \{f_1, \dots, f_N\}$ .

В качестве следствия теорем 1.1.3, 1.1.5 и результатов работ [104, 129, 130, 159] мы получим следующее утверждение.

**Теорема 1.1.7.** Пусть инварианты алгебры Ли  $G$  выделяют орбиты. Тогда алгоритм (А) перерабатывает полное инволютивное семейство функций на  $G^*$  в полное инволютивное семейство функций на пространстве  $\Omega_m(G)^*$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ . В частности, если  $G$  — полупростая комплексная алгебра Ли, её компактная вещественная форма или нормальная компактная подалгебра или вещественная борелевская подалгебра в  $G$ , то в явном виде с помощью алгоритма (А) строится полное инволютивное семейство функций на пространствах, дуальных к алгебрам Ли  $\Omega_{m_1} \Omega_{m_2} \dots \Omega_{m_s}(G)$ , где  $m_j = (i_j(1), \dots, i_{p(j)}(j))$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

### 1.1.3. Примеры-иллюстрации

Приведём явные выражения для функций из семейства  $\mathcal{A}(F)$  для некоторых колец  $\mathcal{K} = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_s)$ .

**Кольцо  $\mathcal{K} = \mathbb{R}[x]/(x^2)$ .** Выпишем в явном виде функции  $\mathcal{A}(F)$  в этом случае. В пространстве  $\Omega(G) = G + \varepsilon G$  ( $\varepsilon^2 = 0$ ) имеем координаты  $x_i$  (в подпространстве  $G$ ) и  $y_i$  (в подпространстве  $\varepsilon G$ ). Тогда  $\mathcal{A}(F) = \{F^{(1)}, F^{(2)}\}$ , где

$$F^{(1)}(z) = F(y_1, \dots, y_r), \quad F^{(2)}(z) = \sum_{i=1}^r x_i \frac{\partial F(y_1, \dots, y_r)}{\partial y_i}.$$

**Кольцо  $\mathcal{K} = \mathbb{R}[x]/(x^3)$ .** В пространстве  $\Omega_2(G)^*$  имеем координаты  $x(0)_i$ ,  $x(1)_i$ ,  $x(2)_i$  и переменные  $z_i = x(0)_i \varepsilon^2 + x(1)_i \varepsilon + x(2)_i$  (здесь  $\varepsilon^3 = 0$ ). Воспользовавшись формулой Тейлора, мы получим

$$F(z_1, \dots, z_r) = F_0(z) + F_1(z)\varepsilon + F_2(z)\varepsilon^2,$$

где

$$\begin{aligned} F_0(z) &= F(x(2)_i), \quad F_1(z) = \sum_{j=1}^r \frac{\partial F(x(2)_i)}{\partial x(2)_j} x(1)_j, \\ F_2(z) &= \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^r \frac{\partial^2 F(x(2)_i)}{\partial x(2)_p \partial x(2)_q} x(1)_p x(1)_q + \sum_{k=1}^r \frac{\partial F(x(2)_i)}{\partial x(2)_k} x(0)_k. \end{aligned}$$

**Кольцо**  $\mathcal{K} = \mathbb{R}[x]/(x^5)$ . В пространстве  $\Omega_4(G)^*$  имеем координаты  $x(j)_i$ ,  $j = 0, 1, \dots, 4$ ,  $i = 1, \dots, \dim G = r$ . В этом случае

$$F(z_1, \dots, z_r) = F_0(z) + F_1(z)\varepsilon + F_2(z)\varepsilon^2 + F_3(z)\varepsilon^3 + F_4(z)\varepsilon^4$$

(здесь  $\varepsilon^5 = 0$ ), где

$$\begin{aligned} F_0(z) &= F(x(4)_i), \quad F_1(z) = \sum_{p=1}^r \frac{\partial F(x(4)_i)}{\partial x(4)_p} x(3)_p, \\ F_2(z) &= \frac{1}{2} \sum_{p_1, p_2=1}^r \frac{\partial^2 F(x(4)_i)}{\partial x(4)_{p_1} \partial x(4)_{p_2}} x(3)_{p_1} x(3)_{p_2} + \sum_{p=1}^r \frac{\partial F(x(4)_i)}{\partial x(4)_p} x(2)_p, \\ F_3(z) &= \frac{1}{3!} \sum_{p_1, p_2, p_3=1}^r \frac{\partial^3 F(x(4)_i)}{\partial x(4)_{p_1} \partial x(4)_{p_2} \partial x(4)_{p_3}} x(3)_{p_1} x(3)_{p_2} x(3)_{p_3} + \\ &\quad + \sum_{p_1, p_2=1}^r \frac{\partial^2 F(x(4)_i)}{\partial x(4)_{p_1} \partial x(4)_{p_2}} x(3)_{p_1} x(3)_{p_2} + \sum_{p=1}^r \frac{\partial F(x(4)_i)}{\partial x(4)_p} x(1)_p, \\ F_4(z) &= \frac{1}{4!} \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4=1}^r \frac{\partial^4 F(x(4)_i)}{\partial x(4)_{p_1} \partial x(4)_{p_2} \partial x(4)_{p_3} \partial x(4)_{p_4}} x(3)_{p_1} x(3)_{p_2} x(3)_{p_3} x(3)_{p_4} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{p_1, p_2, p_3=1}^r \frac{\partial^3 F(x(4)_i)}{\partial x(4)_{p_1} \partial x(4)_{p_2} \partial x(4)_{p_3}} x(3)_{p_2} x(3)_{p_3} x(2)_{p_1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{p_1, p_2=1}^r \frac{\partial^2 F(x(4)_i)}{\partial x(4)_{p_1} \partial x(4)_{p_2}} x(2)_{p_1} x(2)_{p_2} + \\ &\quad + \sum_{p_1, p_2=1}^r \frac{\partial^2 F(x(4)_i)}{\partial x(4)_{p_1} \partial x(4)_{p_2}} x(3)_{p_1} x(1)_{p_2} + \sum_{p=1}^r \frac{\partial F(x(4)_i)}{\partial x(4)_p} x(0)_p. \end{aligned}$$

**Кольцо**  $\mathcal{K} = \mathbb{R}[x_1, x_2]/(x_1^2, x_2^2)$  Имеем разложение

$$\Omega_f(G) = G + \varepsilon_1 G + \varepsilon_2 G + \varepsilon_1 \varepsilon_2 G.$$

Координаты в  $\Omega_f(G)^*$  мы обозначили через  $x(0,0)_i$ ,  $x(1,0)_i$ ,  $x(0,1)_i$ ,  $x(1,1)_i$  в соответствие с написанным разложением пространства  $\Omega_f(G)$  в прямую сумму

линейных подпространств. В этом случае

$$z_i = \varepsilon_1 \varepsilon_2 x(0, 0)_i + \varepsilon_1 x(0, 1)_i + \varepsilon_2 x(1, 0)_i + x(1, 1)_i,$$

и по формуле Тейлора получим

$$F(z_1, \dots, z_r) = F_{0,0} + \varepsilon_1 F_{1,0} + \varepsilon_2 F_{0,1} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 F_{1,1},$$

где

$$\begin{aligned} F_{0,0}(z) &= F(x(1, 1)_i), \\ F_{1,0}(z) &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial F(x(1, 1)_i)}{\partial x(1, 1)_k} x(0, 1)_k, \quad F_{0,1}(z) = \sum_{k=1}^r \frac{\partial F(x(1, 1)_i)}{\partial x(1, 1)_k} x(1, 0)_k, \\ F_{1,1}(z) &= \sum_{p,q=1}^r \frac{\partial^2 F(x(1, 1)_i)}{\partial x(1, 1)_p \partial x(1, 1)_q} x(1, 0)_p x(0, 1)_q + \sum_{k=1}^r \frac{\partial F(x(1, 1)_i)}{\partial x(1, 1)_k} x(0, 0)_k. \end{aligned}$$

#### 1.1.4. Доказательство основных теорем

Пусть  $C_{ij}^k$  обозначает структурный тензор алгебры Ли  $G$  в базисе  $e_1, \dots, e_r$ , а  $\hat{C}_{ij}^k$  — структурный тензор алгебры Ли  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , в базисе  $\varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} e_i$ .

В этом разделе мы докажем теоремы 1.1.2, 1.1.3, 1.1.5.

**Доказательство теоремы 1.1.3.** Пусть на пространстве  $G^*$ , дуальном к вещественной алгебре Ли  $G$ , заданы две функции  $F, H$  со значениями в  $\mathbb{R}$ . Тогда они находятся в инволюции относительно формы Кириллова на всех орбитах коприсоединённого представления группы Ли  $g$ , отвечающей алгебре Ли  $G$ , тогда и только тогда, когда

$$C_{ij}^k x_k \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} = 0$$

(см., например, [129]).

На пространстве  $\Omega_m(G)^*$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , рассмотрим функции  $F, H$  со значениями в кольце

$$\mathcal{K} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / (x_1^{m_1+1}, \dots, x_n^{m_n+1}).$$

Для них определим скобку  $\{F, H\}^\otimes$ . Функция  $\{F, H\}^\otimes$  задана на  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , и принимает значения в  $\mathbb{R}$ -алгебре

$$\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / (x_1^{m_1+1}, \dots, x_n^{m_n+1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / (x_1^{m_1+1}, \dots, x_n^{m_n+1}).$$

**Определение 1.1.8.** По определению положим

$$\{F, H\}^\otimes(w) = \hat{C}_{ij}^k w_k \frac{\partial F(z)}{\partial w_i} \frac{\partial H(z)}{\partial w_j} \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{K},$$

где  $\hat{C}_{ij}^k$  — структурный тензор алгебры Ли  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , в базисе  $\varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} e_i$ ,  $z_j = z_j(w_i)$  — функции от переменных  $w_i$ , определённые выше.

Далее мы считаем, что

$$\frac{\partial F(w)}{\partial w_i} \in \mathcal{K} \otimes \{1\} \subset \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}, \quad \frac{\partial H(w)}{\partial w_j} \in \{1\} \otimes \mathcal{K} \subset \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}.$$

Обозначим  $\varepsilon_i \otimes 1$  через  $\zeta_i \in \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ , а  $1 \otimes \varepsilon_i$  через  $\xi_i \in \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ . Заметим, что скобка  $\{F, H\}^\otimes$  линейна по каждому аргументу, но не кососимметрична.

В кольце  $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$  рассмотрим элемент

$$\Delta = \left( \sum_{p+q=m_1} \zeta_1^p \xi_1^q \right) \left( \sum_{p+q=m_2} \zeta_2^p \xi_2^q \right) \dots \left( \sum_{p+q=m_n} \zeta_n^p \xi_n^q \right).$$

**Предложение 1.1.9.** В кольце  $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \left( \sum_{\alpha_i + \beta_i = m_i, i=1, \dots, n} \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n} x(\beta_1, \dots, \beta_n)_k \right) = \\ = \Delta \cdot \left( \sum_{\alpha_i + \beta_i = m_i, i=1, \dots, n} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} x(\beta_1, \dots, \beta_n)_k \right), \end{aligned}$$

т. е.

$$\Delta(1 \otimes z_p) = \Delta(z_p \otimes 1)$$

для любого  $p$ .

**Доказательство.** Рассмотрим сумму

$$\sigma = \sum_{0 \leq \alpha_p + \beta_p \leq m_p, 1 \leq p \leq n} x(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)_k \zeta_1^{m_1 - \alpha_1} \dots \zeta_n^{m_n - \alpha_n} \xi_1^{m_1 - \beta_1} \dots \xi_n^{m_n - \beta_n}.$$

Обозначим  $\alpha_j + \beta_j$  через  $\gamma_j$ , а  $m_j - \alpha_j$  через  $\tau_j$ . Тогда  $\beta_j = \gamma_j + \tau_j - m_j$ , и поэтому

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{\gamma_j, \tau_j} x(\gamma_1, \dots, \gamma_n)_k \zeta_1^{\tau_1} \dots \zeta_n^{\tau_n} \xi_1^{2m_1 - \gamma_1 - \tau_1} \dots \xi_n^{2m_n - \gamma_n - \tau_n} = \\ &= \sum_{\gamma_j, \tau_j} x(\gamma_1, \dots, \gamma_n)_k \xi_1^{m_1 - \gamma_1} \dots \xi_n^{m_n - \gamma_n} \zeta_1^{\tau_1} \dots \zeta_n^{\tau_n} \xi_1^{m_1 - \tau_1} \dots \xi_n^{m_n - \tau_n} = \\ &= \left( \sum_{\gamma_i} x(\gamma_1, \dots, \gamma_n)_k \xi_1^{m_1 - \tau_1} \dots \xi_n^{m_n - \tau_n} \right) \cdot \Delta. \end{aligned}$$

Обозначим теперь  $\alpha_j + \beta_j$  через  $\gamma_j$ , а  $m_j - \beta_j$  через  $\tau_j$ . Сумму  $\sigma$  теперь перепишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{\gamma_i, \tau_j} x(\gamma_1, \dots, \gamma_n)_k \xi_1^{m_1 - \gamma_1} \dots \xi_n^{m_n - \gamma_n} \zeta_1^{\tau_1} \dots \zeta_n^{\tau_n} \xi_1^{m_1 - \tau_1} \dots \xi_n^{m_n - \tau_n} = \\ &= \left( \sum_{\gamma_i} x(\gamma_1, \dots, \gamma_n)_k \xi_1^{m_1 - \gamma_1} \dots \xi_n^{m_n - \gamma_n} \right) \cdot \Delta. \end{aligned}$$

Из сравнения полученных двух выражений для суммы  $\sigma$  вытекает предложение 1.1.9.  $\square$

**Следствие 1.1.10.** Пусть  $F$  — вещественнозначная аналитическая функция от переменных  $x_1, \dots, x_r$ . Положим

$$v_i = (x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i)/2 \in \mathcal{K}.$$

Тогда

$$\Delta \cdot F(v_1, \dots, v_r) = \Delta \cdot F(x_1 \otimes 1, \dots, x_r \otimes 1) = \Delta \cdot F(1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_r).$$

**Доказательство.** Из предложения 1.1.9 вытекает, что

$$\Delta \cdot ((x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i)/2)^p = \Delta \cdot (x_i \otimes 1)^p = \Delta \cdot (1 \otimes x_i)^p.$$

Раскладывая  $F$  в ряд и используя это соотношение, мы получим наше утверждение.  $\square$

**Предложение 1.1.11.** Пусть  $F, H$  — аналитические функции, определённые на пространстве  $G^*$ , дуальном к алгебре Ли  $G$ . Рассмотрим функции  $F(z_1, \dots, z_r), H(z_1, \dots, z_r)$  на пространстве  $\Omega_m(G)^*$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , со значениями в кольце  $\mathcal{K}$ . Пусть  $\{F, H\}_G$  — скобка Пуассона на пространстве  $G^*$ , порождённая формой Кириллова. Тогда

$$\{F, H\}^\otimes = \Delta \cdot \{F, H\}_G(v_1, \dots, v_n),$$

где  $\Delta \in \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$  — определённый выше элемент и  $v_i = (z_i \otimes 1 + 1 \otimes z_i)/2$ .

**Доказательство.** Непосредственно из определения коммутатора в алгебре Ли  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , вытекает равенство

$$\begin{aligned} \{F, H\}^\otimes &= \hat{C}_{ij}^k w_k \frac{\partial F}{\partial w_i} \frac{\partial H}{\partial w_j} = \\ &= \sum_{0 \leq \alpha_p + \beta_p \leq m_p, 1 \leq p \leq n} C_{ij}^k x(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)_k \frac{\partial F}{\partial x(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_i} \otimes \frac{\partial H}{\partial x(\beta_1, \dots, \beta_n)_j}, \end{aligned}$$

где величина  $\frac{\partial F}{\partial w_i} \otimes \frac{\partial H}{\partial w_j}$  обозначает произведение в кольце  $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$  элементов  $\frac{\partial F}{\partial w_i} \otimes 1$  и  $1 \otimes \frac{\partial H}{\partial w_j}$ .

Из

$$z_i = \sum_{0 \leq \alpha_p + \beta_p \leq m_p, 1 \leq p \leq n} \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} x(\beta_1, \dots, \beta_n)_i$$

следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial x(\beta_1, \dots, \beta_n)_j} = \varepsilon_1^{m_1 - \beta_1} \dots \varepsilon_n^{m_n - \beta_n} \frac{\partial}{\partial z_j},$$

подставляя которое в выражение для скобки  $\{F, H\}^\otimes$ , мы получим

$$\{F, H\}^\otimes = C_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial z_i} \otimes \frac{\partial H}{\partial z_j} \sum_{0 \leq \alpha_p + \beta_p \leq m_p} x(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)_k \zeta_1^{\tau_1} \dots \zeta_n^{\tau_n} \xi_1^{\gamma_1} \dots \xi_n^{\gamma_n},$$

где  $\tau_i = m_i - \alpha_i$ ,  $\gamma_j = m_j - \beta_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

По предложению 1.1.9 имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{0 \leq \alpha_p + \beta_p \leq m_p} x(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)_k \zeta_1^{m_1 - \alpha_1} \dots \zeta_n^{m_n - \alpha_n} \xi_1^{m_1 - \beta_1} \dots \xi_n^{m_n - \beta_n} = \\
 & = \Delta \cdot \sum_{0 \leq \alpha_p + \beta_p \leq m_p, \ i=1, \dots, n} \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n} x(\beta_1, \dots, \beta_n)_k = \\
 & = \Delta \cdot \sum_{0 \leq \alpha_p + \beta_p \leq m_p, \ i=1, \dots, n} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} x(\beta_1, \dots, \beta_n)_k.
 \end{aligned}$$

Согласно этому равенству выражение для скобки  $\{F, H\}^\otimes$  можно переписать в виде

$$\{F, H\}^\otimes = \frac{\Delta}{2} C_{ij}^k (z_k \otimes 1 + 1 \otimes z_k) \frac{\partial F(z \otimes 1)}{\partial z_i} \frac{\partial H(1 \otimes z)}{\partial z_j}.$$

Здесь мы воспользовались очевидными соотношениями

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z_i} \otimes 1 = \frac{\partial F(z \otimes 1)}{\partial (z \otimes 1)_i}, \quad 1 \otimes \frac{\partial H(z)}{\partial z_i} = \frac{\partial H(1 \otimes z)}{\partial (1 \otimes z)_i}.$$

Применяя следствие 1.1.10, мы получим

$$\{F, H\}^\otimes = \Delta \cdot C_{ij}^k v_k \frac{\partial F(v)}{\partial v_i} \frac{\partial H(v)}{\partial v_j}, \quad v_k = \frac{z_k \otimes 1 + 1 \otimes z_k}{2},$$

что доказывает предложение 1.1.11.  $\square$

Предложение 1.1.11 является основным инструментом, который позволяет проследить за скобкой Пуассона при взятии тензорных расширений алгебры Ли.

Теперь можно закончить доказательство теоремы 1.1.3. Докажем инволютивность всех функций из семейства  $S = \mathcal{A}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(F_n)$ . Пусть  $F, H \in S$ . Тогда

$$F(z_i) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_n^{\alpha_n}, \quad H(z_i) = \sum_{\beta_1, \dots, \beta_n} F_{\beta_1, \dots, \beta_n} \varepsilon_1^{\beta_1} \varepsilon_n^{\beta_n}$$

и из линейности скобки  $\{F, H\}^\otimes$  вытекает равенство

$$\{F, H\}^\otimes = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n} \{F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}, H_{\beta_1, \dots, \beta_n}\} \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n} \xi_1^{\beta_1} \dots \xi_n^{\beta_n}.$$

В силу предложения 1.1.11 выполнено равенство

$$\{F, H\}^\otimes = \Delta \{F, H\}_G ((z_i \otimes 1 + 1 \otimes z_i)/2) = 0,$$

так как по условию  $\{F, H\}_G = 0$ . Поэтому все скобки  $\{F_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}, H_{\beta_1, \dots, \beta_n}\}$  равны нулю, что и утверждалось.

Докажем теперь функциональную независимость функций из семейства  $S = \mathcal{A}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{A}(F_n)$ . Пусть  $F$  — аналитическая функция на пространстве  $G^*$ .

Тогда, подставляя выражения для  $z_i$  и применяя формулу Тейлора к функции  $F(z'_i + x(m_1, \dots, m_n)_i)$ , мы, очевидно, получим

$$\begin{aligned} F(z_1, \dots, z_r) &= F(x_1(m_1, \dots, m_n), \dots, x_r(m_1, \dots, m_n)) + \\ &+ \sum_{p=1}^N \sum_{(i_1, \dots, i_p)} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p F(x_i(m_1, \dots, m_n))}{\partial x_{i_1}(m_1, \dots, m_n) \dots \partial x_{i_p}(m_1, \dots, m_n)} \times \\ &\times \left[ \left( \sum \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} x(\beta_1, \dots, \beta_n)_{i_1} \right) \times \dots \times \left( \sum \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} x(\beta_1, \dots, \beta_n)_{i_p} \right) \right], \end{aligned}$$

где знак суммы без указания пределов суммирования обозначает сумму по всем таким  $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ , что  $\alpha_i + \beta_i = m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$ .

Разобьём переменные  $x(\beta_1, \dots, \beta_n)_i$  на группы, внутри которых  $\beta_1 + \dots + \beta_n = \text{const}$ , и группы переменных упорядочим по возрастанию величины  $\beta_1 + \dots + \beta_n$ , а внутри каждой группы переменные упорядочим лексикографически. Ясно, что переменные, стоящие при  $p$ -й производной ( $p \geq 2$ ), имеют большую сумму  $\beta_1 + \dots + \beta_n$ , чем переменные, стоящие при первой производной. Отсюда следует, что матрица Якоби  $J$  однородных компонент по переменным  $x(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_j$ , которые упорядочены так, как указано выше, имеет треугольный вид

$$J = \begin{pmatrix} A_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ * & A_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & A_{ij} \end{pmatrix},$$

причём по диагонали стоят величины

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i(x(m_1, \dots, m_n)_p)}{\partial x(m_1, \dots, m_n)_j}.$$

Из этого, очевидно, получаем наше утверждение. Теорема 1.1.3 полностью доказана.  $\square$

**Доказательство теоремы 1.1.2.** Функция  $F$  является инвариантом коприсоединённого представления тогда и только тогда, когда  $\{x_i, F\} = 0$  для любой координатной функции  $x_i$ . Поскольку алгоритм  $(\mathcal{A})$  координаты в  $G^*$  перерабатывает в полный набор линейных координат на  $\Omega_m(G)^*$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , то наше утверждение вытекает из теоремы 1.1.3.  $\square$

**Доказательство теоремы 1.1.5.** Пусть  $F_1, \dots, F_n$  — полный набор функционально независимых инвариантов коприсоединённого представления группы Ли  $g$ , отвечающей алгебре Ли  $G$ . Тогда  $\dim \mathcal{O}_G = n - s$ , где  $\mathcal{O}_G$  — орбита максимальной размерности коприсоединённого представления  $\text{Ad}_g^*$  группы Ли  $g$ . Алгоритм  $(\mathcal{A})$  даёт  $s \cdot \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K}$  функционально независимых инвариантов алгебры Ли  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ ,  $\bigcup_{i=1}^s \mathcal{A}(F_i)$ , т. е. число инвариантов алгебры Ли не меньше чем  $s \cdot \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K}$ . Поэтому

$$\dim \mathcal{O}_m(G) \leq \dim G \cdot \dim \mathcal{K} - s \cdot \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K} = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K} (\dim G - s) = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K} \cdot \dim \mathcal{O}_G,$$

так как инварианты алгебры Ли  $G$  выделяют орбиты. Здесь  $\mathcal{O}(G) = \mathcal{O}_{m_1 \dots m_n}(G)$  — орбита максимальной размерности коприсоединённого представления для тензорного расширения  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ .

С другой стороны, из явного вида операции коммутирования в алгебре Ли  $\Omega_m(G)$ ,  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , получаем

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{O}_m(G) \left( \sum x(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_i \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} e^i \right) = \\ = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} * & B_{ij} \\ B_{ij} & 0 \end{pmatrix} \geq \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K} \cdot \dim \mathcal{O}_G(x(m_1, \dots, m_n)_i e^i), \end{aligned}$$

где  $\mathcal{O}_G(x)$  — орбита, проходящая через точку  $x \in G^*$ , и  $B_{ij} = C_{ij}^k x(m_1, \dots, m_n)_k$ .

Выберем  $y = x(m_1, \dots, m_n)_i e^i$  так, чтобы размерность орбиты  $\mathcal{O}_G(y)$  была максимальной. Тогда

$$\dim \mathcal{O}_{m_1, \dots, m_n}(G) \geq \dim \mathcal{O}_{m_1, \dots, m_n}(G)(z) = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K} \cdot \dim \mathcal{O}_G.$$

Последнее равенство имеет место в силу выбора элемента  $y$ . Здесь

$$\begin{aligned} z = \sum_{0 \leq \alpha_p \leq m_p, p=1, \dots, n} a(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_i \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} e^i = \\ = \sum_{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0} a(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_i \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_n^{\alpha_n} e^i + y. \end{aligned}$$

Сравнивая это неравенство с полученным выше, получим, что

$$\dim \mathcal{O}_{m_1 \dots m_n}(G) = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{K} \cdot \dim \mathcal{O}_G.$$

Отсюда вытекает искомое утверждение.  $\square$

## 1.2. Уравнения Эйлера на тензорных расширениях и аналоги уравнений магнитной гидродинамики

### 1.2.1. Коприсоединённое представление алгебры Ли $\Omega(G)$

По определению алгебру Ли  $\Omega(G) = G \otimes (\mathbb{R}[x]/(x^2))$  можно представить в виде  $\Omega(G) = G + \varepsilon G$ ,  $\varepsilon^2 = 0$ . Пусть  $f \in \Omega(G)^*$  и  $f_1 = f|_G$ ,  $f_2 = f|_{\varepsilon G}$ . Тогда имеем изоморфизм  $f \rightarrow (f_1, f_2)$  между  $\Omega(G)^*$  и  $G^* + (\varepsilon G)^*$ . Функционал  $f = (f_1, f_2) \in \Omega(G)^*$  будем записывать в виде  $f = f_1 + \varepsilon f_2 \in \Omega(G)^*$ ,  $f_1, f_2 \in G^*$ .

**Лемма 1.2.1.** Для  $x + \varepsilon y \in \Omega(G)$  имеет место равенство

$$\{x + \varepsilon y, x^* + \varepsilon y^*\} = \{x, x^*\} + \{y, y^*\} + \varepsilon \{x, y^*\},$$

где  $\{x, f\} = \operatorname{ad}_x^* f$ ,  $x \in G$ ,  $f \in G^*$ .

**Доказательство.** Лемма доказывается прямым вычислением.  $\square$

### 1.2.2. Аналоги уравнений магнитной гидродинамики на полупростых алгебрах Ли

Пусть есть линейный оператор  $C: \Omega(G)^* \rightarrow \Omega(G)$ . Тогда на пространстве  $\Omega(G)^*$  можно написать систему нелинейных дифференциальных уравнений  $\dot{a} = \{c(a), a\}$ ,  $a \in \Omega(G)^*$ . Если  $a = (X, Y) \in G^* + \varepsilon G^*$  и  $C(a) = (x, y) \in G + \varepsilon G$ , то из леммы 1.2.1 вытекает, что уравнения Эйлера на  $\Omega(G)^*$  имеют вид

$$\dot{X} = \{x, X\} + \{y, Y\}, \quad \dot{Y} = \{x, Y\}.$$

Эти уравнения являются гамильтоновыми на всех орбитах коприсоединённого представления соответствующей группы Ли. В следующем разделе мы построим многопараметрическое семейство секционных операторов  $C = C(a, b, D)$ , для которых уравнения Эйлера на  $\Omega(G)^*$  вполне интегрируемы на всех орбитах коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega(g)$ , отвечающей алгебре Ли  $\Omega(G)$ .

Рассмотрим классические уравнения магнитной гидродинамики несжимаемой невязкой идеально проводящей жидкости (см. [84]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\text{rot } v) \times v = \rho^{-1}(\text{rot } H) \times H - \text{grad } f, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \text{rot}(v \times H),$$

где  $f(x, t)$  — однозначная функция в ограниченной области  $D$  с гладкой границей, определяемая из условия, что  $\partial v / \partial t$  — бездивергентное векторное поле на  $D$ , касающееся границы  $\partial D$ . Как показано в [46], эти уравнения имеют в качестве простейшего конечномерного аналога уравнения

$$\dot{M} = [\Omega, M] + [J, H], \quad \dot{H} = [\Omega, H]$$

на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(n)$  кососимметрических матриц (здесь  $\Omega$  — правый сдвиг в единицу группы  $\text{SO}(n)$  вектора скорости  $\dot{g} \in T_g \text{SO}(n)$ ,  $J = \text{Ad}_{g^{-1}}^* j$ , где  $j$  — плотность тока в теле,  $H = \text{Ad}_g h$ ,  $h$  — напряжённость магнитного поля в теле,  $M$  — кинетический момент в пространстве).

Выписанные в [46] аналоги уравнений магнитной гидродинамики являются гамильтоновыми, причём соответствующая скобка Пуассона возникает из тензорного произведения  $\Omega(\mathfrak{so}(n)) = \mathfrak{so}(n) \otimes D$ , где  $D$  — алгебра двойных чисел  $D = \mathbb{R}[x]/(x^2)$ . Более точно, имеет место следующее утверждение.

**Предложение 1.2.2.** Уравнения Эйлера на  $\Omega(G)^*$ , где  $G$  — полупростая алгебра Ли  $G = \mathfrak{so}(n)$ , совпадают с аналогами уравнений магнитной гидродинамики.

**Доказательство.** Утверждение вытекает из того, что при изоморфизме  $\mathfrak{so}(n)^* \cong \mathfrak{so}(n)$ , задаваемом с помощью формы Киллинга  $(x, y) = \text{tr } \text{ad}_x \text{ad}_y$ , присоединённое представление переходит в коприсоединённое, а поэтому уравнения Эйлера  $\dot{X} = \{x, X\} + \{y, Y\}$ ,  $\dot{Y} = \{x, Y\}$  перейдут в конечномерные аналоги уравнений магнитной гидродинамики.  $\square$

Для уравнений  $\dot{M} = [\Omega, M] + [J, H]$ ,  $\dot{H} = [\Omega, H]$  в [46] указан один первый интеграл. Ниже мы построим серию операторов  $C(M, N) = (\Omega, J)$ , для которых

аналоги уравнений магнитной гидродинамики вполне интегрируемы. Уравнения Эйлера  $\dot{a} = \{c(a), a\}$  на  $\Omega(G)^*$  мы будем называть аналогами уравнений магнитной гидродинамики на алгебре Ли  $G$ .

**Замечание.** Алгебра двойных чисел  $D = \mathbb{R}[x]/(x^2)$  использовалась в механике. Для расчёта шарнирных устройств применяются также алгебры  $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \otimes D$  и  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \otimes D$ . Подробный обзор этих вопросов можно найти в [71].

### 1.2.3. Связь с плоскими симметрическими пространствами

В различных разделах математики очень часто встречаются группы Ли, являющиеся полупрямым произведением подгруппы  $\mathcal{G}$  и коммутативного нормального делителя  $\mathcal{A} \cong \mathbb{R}^n$ , т. е.  $g = \mathcal{G} \times \mathcal{A}$ . В фактор-пространстве  $g/\mathcal{G}$  можно ввести структуру симметрического пространства аффинной связности, если на  $g$  задать инвариантную аффинную связность без кручения.

Определим на  $g$  инволюцию  $s: g \rightarrow g$  следующим образом: если  $x = ga \in \mathcal{G} \times \mathcal{A}$ , то по определению положим  $s(x) = ga^{-1}$ . Очевидно, что  $s$  — инволютивный автоморфизм группы Ли  $g$ , множество неподвижных точек которого совпадает с  $\mathcal{G}$ .

Как известно, каждое однородное пространство  $g/\mathcal{G}$ , где  $g$  — группа Ли, а  $\mathcal{G}$  — компактная подгруппа, допускает инвариантную метрику. В этом случае пространство  $\mathcal{G} \times \mathcal{A}/\mathcal{G}$  является римановым симметрическим пространством (см., например, [143, 164]). Далее, известно, что тензор кривизны  $R_{ki,j}^m$  симметрического пространства выражается через структурные константы  $C_{ql}^p$  группы движений  $g$  по формуле

$$R_{ki,j}^m = \frac{1}{4} C_{ki}^l C_{lj}^m$$

(более подробно см. [143, 164]). Согласно определению группу  $g$  мы получаем потому, что симметрическое пространство  $g/\mathcal{G}$  является пространством нулевой кривизны. Полупрямые произведения тесно связаны с процессом сжатия алгебр Ли (см. [222]).

Операция тензорного произведения позволяет по каждой группе Ли построить плоское симметрическое пространство  $\mathcal{M} = \Omega(g)/g$ . Уравнения Эйлера на  $\Omega(G)^*$  совпадают, как нетрудно заметить, с уравнениями Эйлера, построенными для симметрического пространства  $\mathcal{M}$  по методике [154]. В частности, аналог уравнений магнитной гидродинамики реализуются на плоском симметрическом пространстве  $\Omega^2(g)/\Omega(g) = \mathcal{M}$ , которое строится из  $g$  с помощью кольца  $\mathbb{R}[x_1, x_2]/(x_1^2, x_2^2)$ .

## 1.3. Секционные операторы для алгебры Ли $\Omega(G)$

### 1.3.1. Комплексная теория секционных операторов

Рассмотрим коприсоединённое представление  $\rho = \text{ad}^*: \Omega(G) \rightarrow \text{End}(\Omega(G)^*)$  алгебры Ли  $\Omega(G)$ , где  $G$  — комплексная полупростая алгебра Ли. Пусть

$a \in \Omega(G)^*$ . Тогда определено отображение  $\Phi_a: \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)$  по формуле  $\Phi_a(x) = \text{ad}_x^*(a) = \{x, a\}$ , где  $x \in \Omega(G)$ ,  $a \in \Omega(G)^*$ . В случае полупростой комплексной алгебры Ли  $G$  будем отождествлять её с сопряжённым пространством  $G^*$  с помощью формы Киллинга. При этом изоморфизме коприсоединённое представление переходит в присоединённое.

**Предложение 1.3.1.** Пусть  $G$  — полупростая алгебра Ли, а  $a \in \Omega(G)^*$  — элемент общего положения (т. е. орбита коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$ , проходящая через  $a$ , имеет максимальную размерность). Тогда  $a$  можно взять из подпространства  $\varepsilon G$ , и  $a$  будет элементом общего положения в  $G$ . В этом случае  $\ker \Phi_a = H + \varepsilon H$ , где  $H$  — подалгебра Картана в алгебре Ли  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $x = x_1 + x_2\varepsilon \in \ker \Phi_a$ . Тогда  $\{x_1 + \varepsilon x_2, a_1 + \varepsilon a_2\} = 0$  в том и только в том случае, если  $\{x_1, a_2\} = 0$ ,  $\{x_1, a_1\} + \{x_2, a_2\} = 0$ ,  $a_i \in G^* \cong G$  ( $i = 1, 2$ ). После перехода к  $G$  мы получим следующие условия:

$$[x_1, a_2] = 0, \quad [x_1, a_1] + [x_2, a_2] = 0.$$

Докажем сначала первое утверждение предложения. Имеем

$$\dim \mathcal{O}_{\Omega(G)}(x, y) = \text{rk} \begin{pmatrix} C_{ij}^k x_k & C_{ij}^k x_k \\ C_{ij}^k x_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда если взять в  $G$   $y$  общего положения и, например,  $x = 0$ , то мы получим равенства

$$\dim \mathcal{O}_{\Omega(G)}(0, y) = 2 \dim \mathcal{O}_G(y) = 2 \dim \mathcal{O}_G.$$

Так как в полупростой алгебре Ли инварианты выделяют орбиты в смысле определения 1.1.4, то  $(0, y)$  — элемент общего положения по теореме 1.1.5, что доказывает первую половину предложения.

Теперь вернёмся к вычислению ядра  $\ker \Phi_a$ . Из уравнения  $[x_1, a_2] = 0$  следует, что  $x_1$  лежит в подалгебре Картана  $H$ , содержащей элемент  $a_2$  (см. [143]). Пусть

$$a_1 = a_{1,h} + \sum_{\alpha \neq 0} a_{1,\alpha} e_\alpha, \quad x_2 = x_{2,h} + \sum_{\alpha \neq 0} x_{2,\alpha} e_\alpha,$$

где  $G = H + \sum_{\alpha \neq 0} \mathbb{C} e_\alpha$  — разложение Картана алгебры Ли  $G$  относительно подалгебры Картана  $H$  и  $a_{1,h}, x_{2,h} \in H$ ,  $e_\alpha$  — корневой вектор, отвечающий корню  $\alpha \in H^*$ . Тогда

$$[x_1, a_1] + [x_2, a_2] = \sum_{\alpha \neq 0} (a_{1,\alpha} \alpha(x_1) e_\alpha - x_{2,\alpha} \alpha(a_2) e_\alpha) = 0,$$

и для любого корня  $\alpha \neq 0$  имеем  $a_{1,\alpha} \alpha(x_1) - x_{2,\alpha} \alpha(a_2) = 0$ ,  $x_1, a_2 \in H$ . Поскольку  $a_2$  общего положения, то  $\alpha(a_2) \neq 0$  для любого корня  $\alpha \neq 0$ . По первой части  $a_1$  можно взять нулевым, и тогда  $a_{1,\alpha} = 0$  для любого  $\alpha \neq 0$ . Поэтому  $x_{2,\alpha} = 0$  для любого  $\alpha \neq 0$ , т. е.  $x_2 \in H$ . Поэтому  $\ker \Phi_a \subseteq H + \varepsilon H$ , что и утверждалось.  $\square$

**Предложение 1.3.2.** Пусть  $b = b_1 + \varepsilon b_2 \in \ker \Phi_a = H + \varepsilon H \subset \Omega(G)$ ,  $H$  — подалгебра Картана в  $G$ , и пусть  $b_1$  общего положения. Тогда

$$\ker \rho(b) = H + \varepsilon H \subset \Omega(G)^* \cong G + \varepsilon G$$

(изоморфизм задаётся покомпонентно с помощью формы Киллинга).

**Доказательство.** Мы должны найти все такие  $x_1 + \varepsilon x_2 \in \Omega(G)^*$ , что  $\{b_1 + \varepsilon b_2, x_1 + \varepsilon x_2\} = 0$ . Вычисляя  $\text{ad}^*$  для  $\Omega(G)$ , мы получаем систему

$$\{b_1, x_2\} = 0, \quad \{b_1, x_1\} + \{b_2, x_2\} = 0.$$

После отождествления  $G^* \cong G$  с помощью формы Киллинга получим уравнения

$$[b_1, x_1] + [b_2, x_2] = 0, \quad [b_1, x_2] = 0.$$

Поскольку элемент  $b_1$  общего положения, то  $x_2$  принадлежит подалгебре Картана  $H$ . Далее,  $[b_2, x_2] = 0$ , так как  $b_2, x_2 \in H$ , и поэтому первое уравнение даёт  $[b_1, x_1] = 0$ , откуда следует, что  $x_1 \in H$ , т. е.  $x_1 + \varepsilon x_2 \in H + \varepsilon H$ , что и утверждалось.  $\square$

**Предложение 1.3.3.** Пусть  $a$  выбрано так, как описано в предложении 1.3.1. Тогда

а)  $\Phi_a$  отображает  $\ker \Phi_a^\perp$  в  $\ker \rho(b)^\perp$ , т. е. имеем линейный изоморфизм

$$\Phi_a: \ker \Phi_a^\perp \rightarrow \ker \rho(b)^\perp;$$

б) для любого  $b \in \ker \Phi_a$ , где  $b$  выбрано так, как описано в предложении 1.3.2,

$$\rho(b)(\ker \rho(b)^\perp) \subset \ker \rho(b)^\perp.$$

Здесь  $V^\perp$  обозначает ортогональное дополнение к  $V \subset \Omega(G)$  относительно прямой суммы форм Киллинга на  $G$ :  $\ker \Phi_a^\perp = W + \varepsilon W$  и  $\ker \rho(b)^\perp = W + \varepsilon W$ , где  $W = \sum_{\alpha \neq 0} \mathbb{C} e_\alpha$  — ортогональное дополнение к подалгебре Картана  $H$  в  $G$  относительно формы Киллинга,  $e_\alpha$  — корневой вектор ( $\text{ad}_h e_\alpha = \alpha(h)e_\alpha$  для всех  $h \in H$ ).

**Доказательство.** 1. Пусть

$$a = a_1 + \varepsilon a_2 \in \ker \rho(b) = H + \varepsilon H \subset \Omega(G)^*.$$

Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha e_\alpha + \varepsilon \sum_{\alpha \neq 0} y_\alpha e_\alpha, a_1 + \varepsilon a_2 \right\} = \\ & = \left\{ \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha e_\alpha, a_1 \right\} + \left\{ \sum_{\alpha \neq 0} y_\alpha e_\alpha, a_2 \right\} + \varepsilon \left\{ \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha e_\alpha, a_2 \right\} = \\ & = \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha \alpha(a_1) e_\alpha + \sum_{\alpha \neq 0} y_\alpha \alpha(a_2) e_\alpha + \varepsilon \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha \alpha(a_2) e_\alpha \in \ker \rho(b)^\perp \end{aligned}$$

для

$$\sum_{\alpha \neq 0} x_{\alpha} e_{\alpha} + \varepsilon \sum_{\alpha \neq 0} y_{\alpha} e_{\alpha} \in \ker \Phi_a^{\perp}.$$

2. Пусть

$$b = b_1 + \varepsilon b_2 \in \ker \Phi_a = H + \varepsilon H, \quad \sum_{\alpha \neq 0} x_{\alpha} e_{\alpha} + \varepsilon \sum_{\alpha \neq 0} y_{\alpha} e_{\alpha} \subset \ker \rho(b)^{\perp}.$$

Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} \left\{ b_1 + \varepsilon b_2, \sum_{\alpha \neq 0} x_{\alpha} e_{\alpha} + \varepsilon \sum_{\alpha \neq 0} y_{\alpha} e_{\alpha} \right\} = \\ = \sum_{\alpha \neq 0} x_{\alpha} \alpha(b_1) e_{\alpha} + \sum_{\alpha \neq 0} y_{\alpha} \alpha(b_2) e_{\alpha} + \varepsilon \sum_{\alpha \neq 0} y_{\alpha} \alpha(b_1) e_{\alpha} \in \ker \rho(b)^{\perp}. \end{aligned}$$

В этих вычислениях мы использовали лемму 1.2.1. Предложение доказано.  $\square$

После этих предварительных рассмотрений перейдём к построению секционных операторов для комплексных полупростых алгебр Ли. Мы будем их строить согласно общей методике работы [154].

Пусть  $C: \Omega(G)^* \rightarrow \Omega(G)$  — произвольный линейный оператор.

**Определение 1.3.4.** Выберем элементы  $a, b$  так, как указано выше, т. е.  $a \in \Omega(G)^*$  — элемент общего положения ( $a \in \varepsilon G^*$ ), а элемент  $b = b_1 + \varepsilon b_2 \in \ker \Phi_a = H + \varepsilon H$  такой, что  $b_1$  — элемент общего положения в  $G$ . Пусть

$$D: \ker \rho(b) = H + \varepsilon H \rightarrow \ker \Phi_a = H + \varepsilon H \subset \Omega(G) —$$

линейный оператор. Определим оператор  $C$  равенством

$$C = C(a, b, D) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \Phi_a^{-1} \text{ad}_b^* \end{pmatrix}$$

в соответствие с разложением в прямую сумму

$$\Omega(G) = \ker \Phi_a \oplus (\ker \Phi_a)^{\perp}, \quad \Omega(G)^* = \ker \rho(b) \oplus (\ker \rho(b))^{\perp}.$$

Здесь

$$D: \ker \rho(b) \rightarrow \ker \Phi_a, \quad \Phi_a^{-1}: \ker \rho(b)^{\perp} \rightarrow \ker \Phi_a^{\perp}, \quad \text{ad}_b^*: \ker \rho(b)^{\perp} \rightarrow \ker \rho(b)^{\perp}.$$

Построенные операторы назовём операторами комплексной серии для алгебры Ли  $\Omega(G) = G \otimes (\mathbb{R}[x]/(x^2))$ .

### 1.3.2. Компактная серия секционных операторов

Напомним, что уже в случае полупростой алгебры Ли  $G$  и операторов  $\varphi_{abD}$  их ограничение на инвариантную подалгебру даёт операторы, которые отличны от  $\varphi_{abD}$ . Эту ситуацию выделим в виде отдельного определения.

**Определение 1.3.5.** Пусть  $G$  — алгебра Ли,  $L$  — её подалгебра,  $C: G^* \rightarrow G$  — линейный оператор (секционный оператор для коприсоединённого представления алгебры Ли  $G$ ). Скажем, что  $L$  — инвариантная подалгебра относительно оператора  $C$ , если существует такой линейный оператор  $E: L^* \rightarrow L$ , что  $C = iEr$ , где  $i: L \rightarrow G$  — отображение вложения, а  $r: G^* \rightarrow L^*$  — отображение ограничения на подалгебру  $L$ . В этом случае можно определить секционный оператор  $E: L^* \rightarrow L$  для коприсоединённого представления алгебры Ли  $L$ .

Пусть  $H$  — подалгебра Картана полупростой комплексной алгебры Ли  $G$ ,  $\alpha \in H^*$  — ненулевой корень,  $h'_\alpha \in H$  определим условием  $\alpha(h) = (h, h'_\alpha)$  для любого  $h \in H$ , где  $(x, y)$  — форма Киллинга алгебры Ли  $G$ .

Пусть также  $H_{\mathbf{Q}}$  — подпространство в  $H$ , порождённое всеми векторами  $h'_\alpha$  с рациональными коэффициентами. Мы будем рассматривать стандартную компактную вещественную форму  $G_u$  алгебры Ли  $G$ . В качестве вещественного базиса в  $G_u$  можно взять векторы  $ih'_\alpha$ ,  $e_\alpha + e_{-\alpha}$ ,  $i(e_\alpha - e_{-\alpha})$  (здесь  $i$  — мнимая единица).

Перейдём к построению секционных операторов для  $\Omega(G_u)$ . Построенные операторы будем называть операторами компактной серии для алгебры Ли  $\Omega(G_u)$ .

**Лемма 1.3.6.** Пусть  $a = i(a_1 + \varepsilon a_2) \in \ker \Phi_a \cap \Omega(G_u)$ . Тогда оператор  $\text{ad}_a^*$  для алгебры Ли  $\Omega(G_u)$  устроен следующим образом:

$$\begin{aligned} e_\alpha + e_{-\alpha} &\rightarrow \alpha(a_1)i(e_\alpha - e_{-\alpha}), \\ i(e_\alpha - e_{-\alpha}) &\rightarrow -\alpha(a_1)(e_\alpha + e_{-\alpha}), \\ \varepsilon(e_\alpha + e_{-\alpha}) &\rightarrow \alpha(a_2)i(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \varepsilon\alpha(a_1)i(e_\alpha - e_{-\alpha}), \\ \varepsilon i(e_\alpha - e_{-\alpha}) &\rightarrow -\alpha(a_2)(e_\alpha + e_{-\alpha}) - \varepsilon\alpha(a_1)i(e_\alpha + e_{-\alpha}). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Утверждение доказывается непосредственным вычислением с использованием леммы 1.2.1.  $\square$

**Лемма 1.3.7.** Пусть  $a = i(a_1 + \varepsilon a_2) \in \ker \rho(b) \cap \Omega(G_u)^*$ . Тогда оператор  $\Phi_a$  для алгебры Ли  $\Omega(G_u)$  устроен следующим образом:

$$\begin{aligned} e_\alpha + e_{-\alpha} &\rightarrow \alpha(a_1)i(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \varepsilon\alpha(a_2)i(e_\alpha - e_{-\alpha}), \\ i(e_\alpha - e_{-\alpha}) &\rightarrow -\alpha(a_1)(e_\alpha + e_{-\alpha}) - \varepsilon\alpha(a_2)(e_\alpha + e_{-\alpha}), \\ \varepsilon(e_\alpha + e_{-\alpha}) &\rightarrow \alpha(a_2)i(e_\alpha - e_{-\alpha}), \\ \varepsilon i(e_\alpha - e_{-\alpha}) &\rightarrow -\alpha(a_2)(e_\alpha + e_{-\alpha}), \end{aligned}$$

$$\ker \rho(b) \cap \Omega(G_u)^* \cong \ker \rho(b) \cap \Omega(G_u).$$

**Доказательство.** Утверждение доказывается непосредственным вычислением с использованием леммы 1.2.1.  $\square$

**Предложение 1.3.8.** Пусть элемент  $a = i(a_1 + \varepsilon a_2) \in \ker \rho(b) \cap \Omega(G_u)^*$  таков, что  $\alpha(a_2) \neq 0$  для любого корня  $\alpha \neq 0$ ,  $b = i(b_1 + \varepsilon b_2) \in \ker \Phi_a \cap \Omega(G_u)$ . Тогда оператор  $\Phi_a^{-1} \text{ad}_b^*$  для алгебры Ли  $\Omega(G_u)$  устроен следующим образом:

$$\begin{aligned} e_\alpha + e_{-\alpha} &\rightarrow \frac{\alpha(b_1)}{\alpha(a_2)} \varepsilon(e_\alpha + e_{-\alpha}), \\ i(e_\alpha - e_{-\alpha}) &\rightarrow \frac{\alpha(b_1)}{\alpha(a_2)} \varepsilon i(e_\alpha - e_{-\alpha}), \\ \varepsilon(e_\alpha + e_{-\alpha}) &\rightarrow \left( \frac{\alpha(b_2)}{\alpha(a_2)} - \frac{\alpha(b_1)\alpha(a_1)}{\alpha(a_2)^2} \right) \varepsilon(e_\alpha + e_{-\alpha}) + \frac{\alpha(b_1)}{\alpha(a_2)} (e_\alpha + e_{-\alpha}), \\ \varepsilon i(e_\alpha - e_{-\alpha}) &\rightarrow \left( \frac{\alpha(b_2)}{\alpha(a_2)} - \frac{\alpha(b_1)\alpha(a_1)}{\alpha(a_2)^2} \right) \varepsilon i(e_\alpha - e_{-\alpha}) + \frac{\alpha(b_1)}{\alpha(a_2)} i(e_\alpha - e_{-\alpha}). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Утверждение немедленно получается из лемм 1.3.6, 1.3.7.  $\square$

**Следствие 1.3.9.** Подалгебра  $\Omega(G_u)$  является инвариантной относительно секционных операторов комплексной серии.

Теперь можем построить секционный оператор для  $\Omega(G_u)$ . С помощью формы Киллинга мы отождествим  $\Omega(G_u)^*$  с  $\Omega(G_u) = G_u + \varepsilon G_u$ . Далее, пусть

$$V_u = \sum_{\alpha} \mathbb{R}(e_\alpha + e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha} \mathbb{R}i(e_\alpha - e_{-\alpha}) \subset G.$$

Тогда имеем разложение в прямую сумму линейных пространств:

$$\begin{aligned} \Omega(G_u) &= (H'_0 + \varepsilon H'_0) + (V_u + \varepsilon V_u), \\ \Omega(G_u)^* &\cong \Omega(G_u) = (H'_0 + \varepsilon H'_0) + (V_u + \varepsilon V_u), \\ H'_0 &= \sum_{\alpha \neq 0} \mathbb{R}i h'_\alpha. \end{aligned}$$

**Определение 1.3.10.** В соответствии с прямыми разложениями

$$\Omega(G_u) = (H'_0 + \varepsilon H'_0) + (V_u + \varepsilon V_u), \quad \Omega(G_u)^* = (H'_0 + \varepsilon H'_0) + (V_u + \varepsilon V_u)$$

положим

$$C = C(a, b, D) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \Phi_a^{-1} \text{ad}_b^* \end{pmatrix}.$$

Здесь  $D: H'_0 + \varepsilon H'_0 \rightarrow H'_0 + \varepsilon H'_0$  — произвольный самосопряжённый линейный оператор,  $a \in \Omega(G_u)^*$ ,  $b \in \Omega(G_u)$ .

**Замечание.** Напомним, что компактная серия секционных операторов строится и для полупростых комплексных алгебр Ли (см., например, [32, 68]). В случае полупростой алгебры Ли  $G$  секционный оператор  $C: G_u^* \rightarrow G_u$  в каноническом базисе  $e_\alpha + e_{-\alpha}$ ,  $i(e_\alpha - e_{-\alpha})$  является диагональным. В нашем случае компактная серия секционных операторов, в отличие от полупростых алгебр Ли, не диагонализуется в каноническом базисе.

### 1.3.3. Нормальная серия секционных операторов

Рассмотрим нормальную компактную подалгебру  $G_n$  в полупростой комплексной алгебре Ли  $G$ . По определению  $G_n$  имеем

$$G_n = \sum_{\alpha \neq 0} \mathbb{R}(e_\alpha + e_{-\alpha}).$$

**Лемма 1.3.11.** Пусть  $a = ia_1 + \varepsilon ia_2 \in H_0 + \varepsilon iH_0 \subset \Omega(G_u)^*$ ,  $\alpha(a_2) \neq 0$  для любого корня  $\alpha \neq 0$ , где  $H_0$  — подпространство в подалгебре Картана, порождённое над  $\mathbb{R}$  векторами  $h'_\alpha$ ,  $b \in iH_0 + \varepsilon iH_0 \subset \Omega(G_u)$ . Тогда операторы компактной серии  $C(a, b, D)$  сохраняют  $\Omega(G_n)$ . Более точно, операторы  $C(a, b, D)$  отображают  $\Omega(G_n)^* \cong G_n + \varepsilon G_n$  в  $\Omega(G_n) \cong G_n + \varepsilon G_n$  (изоморфизм  $\Omega(G_n)^* \cong G_n + \varepsilon G_n$  задаётся с помощью прямой суммы форм Киллинга алгебры Ли  $G_n$ ).

**Доказательство.** Утверждение вытекает из явного вида операторов  $C(a, b, D)$ .  $\square$

**Определение 1.3.12.** Построенные операторы  $C = C(a, b): \Omega(G_n)^* \rightarrow \Omega(G_n)$  будем называть операторами нормальной серии. Для их определения, как и в полупростом случае, элементы  $a, b$  надо брать не лежащими в  $\Omega(G_n)^*$  и в  $\Omega(G_n)$  соответственно.

## 1.4. Интегралы уравнений Эйлера на $\Omega(G)^*$

### 1.4.1. Интегралы для комплексной серии операторов

Пусть  $G$  — комплексная полупростая алгебра Ли,  $S_a(G)$  — множество функций на  $G^*$ , которые являются сдвигами инвариантов  $F$  коприсоединённого представления группы Ли  $g$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $G$ , т. е.  $S_a(G)$  состоит из множества функций вида  $F(x + \lambda a)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $a \in G^*$  — фиксированный ковектор. Используя алгоритм (A), мы построим функции  $\mathcal{A}(h) = \{h(y), \hat{h}(x, y)\}$  на пространстве  $\Omega(G)^*$  и тем самым получим набор  $S_a(\Omega(G))$  функций, определённых на пространстве  $\Omega(G)^*$ .

**Теорема 1.4.1.** Пусть функция  $h$  функционально зависит от функций семейства  $S_a(\Omega(G))$ . Тогда для любой комплексной полупростой алгебры Ли  $G$  уравнения Эйлера

$$\dot{x} = \{dh_x, x\}, \quad x \in \Omega(G)^*,$$

являются вполне интегрируемой гамильтоновой системой на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли  $\Omega(g)$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega(G)$ .

**Доказательство.** Инволютивность указанных функций вытекает из теоремы 1.1.3. Пусть  $F_1(x), \dots, F_N(x)$  — полный инволютивный набор функций на пространстве  $G^*$  (см. [159]). Тогда в силу теоремы 1.1.3 набор  $F_1(y), \dots, F_N(y), \hat{F}_1(x, y), \dots, \hat{F}_N(x, y)$  — функционально независимые функции

в инволюции на пространстве  $\Omega(G)^*$ . Для полной интегрируемости уравнений Эйлера  $\dot{x} = \{dh_x, x\}$ ,  $x \in \Omega(G)^*$ , надо иметь  $s$  первых интегралов, где

$$s = \frac{1}{2}(\dim \Omega(G) + \text{ind } \Omega(G)) = \frac{1}{2}(2 \dim G + 2 \text{ind } G) = 2 \left[ \frac{1}{2}(\dim G + \text{ind } G) \right] = 2N.$$

Поэтому предъявленный выше набор первых интегралов является полным инволютивным. Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 1.4.2.** Пусть  $G$  — комплексная полупростая алгебра Ли,  $\dot{x} = \{C(a, b, D)(x), x\}$  — уравнения Эйлера на  $\Omega(G)^*$  с оператором  $C(a, b, D)$  комплексной серии. Тогда эта система вполне интегрируема по Лиувиллю на всех орбитах коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega(g)$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega(G)$ . Более точно, пусть  $F(x)$  — любая гладкая инвариантная относительно  $\text{Ad}^* \Omega(g)$  функция на  $\Omega(G)^*$ . Тогда все функции вида  $F(x + \lambda a)$  являются первыми интегралами уравнений Эйлера при любом  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Любые два таких интеграла  $F(x + \lambda a)$ ,  $K(x + \mu a)$  находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединённого представления относительно канонической формы. Из указанного множества интегралов можно выбрать функционально независимые интегралы в количестве, равном половине размерности орбиты общего положения.

**Доказательство.** Инволютивность сдвигов инвариантов коприсоединённого представления — это общий факт.

Докажем, что сдвиги инвариантов являются первыми интегралами. Имеем равенства

$$\begin{aligned} \langle dF(x + \lambda a), \{Cx, x\} \rangle &= \langle dF(x + \lambda a), \{Cx, x + \lambda a\} \rangle - \langle dF(x + \lambda a), \{Cx, \lambda a\} \rangle = \\ &= \langle \{dF(x + \lambda a), x + \lambda a\}, Cx \rangle - \langle dF(x + \lambda a), \{Cx, \lambda a\} \rangle = \\ &= -\lambda \langle dF(x + \lambda a), \{\Phi_a^{-1} \text{ad}_b^* x' + Dh, a\} \rangle, \end{aligned}$$

так как из инвариантности  $F$  следует, что  $\langle dF(x + \lambda a), x + \lambda a \rangle = 0$  ( $x = x' + h$ , элемент  $h$  — из картановской подалгебры, а  $x'$  — из ортогонального дополнения к ней).

Поскольку  $Dh \in \ker \Phi_a$ , то

$$\langle dF(x + \lambda a), \{\Phi_a^{-1} \text{ad}_b^* x' + Dh, a\} \rangle = \langle dF(x + \lambda a), \{\Phi_a^{-1} \text{ad}_b^* x', a\} \rangle.$$

Последнее равенство можно продолжить, так как  $h, \lambda a \in \ker \rho(b)$ :

$$\begin{aligned} \langle dF(x + \lambda a), \{\Phi_a^{-1} \text{ad}_b^* x', a\} \rangle &= \langle dF(x + \lambda a), \text{ad}_b^* x' \rangle = \\ &= \langle dF(x + \lambda a), \text{ad}_b^*(x' + h + \lambda a) \rangle = \langle \{dF(x + \lambda a), x + \lambda a\}, b \rangle. \end{aligned}$$

Из инвариантности  $F$  следует, что  $\{dF(x + \lambda a), x + \lambda a\} = 0$ .

Докажем теперь функциональную независимость построенных первых интегралов уравнений Эйлера  $\dot{x} = \{C(x), x\}$ ,  $x \in \Omega(G)^*$ . Пусть  $F_1(x + \lambda a), \dots, F_N(x + \lambda a)$  — полный инволютивный набор функций на  $G^*$ . Тогда по нему с помощью алгоритма (A) можно построить полный набор функций в инволюции

на пространстве  $\Omega(G)^*$ :

$$F_1(y + \lambda a), \dots, F_N(y + \lambda a), \frac{\partial F_1(y + \lambda a)}{\partial y_i} x_i, \dots, \frac{\partial F_N(y + \lambda a)}{\partial y_i} x_i$$

(см. пример из пункта 1.1.3).

Рассмотрим теперь инварианты коприсоединённого представления для алгебры Ли  $\Omega(G)$ :

$$F_1(y), \dots, F_N(y), \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_i} x_i, \dots, \frac{\partial F_N(y)}{\partial y_i} x_i.$$

Мы должны рассмотреть сдвиги этих инвариантов на вектор  $a$ , причём  $a$  берётся из  $\varepsilon G$ . Тогда после сдвига этих функций на вектор  $a$ , очевидно, мы получим указанные выше первые интегралы, а они, как мы уже знаем, функционально независимы. Теорема полностью доказана.  $\square$

#### 1.4.2. Интегралы для компактной серии операторов

Так же, как и в предыдущем подразделе, доказываются следующие две теоремы.

**Теорема 1.4.3.** Пусть функция  $h$  функционально зависит от функций семейства  $S_a(\Omega(G_u))$ . Тогда уравнения Эйлера  $\dot{x} = \{dh_x, x\}$ ,  $x \in \Omega(G_u)^*$ , являются вполне интегрируемой гамильтоновой системой на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega(G_u)$ .

**Теорема 1.4.4.** Пусть  $G_u$  — компактная вещественная форма комплексной полупростой алгебры Ли,  $\dot{x} = \{C(a, b, D)(x), x\}$  — уравнения Эйлера на  $\Omega(G_u)^*$  с операторами компактной серии  $C(a, b, D): \Omega(G_u)^* \rightarrow \Omega(G_u)$ . Тогда эта система уравнений является вполне интегрируемой по Лиувиллю на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega(g_u)$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega(G_u)$ . Более точно, пусть  $F(x)$  — любая гладкая инвариантная относительно коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega(g_u)$  функция на  $\Omega(G_u)^*$ . Тогда все функции  $F(x + \lambda a)$  являются первыми интегралами уравнений Эйлера при любом  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Любые два таких интеграла  $F(x + \lambda a)$ ,  $K(x + \mu a)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , находятся в инволюции на всех орбитах относительно формы Кириллова. Из указанного множества интегралов можно выбрать функционально независимые интегралы в количестве, равном половине размерности орбиты общего положения в коприсоединённом представлении.

#### 1.4.3. Интегралы для нормальной серии операторов

Напомним, что операторы  $C(a, b)$  нормальной серии есть ограничение операторов компактной серии  $C(a, b, D)$  на тензорное расширение нормальной компактной подалгебры  $G_n$  в  $G$ :  $\Omega(G_n) \subset \Omega(G_n)$ .

Определим интегралы нормальной серии. Пусть  $I(G_u)$  — пространство инвариантов коприсоединённого представления группы Ли  $g_u$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $G_u$ . Если  $f \in I(G_u)$ , то положим  $f_\lambda(x) = f(x + \lambda a)$  и  $\bar{f}_\lambda = f_\lambda|_{G_n}$ , где  $G_n$  — нормальная компактная подалгебра в комплексной полупростой алгебре Ли  $G$ .

Применим к функциям вида  $\bar{f}_\lambda(x)$  операцию тензорного расширения  $\Omega(G_n) = G_n \otimes [\mathbb{R}[x]/(x^2)]$ . Тогда получим функции

$$\bar{f}_\lambda^{(1)}(x, y) = \bar{f}_\lambda(y), \quad \bar{f}_\lambda^{(2)}(x, y) = \frac{\partial \bar{f}_\lambda(y)}{\partial y_i} x_i \in \mathbb{C}^\infty(\Omega(G_n)^*)$$

(см. пример из пункта 1.1.3). Полученное семейство функций на  $\Omega(G_n)^*$  обозначим через  $S_a(\Omega(G_n))$ .

**Предложение 1.4.5.** Любая функция из семейства  $S_a(\Omega(G_n))$  является первым интегралом уравнений Эйлера  $\dot{x} = \{C(\hat{a}, b)(x), x\}$ ,  $x \in \Omega(G_n)^*$ , где  $C(\hat{a}, b)$  — операторы нормальной серии (здесь  $\hat{a} = i\varepsilon a \in i\varepsilon H_0$ ,  $b \in iH_0 + \varepsilon iH_0$ , причём для того корня  $\alpha \neq 0$ , для которого  $\alpha(a) \neq 0$ ).

**Доказательство.** Имеем  $df_\lambda^{(1)}, df_\lambda^{(2)} \in \Omega(G_u)$ , и элементы  $d\bar{f}_\lambda^{(1)}, d\bar{f}_\lambda^{(2)}$  являются ортогональными проекциями  $df_\lambda^{(1)}, df_\lambda^{(2)}$  соответственно. Более точно, если  $df_\lambda^{(i)} = v_1^{(i)} + \varepsilon v_2^{(i)}$ ,  $v_j^{(i)} \in G_u$  ( $i, j = 1, 2$ ), то  $d\bar{f}_\lambda^{(i)} = \pi(v_1^{(i)}) + \varepsilon \pi(v_2^{(i)})$ , где  $\pi$  — ортогональная проекция на  $G_n$  относительно формы Киллинга. В этом случае

$$\langle d\bar{f}_\lambda^{(i)}, \{Cx, x\} \rangle = (d\bar{f}_\lambda^{(i)}, \{Cx, x\}) = (\pi(v_1^{(i)}) + \varepsilon \pi(v_2^{(i)}), \{Cx, x\}).$$

Здесь  $(x, y)$  — скалярное произведение на  $G + \varepsilon G$ , равное прямой сумме форм Киллинга,  $\langle x, y \rangle$  — естественное спаривание  $G^* \times G \rightarrow \mathbb{R}$ .

Поскольку  $\{Cx, x\} \in \Omega(G_n)$ , то к  $\pi(v_1^{(i)}) + \varepsilon \pi(v_2^{(i)})$  можно добавить любое слагаемое, ортогональное к  $\Omega(G_n)$ :

$$\begin{aligned} (\pi(v_1^{(i)}) + \varepsilon \pi(v_2^{(i)}), \{Cx, x\}) &= (v_1^{(i)} + \varepsilon v_2^{(i)}, \{Cx, x\}) = \\ &= (df_\lambda^{(i)}, \{Cx, x\}) = \langle df^{(i)}(x + \lambda a), \{Cx, x\} \rangle, \end{aligned}$$

но  $\langle df^{(i)}(x + \lambda a), \{Cx, x\} \rangle = 0$ , что фактически проверено при доказательстве теоремы 1.4.2.  $\square$

**Предложение 1.4.6.** Любые два интеграла нормальной серии находятся в инволюции на всех орбитах коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega(g_n)$  относительно формы Кириллова. Количество функционально независимых интегралов, предъявленных в предложении 1.4.5, равно половине размерности орбиты общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega(g_n)$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega(G_n)$ .

**Доказательство.** Сведём доказательство к случаю нормальной серии операторов в полупростой комплексной алгебре Ли. Как известно [159], множество

функций вида  $\bar{f}_\lambda(x)$ ,  $f \in I(G_u)$ , есть полный инволютивный набор на пространстве  $G_n^* \cong G_n$ . Применяя к этому набору операцию тензорного расширения  $\Omega$ , мы получим полный инволютивный набор функций на пространстве  $\Omega(G_n)^*$  в силу теоремы 1.1.3.  $\square$

Итог нашим исследованиям подводит следующая теорема.

**Теорема 1.4.7.**

1. Пусть  $G_n$  — нормальная компактная подалгебра в комплексной полупростой алгебре Ли  $G$ ,  $\dot{x} = \{C(a, b)(x), x\}$ ,  $x \in \Omega(G_n)^*$ , — уравнения Эйлера на  $\Omega(G_n)^*$  с операторами нормальной серии  $C(a, b): \Omega(G_n)^* \rightarrow \Omega(G_n)$ . Эта система вполне интегрируема по Лиувиллю для почти всех  $a$  на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega(g_n)$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega(G_n)$ .
2. Пусть функция  $h$  функционально зависит от функций семейства  $S_a(\Omega(G_n))$ . Тогда уравнения Эйлера  $\dot{x} = \{dh_x, x\}$ ,  $x \in \Omega(G_n)^*$ , являются вполне интегрируемой гамильтоновой системой на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega(g_n)$ , ассоциированной с алгеброй Ли  $\Omega(G_n)$ .

## 1.5. Общая конструкция секционных операторов

### 1.5.1. Операторы твёрдого тела для коприсоединённого представления произвольной алгебры Ли

Пусть  $G$  — произвольная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем,  $H$  — её абелева подалгебра. Рассмотрим присоединённое представление  $\text{ad}: H \rightarrow \text{End}(G)$  и ограничение  $\text{ad}^*: H \rightarrow \text{End}(G^*)$  коприсоединённого представления  $\text{ad}^*: G \rightarrow \text{End}(G^*)$  алгебры Ли  $G$  на подалгебру  $H$ . В силу теоремы о представлениях нильпотентных алгебр Ли (см., например, [143]) имеют место разложения

$$G = G_0 + \sum_{\lambda \neq 0} G_\lambda, \quad G^* = G_0^* + \sum_{\lambda \neq 0} G_\lambda^*$$

на корневые подпространства

$$G_\lambda = \{\eta \in G \mid (\text{ad}_h - \lambda(h))^N \eta = 0\}$$

для любого  $h \in H$  при некотором  $N$  и

$$G_\lambda^* = \{f \in G^* \mid (\text{ad}_h^* - \lambda(h))^N f = 0\}$$

для любого  $h \in H$  при некотором  $N$ .

Фиксируем ковектор  $a \in G^*$  и рассмотрим отображение

$$\Phi_a(x) = \text{ad}_x^* a, \quad \Phi_a: G \rightarrow G^*.$$

Если  $a \in G_\lambda^*$ ,  $b \in G_\mu$ , то  $\Phi_a(b) = \text{ad}_b^* a \in G_{\lambda+\mu}^*$ . Подпространство  $G_0$  является подалгеброй в  $G$ , и  $H \in G_0$ .

**Определение 1.5.1.** Подалгебра  $H$  в алгебре Ли  $G$  называется гамильтоновой, если

- а)  $H$  коммутативная;
- б)  $H = G_0$ ;
- в) найдётся такой элемент  $a \in G_0^*$ , что отображение  $\Phi_a: G_\mu \rightarrow G_\mu^*$  является изоморфизмом для всех корней  $\mu \neq 0$ .

**Замечание.** Если  $G$  — полупростая алгебра Ли, то  $H$  — гамильтонова подалгебра тогда и только тогда, когда  $H$  — подалгебра Картана.

**Замечание.** Пусть  $H$  — гамильтонова подалгебра в алгебре Ли  $G$ , при этом

$$G = G_0 + \sum_{\alpha \neq 0} G_\alpha, \quad G^* = G_0^* + \sum_{\alpha \neq 0} G_\alpha^*$$

соответствующие разложения на корневые подпространства. Тогда

$$\dim G_0^* = \dim G_0.$$

**Определение 1.5.2.** Пусть  $D: G_0^* \rightarrow G_0$  — произвольный самосопряжённый линейный оператор,  $H$  — гамильтонова подалгебра в  $G$ . Выберем элементы  $b \in G_0$ ,  $a \in G_0^*$  как в определении гамильтоновой алгебры Ли. Определим семейство операторов  $C = C(a, b, D): G^* \rightarrow G$  по формуле

$$C = C(a, b, D) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & \Phi_a^{-1} \operatorname{ad}_b^* \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\Phi_a^{-1} \operatorname{ad}_b^* \left( \sum_{\alpha \neq 0} x_\alpha \right)$  по определению есть  $\sum_{\alpha \neq 0} \Phi_a^{-1} \operatorname{ad}_b^* x_\alpha$  и  $x_\alpha \in G_\alpha^*$ .

Это определение корректно, так как  $\operatorname{ad}_b^*(G_\lambda^*) \subset G_{\lambda+\mu}^*$  при  $b \in G_\mu$ . Эти операторы являются секционными операторами в смысле [154, 155]. Мы назовём их операторами твёрдого тела для коприсоединённого представления алгебры Ли  $G$ .

### 1.5.2. Построение первых интегралов уравнений Эйлера с операторами твёрдого тела

Следующая теорема позволяет строить достаточно большие запасы первых интегралов уравнений Эйлера с операторами твёрдого тела. Заметим, что полнота этих интегралов может быть доказана в некоторых случаях с использованием критерия А. В. Болсинова [35].

**Теорема 1.5.3.** Пусть  $H$  — гамильтонова алгебра Ли,  $b \in G_0$ ,  $a \in G_0^*$  и  $C(a, b, D)$  — соответствующие операторы твёрдого тела, действующие из  $G^*$  в  $G$ . Тогда все функции вида  $F(x + \lambda a)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x \in G^*$ , являются первыми интегралами уравнений Эйлера, где  $F(x)$  — произвольный инвариант коприсоединённого представления группы Ли  $g$ , отвечающей алгебре Ли  $G$ , т. е.  $F(x) = F(\operatorname{Ad}_r^* x)$  для любого элемента  $r \in g$ .

**Доказательство.** Уравнения Эйлера имеют вид

$$\dot{x} = \text{ad}_{C(x)}^*(x) = \{C(x), x\},$$

где мы используем краткое обозначение  $\{x, y\} = \text{ad}_x^* y$ ,  $x \in G$ ,  $y \in G^*$ .

Обозначим значение функционала  $f \in G^*$  на векторе  $y \in G$  через  $\langle y, f \rangle$ . Тогда  $F(x + \lambda a)$  — первый интеграл в том и только в том случае, когда  $\langle dF(x + \lambda a), \{C(x), x\} \rangle = 0$ . Будем проверять это равенство. Нам потребуются два замечания.

1. Имеет место равенство

$$\langle a_1, \{a_2, f\} \rangle = -\langle a_2, \{a_1, f\} \rangle.$$

Действительно,  $\{a_2, f\}(a_1) = f([a_2, a_1])$  и  $\{a_1, f\}(a_2) = f([a_1, a_2])$ .

2. Функция  $F$  является инвариантом тогда и только тогда, когда  $\{dF(x), x\} = 0$  (см., например, [143]).

Пусть  $x = x_0 + x_1$ , где  $x_0 \in G_0^*$ ,  $x_1 \in \sum_{\alpha \neq 0} G_\lambda^*$ . Имеем равенство

$$\begin{aligned} \sigma &= \langle dF(x + \lambda a), \{C(x), x\} \rangle = \\ &= \langle dF(x + \lambda a), \{C(x), x + \lambda a\} \rangle - \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{C(x), a\} \rangle, \end{aligned}$$

которое в силу замечания 1 влечёт

$$\sigma = -\langle C(x), \{dF(x + \lambda a), x + \lambda a\} \rangle - \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{C(x), a\} \rangle.$$

Используя замечание 2 и определение операторов  $C$ , мы получим равенство

$$\begin{aligned} \sigma &= -\lambda \langle dF(x + \lambda a), \{C(x), a\} \rangle = -\lambda \langle dF(x + \lambda a), \{\Phi_a^{-1} \text{ad}_b^*(x_1) + D(x_0), a\} \rangle = \\ &= -\lambda \langle dF(x + \lambda a), \{\Phi_a^{-1} \text{ad}_b^*(x_1), a\} \rangle - \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{D(x_0), a\} \rangle = \\ &= -\lambda \left\langle dF(x + \lambda a), \Phi_a \left( \Phi_a^{-1} (\text{ad}_b^*(x_1)) \right) \right\rangle - \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{D(x_0), a\} \rangle = \\ &= -\lambda \langle dF(x + \lambda a), \text{ad}_b^*(x_1) \rangle - \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{D(x_0), a\} \rangle. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sigma &= -\lambda \langle dF(x + \lambda a), \{b, x_1 + x_0 + \lambda a\} \rangle - \\ &\quad - \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{D(x_0), a\} \rangle + \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{b, x_0 + \lambda a\} \rangle = \\ &= -\lambda \langle dF(x + \lambda a), \{b, x + \lambda a\} \rangle - \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{D(x_0), a\} \rangle + \\ &\quad + \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{b, x_0 + \lambda a\} \rangle. \end{aligned}$$

Применяя замечание 1, мы получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda \langle b, \{dF(x + \lambda a), x + \lambda a\} \rangle - \\ &\quad - \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{D(x_0), a\} \rangle + \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{b, x_0 + \lambda a\} \rangle. \end{aligned}$$

Используя замечание 2, мы получаем

$$\sigma = -\lambda \langle dF(x + \lambda a), \{D(x_0), a\} \rangle + \lambda \langle dF(x + \lambda a), \{b, x_0 + \lambda a\} \rangle.$$

Утверждается, что  $\{D(x_0), a\} = 0$  и  $\{b, x_0 + \lambda a\} = 0$ . Действительно,  $D(x_0), b \in G$ ,  $a, x_0 + \lambda a \in G_0^*$  и  $\{G_0, G_0^*\} = 0$ , так как  $G_0 = H$  по условию гамильтоновости подалгебры,  $H$  — абелева подалгебра. Поэтому если  $\xi \in G_0$ ,  $f \in G_0^*$ , то для  $v \in G_0$  имеем равенство

$$(\text{ad}_\xi^* f)(v) = f([\xi, v]) = f(0) = 0,$$

так как  $\xi, v \in G_0 = H$  и  $H$  — коммутативная подалгебра. Если  $\xi \in G_0$ ,  $f \in G_0^*$ , то для  $v \in \sum_{\alpha \neq 0} G_\alpha$  имеем равенство

$$(\text{ad}_\xi^* f)(v) = f([\xi, v]) = f(v') = 0,$$

так как  $v' = [\xi, v] \in \sum_{\alpha \neq 0} G_\alpha$  и поскольку если  $f \in G_0^*$ , то  $f|_{\sum_{\alpha \neq 0} G_\alpha} = 0$ . Теорема полностью доказана.  $\square$

### 1.6. Канонические координаты на орбитах коприсоединённого представления тензорных расширений групп Ли

Введём следующие обозначения. Если  $e_1, \dots, e_n$  — базис алгебры Ли  $G$ , то  $e_1, \dots, e_n, \varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_n$  — базис алгебры Ли  $\Omega(G) = G \otimes (\mathbb{R}[x]/(x^2))$ . Координаты в  $\Omega(G)^*$  в базисе, дуальном к  $e_1, \dots, e_n, \varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_n \in \Omega(G)$ , обозначим через  $x_i, y_i$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), причём  $x_i$  относится к  $e^i$ , а  $y_j$  — к базису  $\varepsilon e^j \in (\varepsilon G)^*$ .

Пусть  $C_{ij}^k$  — структурный тензор алгебры Ли  $G$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ , а  $\hat{C}_{ij}^k$  — структурный тензор алгебры Ли  $\Omega(G)$  в построенном базисе. Если  $F(x)$  — функция на пространстве  $G^*$ , то  $\mathcal{A}(F) = \{F^{(1)}, F^{(2)}\}$ , где  $F^{(1)}(y) = F(y)$  и  $F^{(2)}(x, y) = \partial F(y) / \partial y_i x_i$ .

**Теорема 1.6.1.** Пусть функции  $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s$ , определённые на пространстве  $G^*$ , дуальном к алгебре Ли  $G$ , дают канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $g$ , отвечающей алгебре Ли  $G$ , т. е.

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Тогда функции

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1^{(1)}, \dots, P_s = p_s^{(1)}, P_{s+1} = p_1^{(2)}, \dots, P_{2s} = p_s^{(2)}, \\ Q_1 &= q_1^{(2)}, \dots, Q_s = q_s^{(2)}, Q_{s+1} = q_1^{(1)}, \dots, Q_{2s} = q_s^{(1)} \end{aligned}$$

на пространстве  $\Omega(G)^*$  дают канонические координаты на всех орбитах коприсоединённого представления группы Ли  $\Omega(g)$ , отвечающей алгебре Ли  $\Omega(G)$ , т. е.

$$\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}.$$

**Доказательство.** Обозначим переменные  $\{x_i, y_j\}$  через  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, 2n$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Тогда скобка Пуассона на  $\Omega(G)^*$  имеет вид

$$\hat{C}_{ij}^k z_k \frac{\partial F(z)}{\partial z_i} \frac{\partial H(z)}{\partial z_j} = \{F, H\}_{\Omega(G)}.$$

Для функций  $F^{(2)}(x, y)$ ,  $H^{(2)}(x, y)$  мы имеем равенство

$$\begin{aligned} \{F^{(2)}, H^{(2)}\}_{\Omega(G)} &= C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F(y)}{\partial y_p} x_p \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial H(y)}{\partial y_p} x_p \right) + \\ &+ C_{ij}^k y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial F(y)}{\partial y_p} x_p \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial H(y)}{\partial y_p} x_p \right) + \\ &+ C_{ij}^k y_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F(y)}{\partial y_p} x_p \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\partial H(y)}{\partial y_p} x_p \right) = \\ &= C_{ij}^k x_k \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} \frac{\partial H(y)}{\partial y_j} + C_{ij}^k y_k x_p \frac{\partial^2 F(y)}{\partial y_i \partial y_p} \frac{\partial H(y)}{\partial y_j} + C_{ij}^k y_k x_p \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} \frac{\partial^2 H(y)}{\partial y_j \partial y_p}. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что последнее выражение равно

$$x_p \frac{\partial}{\partial y_p} \left[ C_{ij}^k y_k \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} \frac{\partial H(y)}{\partial y_j} \right].$$

Для функций  $F^{(1)}$ ,  $H^{(2)}$  имеем соотношение

$$\begin{aligned} \{F^{(1)}, H^{(2)}\}_{\Omega(G)} &= C_{ij}^k x_k \frac{\partial F(y)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial H(y)}{\partial y_p} x_p \right) + \\ &+ C_{ij}^k y_k \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial H(y)}{\partial y_p} x_p \right) + C_{ij}^k y_k \frac{\partial F(y)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\partial H(y)}{\partial y_p} x_p \right) = \\ &= C_{ij}^k y_k \frac{\partial F(y)}{\partial y_i} \frac{\partial H(y)}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Используя полученные равенства, легко проверить соотношения  $\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 0$ ,  $\{P_i, Q_j\} = \delta_{ij}$ .

Из общих свойств алгоритма (A) следует, что  $P_1, \dots, P_{2s}, Q_1, \dots, Q_{2s}$  — координаты на орбитах общего положения. Следовательно, это канонические координаты на таких орбитах.  $\square$

## 2. Обобщённые классы Маслова

### 2.1. Обобщённые классы Маслова на пространстве путей

#### 2.1.1. Классы Маслова в стандартном симплектическом пространстве

Напомним необходимые для дальнейшего определения и конструкции. Пусть  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  обозначает стандартное симплектическое пространство с канонической

симплектической структурой

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i,$$

где  $q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$  — координаты в  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Обозначим через  $\Lambda(n)$  лагранжев грассманиан, т. е. множество всех линейных лагранжевых подпространств в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Выбрав почти комплексную структуру  $J$  в  $\mathbb{R}^{2n}$ , согласованную с симплектической структурой  $\omega$ , мы можем рассматривать многообразие  $\Lambda(n)$  как однородное пространство  $U(n)/O(n)$ .

Если  $N^n$  — лагранжево подмногообразие стандартного симплектического пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , то связывание с точкой  $x \in N^n$  перенесённого в начало координат касательного пространства  $T_x N^n$  определяет отображение  $f: N^n \rightarrow \Lambda(n)$  многообразия  $N^n$  в лагранжев грассманиан  $\Lambda(n)$ , которое позволяет определить характеристические классы лагранжевых подмногообразий. Построенное отображение  $f: N^n \rightarrow \Lambda(n)$  индуцирует отображение  $f^*: H^*(\Lambda(n)) \rightarrow H^*(N^n)$  в когомологиях, и каждый класс когомологий  $\alpha \in H^*(\Lambda(n))$  определяет характеристический класс  $f^*(\alpha) \in H^*(N^n)$  лагранжева многообразия  $N^n$ .

Напомним определение выделенного класса когомологий  $\mu \in H^1(\Lambda(n))$ , который называется классом Маслова. Пусть  $\det: U(n) \rightarrow \mathbf{S}^1$  — отображение, ставящее в соответствие каждому преобразованию его определитель. Поскольку  $\det(O(n)) = \{\pm 1\} = \mathbf{S}^0$ , то определено отображение  $\det^2: U(n)/O(n) \rightarrow \mathbf{S}^1$ , являющееся расслоением со слоем  $SU(n)/SO(n)$ . На окружности  $\mathbf{S}^1$  рассмотрим дифференциальную форму  $dz/2\pi iz$ , класс когомологий которой порождает  $H^1(\mathbf{S}^1; \mathbb{R})$ . Тогда на  $U(n)/O(n)$  определена дифференциальная форма  $(\det^2)^*(dz/2\pi iz)$ . После отождествления  $\Lambda(n) \cong U(n)/O(n)$  мы получим дифференциальную форму на многообразии  $\Lambda(n)$ . Класс когомологий  $\mu = [(\det^2)^*(dz/2\pi iz)]$  построенной формы не зависит от произвольных элементов, участвующих в его определении (см., например, [3, 10]).

Пусть  $N^n \subset \mathbb{R}^{2n}$  — лагранжево подмногообразие и  $\gamma$  — кривая на  $N^n$ . Ей отвечает кривая, составленная из лагранжевых подпространств  $X(t) = T_{\gamma(t)} N^n$ . Если  $\gamma$  — замкнутая кривая, то определено число

$$l = \oint_{\gamma} (\det^2)^* \frac{dz}{2\pi iz}.$$

В действительности мы определили элемент из  $H^1(N^n; \mathbf{Z})$ . Он называется классом Арнольда—Маслова для лагранжева подмногообразия  $N^n$ .

Пусть  $M^m$  — гладкое многообразие, а  $\omega$  — стандартная симплектическая структура на кокасательном расслоении  $T^*M^m$ . Каждое касательное пространство  $T_z(T^*M^m)$ ,  $z \in T^*M^m$ , является симплектическим векторным пространством, и в нём можно взять лагранжево подмногообразие  $V_z$ , касательное к вертикали, т. е. состоящее из таких касательных векторов  $\xi$ , что  $d\pi_z \xi = 0$ , где  $\pi$  обозначает стандартную проекцию  $\pi: T^*M^m \rightarrow M^m$ . Выбор римановой метрики на  $M^m$  индуцирует положительно определённое скалярное произведение на  $V_z$ ,

позволяющее отождествить  $\Lambda(T_z(T^*M^m))$  с  $U(n)/O(n)$  (здесь  $\Lambda(T_z(T^*M^m))$  — лагранжев грассманиан для симплектического пространства  $T_z(T^*M^m)$ ).

Значит,  $(\det^2)^*(dz/2\pi iz)$  — корректно определённая дифференциальная форма на расслоении  $\Lambda(T^*M)$ , где  $\Lambda(T^*M)$  — расслоение над  $T^*M$ , у которого слой над точкой  $z$  состоит из всех лагранжевых подпространств в  $T_z(T^*M)$ .

Если  $N$  — лагранжево подмногообразие в  $T^*M$ , то для любой кривой  $\gamma$  на  $N$  определена естественным образом кривая на  $\Lambda(T^*M)$ . В этом случае определим целое число  $l = l(\gamma)$  по формуле, приведённой выше. Так мы получим элемент из  $H^1(N; \mathbf{Z})$ , который называется классом Арнольда—Маслова подмногообразия  $N$ . Этот класс не зависит от выбора римановой метрики (см. подробности в [20]).

В следующих разделах изложенные конструкции будут обобщены на случай лагранжевых подмногообразий в произвольных симплектических многообразиях.

### 2.1.2. Обобщённые классы Маслова в аффинной геометрии

Пусть  $X^n$  — гладкое многообразие, на котором задана аффинная связность  $\Gamma_j^i k^j$ ,  $L^m$  — произвольное подмногообразие в  $X^n$ . В этой ситуации можно определить нестабильные характеристические классы подмногообразия  $L^m$ , являющиеся аналогом классов Маслова в симплектической геометрии (см. раздел 2.1.1).

Введём обозначение

$$[X^n, L^m] = \{\alpha: [0, 1] \rightarrow X^n\},$$

где  $\alpha$  — такое кусочно-гладкое отображение отрезка  $[0, 1]$  в многообразие  $X^n$ , что  $\alpha(0) = x_0$  и  $\alpha(1) \in L^m$ . Это пространство и его геометрия играют важную роль в многомерном вариационном исчислении (см. [123]).

Определим отображение  $f: [X^n, L^m] \rightarrow G_m(T_{x_0}X^n)$  пространства  $[X^n, L^m]$  в грассманиан  $G_m(T_{x_0}X^n)$ , порождённый касательным пространством  $T_{x_0}X^n$ , где  $m = \dim L^m$ . Если  $\alpha \in [X^n, L^m]$ , то касательное пространство  $T_{\alpha(1)}L^m$  переносится параллельно связности  $\Gamma_{jk}^i$  в точку  $x(0) = \alpha(0)$  вдоль пути  $\alpha$ . Образ пространства  $T_{\alpha(1)}L^m$  при этом параллельном переносе обозначим через  $f(\alpha)$ . Подпространство  $f(\alpha) \subset T_{x_0}X^n$  является по определению образом пути  $\alpha$  при отображении  $f$ , которое назовём касательным представлением подмногообразия  $L^m$ . Оно индуцирует отображение  $f^*$  в обобщённой теории коомологий  $h^*$  (см. [161]):

$$f^*: h^*(G_m(T_{x_0}X^n)) \rightarrow h^*([X^n, L^m]).$$

В этой ситуации можно определить стандартным образом характеристические классы подмногообразия  $L^m \subset X^n$ , принимающие значения в теории коомологий  $h^*$ .

**Определение 2.1.1.** Пусть  $a \in h^*(G_m(T_{x_0}X^n))$  — произвольный класс коомологий грассманиана  $G_m(T_{x_0}X^n)$ . Тогда классы коомологий вида  $f^*(a) \in h^*([X^n, L^m])$  назовём обобщёнными классами Маслова подмногообразия  $L^m \subset X^n$  (здесь  $f$  — касательное представление подмногообразия  $L^m \subset X^n$ ).

### 2.1.3. Обобщённые классы Маслова в симплектической геометрии

В случае симплектических многообразий и лагранжевых подмногообразий конструкцию раздела 2.1.2 можно дополнить. Для этого потребуется понятие симплектической связности.

**Определение 2.1.2.** Пусть  $M^{2m}$  —  $2m$ -мерное гладкое многообразие, снабжённое невырожденной 2-формой. Тогда  $(M^{2m}, \omega)$  называется почти симплектическим многообразием. Связность  $\Gamma_{jk}^i$  на многообразии  $M^{2m}$  называется почти симплектической связностью, если  $\nabla_k \omega_{ij} = 0$ , где  $\nabla_k$  — ковариантная производная относительно связности  $\Gamma_{js}^i$ . Почти симплектическая связность с нулевым кручением называется симплектической связностью.

**Предложение 2.1.3.** Если почти симплектическое многообразие  $(M^{2m}, \omega)$  допускает почти симплектическую связность без кручения, то  $d\omega = 0$ , т. е.  $(M^{2m}, \omega)$  — симплектическое многообразие.

**Доказательство.** Равенство  $\nabla_k \omega_{ij} = 0$  эквивалентно соотношениям

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^s \omega_{sj} + \Gamma_{jk}^s \omega_{is}.$$

Совершая циклическую перестановку индексов  $(i, j, k)$  и складывая полученные три равенства, мы найдём, что

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} = 0,$$

что и означает замкнутость формы  $\omega$ .  $\square$

Известно, что  $(M^{2m}, \omega)$  допускает бесконечно много почти симплектических связностей (см. [234]).

**Теорема 2.1.4.** Пусть  $(M^{2m}, \omega)$  — симплектическое многообразие. Тогда на  $M^{2m}$  существует по крайней мере одна симплектическая связность.

Применим конструкцию предыдущего раздела в случае, когда  $L^m$  — лагранжево подмногообразие в симплектическом многообразии  $M^{2m}$ . Зафиксируем на  $M^{2m}$  некоторую симплектическую связность. Хотя бы одна такая симплектическая связность существует (см. [234]). Тогда касательное представление  $f$  подмногообразия  $L^m$  даёт отображение

$$f: [M^{2m}, L^m] \rightarrow \Lambda(T_{x_0} M^{2m}),$$

где  $\Lambda(T_{x_0} M^{2m})$  — лагранжево грассманиан симплектического пространства  $(T_{x_0} M^{2m}, \omega_{x_0})$ . Тогда имеем отображение

$$f^*: h^*(\Lambda(T_{x_0} M^{2m})) \rightarrow h^*([M^{2m}, L^m])$$

в когомологиях.

**Определение 2.1.5.** Пусть  $a \in h^*(\Lambda(T_{x_0} M^{2m}))$  — произвольный класс когомологий лагранжева грассманиана  $\Lambda(T_{x_0} M^{2m})$ . Тогда классы когомологий вида  $f^*(a) \in h^*([M^{2m}, L^m])$  назовём обобщёнными классами Маслова лагранжева подмногообразия  $L^m \subset N^{2m}$ .

#### 2.1.4. Свойства обобщённых классов Маслова

В этом разделе мы укажем простейшие свойства построенных выше обобщённых классов, весьма полезных для дальнейшего.

**Предложение 2.1.6.** *Обобщённые классы Маслова не зависят от выбора симплектической связности  $\Gamma_{jk}^i$  на многообразии  $M^{2m}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma_{jk}^i, \hat{\Gamma}_{jk}^i$  — две симплектические связности на  $M^{2m}$ , а  $f, \hat{f}$  — соответствующие касательные представления подмногообразия  $L^m \subset M^{2m}$ , т. е.

$$f, \hat{f}: [M^{2m}, L^m] \rightarrow \Lambda(T_{x_0} M^{2m}).$$

Утверждается, что отображения  $f$  и  $\hat{f}$  гомотопны. Действительно, симплектические связности образуют аффинное подпространство в пространстве всех связностей на многообразии  $M^{2m}$ . Поэтому  $\Gamma_{jk}^i(s) = s\Gamma_{jk}^i + (1-s)\hat{\Gamma}_{jk}^i$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , — симплектическая связность.

Пусть  $f_s$  — касательное представление относительно связности  $\Gamma_{jk}^i(s)$ . Отображение  $f_s$  задаёт искомую гомотопию между  $f$  и  $\hat{f}$ , так как решение дифференциального уравнения для нахождения параллельного переноса

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i(s)\xi^j \frac{dx^k}{dt} = 0$$

непрерывно зависит от параметра  $s$ .  $\square$

**Предложение 2.1.7.** *Если  $L^n \subset \mathbb{R}^{2n}$  — лагранжево подмногообразие в стандартном симплектическом пространстве*

$$\left( \mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i \right),$$

*то обобщённые классы Маслова совпадают с классическими классами Маслова—Арнольда.*

**Доказательство.** Пространство путей  $[M^{2m}, L^m]$  вместе с отображением

$$\pi: [M^{2m}, L^m] \rightarrow L^m, \quad \pi(\alpha) = \alpha(1),$$

является расслоением в смысле Серра, слоем которого служит пространство петель  $\Omega(M^{2m})$ . В этой ситуации имеется спектральная последовательность Серра, член  $E_2$  которой равен

$$E_2^{p,q} = H^p\left(L^m, \mathcal{H}^q(\Omega(M^{2m}))\right),$$

где  $\mathcal{H}^q(\Omega(M^{2m}))$  — система локальных коэффициентов над  $L^m$ , определённая действием фундаментальной группы  $\pi_1(L^m)$  на группах когомологий слоя  $H^q(\Omega(M^{2m}))$  (см. [161]).

В нашем случае пространство  $M^{2m} = \mathbb{R}^{2m}$  стягиваемо, поэтому локальная система тривиальна. Из свойств спектральной последовательности вытекает, что

$H^q([\mathbb{R}^{2n}, L^n]) \cong H^q(L^n)$ , причём изоморфизм задаётся отображением  $\pi^*$ . Отсюда и следует наше утверждение.  $\square$

**Теорема 2.1.8.** *Классы Арнольда—Маслова лагранжева подмногообразия  $L^n \subset \mathbb{R}^{2n}$  не зависят от выбора плоских симплектических связностей  $\Gamma_{jk}^i(1)$  и  $\Gamma_{jk}^i(2)$ . Для них определены соответствующие касательные представления*

$$f_j: [\mathbb{R}^{2n}, L^n] \rightarrow \Lambda(\mathbb{R}^{2n}), \quad j = 0, 1.$$

**Доказательство.** Если связность плоская, то имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{R}^{2n}, L^n] & & \\ \pi \downarrow & \searrow f_j & \\ L^n & \xrightarrow{\bar{f}_j} & \Lambda(\mathbb{R}^{2n}), \end{array}$$

где  $\bar{f}_j$  — параллельный перенос касательного пространства к подмногообразию вдоль некоторого пути, идущего в точку  $x_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Поскольку объемлющее пространство  $\mathbb{R}^{2n}$  односвязно, а связность плоская, то отображение  $\bar{f}_j$  корректно определено. В когомологиях имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*([\mathbb{R}^{2n}, L^n]) & & \\ \pi^* \uparrow & \nwarrow f_j^* & \\ H^*(L^n) & \xleftarrow{\bar{f}_j^*} & H^*(\Lambda(\mathbb{R}^{2n})) \end{array}$$

и, следовательно,  $f_j^* = \pi^* \bar{f}_j^*$ .

Далее,  $f_0^* = f_1^*$ , так как отображения  $f_0, f_1$  гомотопны (см. доказательство предложения 2.1.6). Итак,  $\pi^* \bar{f}_0^* = \pi^* \bar{f}_1^*$ . Поскольку в случае  $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$  отображение  $\pi^*$  — изоморфизм (см. доказательство предложения 2.1.7), то  $\bar{f}_0^* = \bar{f}_1^*$ , что и утверждалось.  $\square$

## 2.2. Проекция обобщённых классов Маслова из пространства путей в многообразия

### 2.2.1. Группа голономии

В некоторых случаях характеристические классы, определённые на пространстве путей  $[X^n, L^m]$ , где  $X^n$  — многообразие с аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i$ , можно спроектировать в некоторые классы когомологий подмногообразия  $L^m$ . Для этого грассманиан нужно профакторизовать по действию некоторой группы.

Пусть  $H = H(X^n, x_0)$  — группа голономии в точке  $x_0 \in X^n$  для связности  $\Gamma_{jk}^i$ . Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [X^n, L^m] & \xrightarrow{f} & G_m(T_{x_0}X^n) \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ L^m & \xrightarrow{\bar{f}} & G_m(T_{x_0}X^n)/H, \end{array}$$

при этом отображение  $\bar{f}$  будет описано ниже.

Для некоторых классов многообразий эта конструкция позволяет построить нетривиальные характеристические классы для подмногообразий.

Напомним, что группа голономии  $H$  в точке  $x_0$  — это группа всех линейных преобразований касательного пространства  $T_{x_0}X^n$ , полученных с помощью параллельных переносов вдоль кусочно-гладких кривых, начинающихся и кончающихся в точке  $x_0$ . Нормальная подгруппа  $H^0$  в группе  $H$ , порождённая параллельными переносами вдоль петель, гомотопных нулю, называется ограниченной группой голономии.

Ясно, что группа голономии  $H$  действует на грассмановых многообразиях  $G_m(T_{x_0}X^n)$ ,  $m = 1, \dots, n$ .

### 2.2.2. Конечномерные характеристические классы подмногообразий в многообразиях с аффинной связностью

Пусть  $M^m$  — многообразие с аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i$ . Параллельный перенос вдоль кривой  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , из фиксированной точки  $x_0 = \gamma(0)$  в точку  $x = \gamma(1)$  обозначим через  $\tau_\gamma^{-1}$ . Если  $V$  — произвольное подпространство касательного пространства  $T_{x_0}M^m$ , то  $\tau_\gamma^{-1}V$  — корректно определённое подпространство в  $T_x M^m$ .

Предположим, что  $x = x_0$  ( $\gamma(0) = \gamma(1)$ ). Тогда предыдущее замечание показывает, что группа голономии  $H = H_{x_0}(M^m)$  с базисной точкой  $x_0$  действует на грассмановом многообразии  $G_k(T_{x_0}M^m)$ ,  $k = \dim V$ .

Введём в рассмотрение приведённое пространство Грассмана (приведённый грассманиан)

$$HG_k(T_{x_0}M^m) = G_k(T_{x_0}M^m)/H_{x_0}(M^m).$$

Предположим, что  $N^n \subset M^m$  — произвольное подмногообразие (вообще говоря, с краем), а  $x_0 \in M^m$  — фиксированная точка. Для произвольной точки  $x \in N^n$  рассмотрим такую кусочно-гладкую кривую, что  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x$ . Пусть  $\tau_\gamma^{-1}$  — параллельный перенос из точки  $x_0$  в точку  $x$  вдоль кривой  $\gamma$ . Тогда можно определить отображение

$$f: N^n \rightarrow G_n(T_{x_0}M^m)$$

по правилу  $f(x) = \tau_\gamma(T_x N^n) \subset T_{x_0} M^m$ . Если имеется ещё одна кривая  $\beta(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , такая что  $\beta(0) = x_0$ ,  $\beta(1) = x$ , то определено подпространство  $\tau_\beta(T_x N^n) \subset T_{x_0} M^m$ .

Существует линейное отображение  $A \in H$  из группы голономии  $H = H_{x_0}(M^m)$ , такое что  $A(\tau_\beta T_x N^n) = \tau_\gamma(T_x N^n)$ . Поэтому мы имеем корректно определённое отображение

$$f: N^n \rightarrow HG_n(T_{x_0} M^m)$$

подмногообразия  $N^n$  в приведённый грассманиан  $HG_n(T_{x_0} M^m)$ .

**Определение 2.2.1.** Построенное выше отображение  $f: N^n \rightarrow HG_n(T_{x_0} M^m)$  будем называть касательным представлением подмногообразия  $N^n$  в многообразии  $M^m$  с аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i$ .

Касательное представление  $f$  индуцирует отображение  $f^*$  в когомологиях:

$$f^*: H^*(HG_n(T_{x_0} M^m)) \rightarrow H^*(N^n).$$

Отметим, что отображение  $f^*$  можно построить для произвольной экстраординарной теории когомологий  $h^*$ .

**Теорема 2.2.2.** Пусть  $M^m$  — многообразие с аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i$ ,  $a \in H^*(HG_n(T_{x_0} M^m))$  — произвольный класс когомологий приведённого грассманиана. Тогда определены естественные характеристические классы  $a(N^n) = f^*(a) \in H^*(N^n)$  подмногообразия  $N^n \subset M^m$ . Более точно, если  $\varphi: M_1^m \rightarrow M_2^m$  — аффинный диффеоморфизм многообразий с аффинной связностью, то существует корректно определённое отображение

$$d\varphi: HG_n(T_{x_0} M_1^m) \rightarrow HG_n(T_{\varphi(x_0)} M_2^m),$$

для которого  $(d\varphi)^*(a)(N) = \varphi^*(a(\varphi(N)))$  для любого класса когомологий  $a \in HG_n(T_{\varphi(x_0)} M_2^m)$ .

**Доказательство.** Параллельный перенос коммутирует с аффинными отображениями, поэтому имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} N^n & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(N^n) \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ HG_n(T_{x_0} M_1^m) & \xrightarrow{d\varphi} & HG_n(T_{\varphi(x_0)} M_2^m), \end{array}$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — касательные представления подмногообразий  $N^n$  и  $\varphi(N^n)$  соответственно, а  $d\varphi$  — дифференциал отображения  $\varphi$ . Отсюда следует наше утверждение о естественности классов  $a(N^n)$ .  $\square$

**Определение 2.2.3.** Пусть  $M^m$  — многообразие с аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i$ . Относительными характеристическими классами пары  $(M^m, N^n)$ , где  $N^n$  — подмногообразие в  $M^m$ , будем называть любые классы когомологий вида

$a(N^n) = f^*(a) \in H^*(N^n)$ , где  $f$  — касательное представление подмногообразия  $N^n \subset M^m$  и  $a \in H^*(G_n(T_{x_0}M^m))/H_{x_0}(M^m)$  — произвольный класс когомологий приведённого грассманиана  $HG_n(T_{x_0}M^m)$ ,  $H_{x_0}(M^m)$  — группа голономии связности  $\Gamma_{jk}^i$ .

Отметим следующее свойство относительных характеристических классов.

**Теорема 2.2.4.** Пусть  $M^m$  — многообразие с аффинной связностью,  $N^n$  — вполне геодезическое подмногообразие в  $M^m$ . Тогда все относительные характеристические классы пары  $(M^m, N^n)$  равны нулю.

**Доказательство.** Выберем точку  $y_0 \in N^n$ , и пусть  $\gamma_0$ ,  $\gamma_0(0) = y_0$ ,  $\gamma_0(1) = x_0$ , — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки  $y_0$  и  $x_0$ . Рассмотрим в группе голономии  $H = H_{x_0}(M^m)$  подгруппу  $H'$ , состоящую из преобразований, порождённых параллельным переносом вдоль путей вида  $\gamma_0\alpha\gamma_0^{-1}$ , при этом  $\alpha$  лежит на подмногообразии  $N^n$ . Ясно, что  $H'$  — подгруппа в  $H$ .

Используя параллельный перенос вдоль путей вида  $\gamma_0\alpha\gamma_0^{-1}$ ,  $\alpha(t) \subset N^n$ , мы определим корректным образом отображение

$$\tilde{f}: N^n \rightarrow G_n(T_{x_0}M^m)/H'.$$

Поскольку  $N^n$  — вполне геодезическое подмногообразие, то  $\tilde{f} = \text{const}$  (см. [143]).

Имеется естественная проекция

$$\pi: G_n(T_{x_0}M^m)/H' \rightarrow G_n(T_{x_0}M^m)/H,$$

так как  $H' \subset H$ .

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} N^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & G_n(T_{x_0}M^m)/H' \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & G_n(T_{x_0}M^m)/H, \end{array}$$

где  $f$  определяется с помощью параллельного переноса уже по всем путям, коммутативна. Действительно, пусть  $\gamma$  — произвольный путь из точки  $x$  в точку  $x_0$ . Надо показать, что параллельные переносы вдоль  $\gamma$  и  $\gamma_0\alpha = \beta$  отличаются на преобразование  $A$  из группы голономии  $H_{x_0}M^m$ , где  $\alpha$  — путь, лежащий на подмногообразии  $N^n$  и идущий из точки  $x$  в точку  $y_0$ . Если  $\tau_\varepsilon$  — параллельный перенос вдоль некоторого пути  $\varepsilon$ , то имеем очевидное равенство  $\tau_{\gamma\beta^{-1}}\tau_\beta = \tau_\gamma$ . Преобразование  $\tau_{\gamma\beta^{-1}}$  принадлежит группе голономии  $H_{x_0}(M^m)$ , и в качестве  $A$  можно взять  $\tau_{\gamma\beta^{-1}}$ .

Итак,  $\tau_\gamma(T_x N^n) = A\tau_\beta(T_x N^n)$ , а это равенство означает, что  $\pi\tilde{f}(x) = f(x)$ , т. е.  $\pi\tilde{f} = f$ , что и утверждалось.

Рассмотрим отображения  $\tilde{f}^*$ ,  $\pi$ ,  $\tilde{f}$  в когомологиях. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(N^n) & \xleftarrow{\tilde{f}^*} & H^*(G_n(T_{x_0}M^m)/H') \\
 & \nwarrow f^* & \uparrow \pi^* \\
 & & H^*(G_n(T_{x_0}M^m)/H),
 \end{array}$$

т. е.  $f^* = \pi^* \tilde{f}^*$ . Однако  $\tilde{f}^* = 0$ , так как  $\tilde{f} = \text{const}$ , следовательно,  $f^* = \pi^* \tilde{f}^* = \pi^* 0 = 0$ . Отсюда вытекает равенство  $a(N^n) = f^*(a) = 0$ , что и требовалось доказать.  $\square$

**Замечания.**

1. Теорема 2.2.2 показывает, что построенные классы являются аффинными инвариантами.
2. В теореме 2.2.4 характеристические классы равны нулю по отношению к произвольной экстраординарной теории когомологий.
3. Для данной геометрической структуры на многообразии можно выбрать связность, с ней согласованную (если она существует, см., например, [221]), и получить классы, связанные с данной геометрической структурой. Таким образом можно получить обобщённые классы Маслова в симплектической геометрии или характеристические классы в псевдоримановой геометрии (см. ниже).
4. В настоящее время имеется список групп голономии как для риманова случая, так и для случая аффинных связностей (см. [221]).

### 2.3. Индексы подмногообразий в многообразиях с аффинной связностью

Для того чтобы сравнивать относительные характеристические классы различных подмногообразий данного многообразия, надо ввести соответствующие числа. Пусть  $M^m$  — многообразие с аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i$ . Будем рассматривать ориентированные подмногообразия  $N^n$  в  $M^m$  (подмногообразие  $N^n$  может иметь край  $\partial N^n$ , тогда  $\partial N^n$  рассматривается с индуцированной ориентацией). В этом случае существует фундаментальный гомологический класс  $[N^n] \in H_n(N^n; \mathbb{R})$ . Поэтому для любого коhomологического класса  $v \in H_n(N^n; \mathbb{R})$  определён индекс Кронекера  $v[N^n] = \langle v, [N^n] \rangle \in \mathbb{R}$ .

**Определение 2.3.1.** Пусть  $a \in H^n(HG_n(T_{x_0}M^m))$  — произвольный  $n$ -мерный класс коhomологий приведённого грассманиана для многообразия  $M^m$  с аффинной связностью. Если  $N^n$  — ориентированное компактное подмногообразие в  $M^m$ , то индекс Кронекера  $\langle a(N^n), [N^n] \rangle = a[N^n]$  будем называть индексом подмногообразия  $N^n \subset M^m$ , причём  $a[N^n]$  отвечает классу коhomологий  $a$ .

Напомним, что числа Штифеля—Уитни являются инвариантами классов кобордизма. Для индексов, введённых выше, также имеется отношение эквивалентности, относительно которого они инвариантны. Это отношение эквивалентности известно как кобордизмы с векторными полями.

**Определение 2.3.2.** Два замкнутых ориентированных многообразия  $N_1^n$  и  $N_2^n$  называются  $\text{vf}$ -кобордантными (кобордизм с векторными полями), если существуют компактное ориентированное многообразие  $W^{n+1}$ , такое что  $\partial W^{n+1} = N_1^n \cup N_2^n$ , и невырожденное касательное векторное поле  $v$  на  $W^{n+1}$ , которое определяется внутренними нормальными в точках многообразия  $N_1^n$  и внешними нормальными в точках  $N_2^n$ .

Имеется полное описание  $\text{vf}$ -кобордизмов (см. [220]). Два  $n$ -мерных многообразия  $\text{vf}$ -кобордантны тогда и только тогда, когда у них совпадают числа Штифеля—Уитни и числа Понтрягина. Кроме того,

- а) если  $n \neq 4k + 1$ , то совпадают эйлеровы характеристики;
- б) если  $n = 4k + 1$ , то многообразие  $W^{n+1}$ ,  $\partial W^{n+1} = N_1^n \cup (-N_2^n)$ , имеет чётную эйлерову характеристику.

**Теорема 2.3.3.** Пусть подмногообразие  $N^n$  в многообразии  $M^m$  с аффинной связностью  $\text{vf}$ -кобордантно нулю, т. е.  $N^n = \partial W^{n+1}$ , причём  $W^{n+1}$  — подмногообразие в  $M^m$ . Тогда все индексы подмногообразия  $N^n$  равны нулю.

**Доказательство.** Определим отображение

$$h: W^{n+1} \rightarrow G_n(T_{x_0} M^m)/H,$$

где  $\partial W^{n+1} = N^n$ . На плёнке многообразия  $W^{n+1}$  имеется такое векторное поле  $v(x)$ , что  $v(x) \neq 0$ ,  $x \in W^{n+1}$ . Выберем на  $M^m$  некоторую риманову метрику  $g_{ij}$  и положим, что  $h(x)$  — параллельный перенос подпространства  $v(x)^\perp$  вдоль некоторой кривой  $\gamma$  в выделенную точку  $x_0$ . Здесь ортогональное дополнение  $v(x)^\perp$  берётся в пространстве  $T_x W^{n+1}$  относительно метрики  $g_{ij}$ . В итоге получим корректно определённое отображение  $h$ . Имеем гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} N^n & \xrightarrow{f} & HG_n(T_{x_0} M^m) \\ & \searrow i & \nearrow h \\ & W^{n+1} & \end{array}$$

т. е.  $h \circ i \sim f$ , где  $f$  — касательное представление подмногообразия  $N^n$ .

Это утверждение вытекает из того, что имеется изоморфизм векторных расслоений  $TW^{n+1}|_{N^n} \cong TN^n \oplus \varepsilon^1$ , где  $\varepsilon^1$  — тривиальное одномерное расслоение. В когомологиях имеем равенство  $f^* = i^* \circ h^*$ .

Пусть  $W^{n+1}$  — гладкое компактное  $(n+1)$ -мерное ориентированное подмногообразие в  $M^m$ , границей которого является многообразие  $N^n = \partial W^{n+1}$ . Обозначим фундаментальный гомологический класс пары  $(W^{n+1}, N^n)$  через  $[W^{n+1}] \in H_{n+1}(W^{n+1}, N^n; \mathbb{R})$ . Тогда естественный граничный гомоморфизм

$$\partial: H_{n+1}(W^{n+1}, N^n; \mathbb{R}) \rightarrow H_n(N^n; \mathbb{R})$$

переводит  $[W^{n+1}]$  в  $[N^n]$ , т. е.  $\partial[W^{n+1}] = [N^n]$ . Напомним, что кограничный гомоморфизм

$$\delta: H^n(N^n) \rightarrow H^{n+1}(W^{n+1}, N^n)$$

связан с граничным гомоморфизмом  $\partial$  равенством

$$\langle v, \partial a \rangle = \pm \langle \partial v, a \rangle,$$

где  $v \in H^n(N^n; \mathbb{R})$  и  $a \in H_{n+1}(W^{n+1}, N^n; \mathbb{R})$ .

Отсюда для любого класса когомологий  $a \in H^*(HG_n(T_{x_0}M^m))$  имеем равенства

$$\begin{aligned} a[N^n] &= \langle a(N^n), [N^n] \rangle = \langle f^*(a), [N^n] \rangle = \langle i^*h^*(a), [N^n] \rangle = \\ &= \langle i^*h^*(a), \partial[W^{n+1}] \rangle = \pm \langle \delta i^*h^*(a), [W^{n+1}] \rangle = \pm \langle 0 \cdot h^*(a), [W^{n+1}] \rangle = 0, \end{aligned}$$

так как  $\delta i^* = 0$  в силу точности когомологической последовательности пары  $(W^{n+1}, N^n)$ :

$$H^n(N^n) \xrightarrow{i^*} H^n(W^{n+1}) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(W^{n+1}, N^n).$$

Таким образом, требуемое утверждение доказано.  $\square$

## 2.4. Обобщённый индекс Маслова лагранжева подмногообразия в симплектическом многообразии

### 2.4.1. Обобщённые классы Маслова лагранжевых подмногообразий в симплектических многообразиях

Покажем, как можно спроектировать обобщённые классы Маслова, определённые на пространстве путей, в некоторые классы когомологий лагранжева подмногообразия. Для этого надо использовать симплектические связности и их группы голономии.

На симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  рассмотрим симплектическую связность  $\Gamma_{jk}^i$ . Через  $C(x_0)$  обозначим множество кусочно-гладких путей, начинающихся и кончающихся в точке  $x_0 \in M^{2n}$ . Операция параллельного переноса вдоль путей  $\gamma \in C(x_0)$  порождает группу  $H_{x_0}(M^{2n})$  линейных преобразований пространства  $T_{x_0}M^{2n}$ . Эта группа является группой голономии связности  $\Gamma_{jk}^i$ .

Поскольку связность  $\Gamma_{jk}^i$  симплектическая, то группа  $H_{x_0}(M^{2n})$  переводит лагранжевы подпространства в пространстве  $T_{x_0}M^{2n}$  в лагранжевы подпространства, т. е. имеем действие группы голономии  $H = H_{x_0}(M^{2n})$  на лагранжевом грассманиане  $\Lambda(T_{x_0}M^{2n})$  и можно определить приведённый лагранжев грассманиан  $H\Lambda(T_{x_0}M^{2n}) = \Lambda(T_{x_0}M^{2n})/H$ .

Предположим теперь, что  $N^n \subset M^{2n}$  — лагранжево подмногообразие симплектического многообразия  $M^{2n}$ . Тогда конструкция раздела 2.2 позволяет корректно определить отображение

$$f: N^n \rightarrow H\Lambda(T_{x_0}M^{2n}),$$

которое индуцирует отображение  $f^*$  в когомологиях:

$$f^*: H^*(H\Lambda(T_{x_0}M^{2n})) \rightarrow H^*(N^n).$$

**Теорема 2.4.1.** Пусть  $M^{2n}$  — симплектическое многообразие и  $a \in H^*(H\Lambda(T_{x_0}M^{2n}))$  — произвольный класс когомологий приведённого лагранжева грассманиана относительно некоторой симплектической связности на  $M^{2n}$ . Тогда определён естественный характеристический класс

$$a(N^n) = f^*(a) \in H^*(N^n)$$

лагранжева подмногообразия  $N^n \subset M^{2n}$ .

**Доказательство** этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2.2.  $\square$

**Определение 2.4.2.** Класс когомологий вида

$$a(N^n) = f^*(a) \in H^*(N^n),$$

где  $a \in H^*(H\Lambda(T_{x_0}M^{2n}))$ , будем называть обобщённым классом Маслова лагранжева подмногообразия  $N^n \subset M^{2n}$  в симплектическом многообразии  $M^{2n}$  относительно симплектической связности  $\Gamma_{jk}^i$ .

#### 2.4.2. Обобщённый индекс Маслова лагранжева подмногообразия в симплектическом многообразии

Пусть  $N^n$  — компактное лагранжево подмногообразие симплектического многообразия  $M^{2n}$ . Обозначим через  $[N^n]$  фундаментальный гомологический класс  $[N^n] \in H_n(N^n; \mathbb{R})$ , а через  $H\Lambda(T_{x_0}M^{2n})$  — приведённый лагранжев грассманиан относительно некоторой симплектической связности на  $M^{2n}$ . Если  $a \in H^*(H\Lambda(T_{x_0}M^{2n}))$  — произвольный  $n$ -мерный класс когомологий приведённого лагранжева грассманиана, то определён обобщённый класс Маслова  $a(N^n) \in H^n(N^n; \mathbb{R})$  для лагранжева подмногообразия  $N^n \subset M^{2n}$ .

**Определение 2.4.3.** Индекс Кронекера  $a[N^n] \in H^n\langle a(N^n), [N^n] \rangle$  назовём обобщённым индексом Маслова (отвечающим классу когомологий  $a$ ) лагранжева подмногообразия  $N^n \in M^{2n}$ .

**Определение 2.4.4.** Два лагранжевых подмногообразия  $N_1^n$  и  $N_2^n$  в симплектическом многообразии  $M^{2n}$  назовём  $L$ -кобордантными, если существует подмногообразие  $W^{n+1} \subset M^{2n}$ ,  $\partial W^{n+1} = N_1^n \cup N_2^n$  и на  $W^{n+1}$  существует такая гладкая функция  $P$ , что  $N_1^n = \{P = 0\}$ ,  $N_2^n = \{P = 1\}$  и  $\{x \in M^{2n} \mid P(x) = \text{const}\}$  — лагранжево подмногообразие в  $M^{2n}$ .

**Теорема 2.4.5.** Пусть лагранжево подмногообразие  $N^n$  в симплектическом многообразии  $M^{2n}$   $L$ -кобордантно нулю. Тогда все индексы Маслова  $a[N^n]$  равны нулю для любого класса когомологий  $a$  приведённого лагранжева грассманиана  $H\Lambda(T_{x_0}M^{2n})$ .

**Доказательство.** Имеем подмногообразие  $W^{n+1} \subset M^{2n}$ ,  $\partial W^{n+1} = N^n$ . Определим отображение

$$h: W^{n+1} \rightarrow H\Lambda(T_{x_0}M^{2n})$$

равенством

$$h(x) = \tau_\gamma(T_x\{P = \text{const}\}),$$

где  $\tau_\gamma$  — параллельный перенос и  $\{P = \text{const}\} = \{y \in W^{n+1} \mid P(y) = P(x)\}$ . Пространство  $\tau_\gamma(T_x\{P = \text{const}\})$  является лагранжевым, так как  $\{P = \text{const}\}$  — лагранжево подмногообразие и связность — симплектическая.

Далее, подпространство  $\tau_\gamma(T_x\{P = \text{const}\})$  определено с точностью до преобразований из группы голономии данной симплектической связности. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} N^n & \xrightarrow{f} & H\Lambda(T_{x_0}M^{2n}) \\ & \searrow i & \nearrow h \\ & W^{n+1}, & \end{array}$$

так как  $N^n = \{y \in W^{n+1} \mid P(y) = 0\}$ . Здесь  $f$  — касательное представление подмногообразия  $N^n \subset M^{2n}$ ,  $i$  — отображение вложения.

В когомологиях имеем соответствующую коммутативную диаграмму, и поэтому  $f^* = i^*h^*$ . Далее доказательство повторяет доказательство теоремы 2.3.3.  $\square$

Для замкнутой кривой  $\gamma$  на лагранжевом подмногообразии  $N^n \subset M^{2n}$  можно определить её индекс как соответствующий индекс Кронекера  $\langle [\gamma], g \rangle$ , где  $[\gamma]$  — гомотопический класс, определяемый кривой  $\gamma$ , а  $g$  — когомологический класс из  $H^*(N^n; \mathbb{R})$ , определяемый одномерным классом  $g \in H^1(H\Lambda(T_{x_0}M^{2n}))$ .

Предположим, что на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  имеется глобальная каноническая система координат  $(x^1, \dots, x^n, p^1, \dots, p^n)$ , т. е.  $M^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$ , и в этих координатах для формы  $\omega$  имеем выражение  $\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dp^i$ .

Тогда на  $M^{2n}$  можно определить плоскую симплектическую связность  $\Gamma_{jk}^i$  с группой голономии  $H = \{e\}$ .

Для того чтобы это сделать, достаточно положить  $\Gamma_{jk}^i = 0$  в канонических координатах  $(x, p)$  на многообразии  $M^{2n}$ . Поэтому если имеется лагранжево подмногообразие  $N^n \subset M^{2n}$  с параметрическим представлением

$$x^j = x^j(u^1, \dots, u^n), \quad p^j = p^j(u^1, \dots, u^n), \quad j = 1, \dots, n,$$

то индекс кривой  $\gamma(t) = (x^i = x^i(t), p^j = p^j(t))$  можно вычислить, используя классическую формулу

$$g(\gamma) = \frac{2}{\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma d \ln \left\{ \det \left( \frac{\partial(x + \sqrt{-1}p)}{\partial u} \right) \left| \det \left( \frac{\partial(x + \sqrt{-1}p)}{\partial u} \right) \right|^{-1} \right\}.$$

Здесь  $g \in H^1(H\Lambda(T_{x_0}M^{2n}))$  — образующий одномерной группы когомологий. Эта ситуация возникает, например, на орбитах коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  разрешимой группы Ли верхнетреугольных матриц.

## 2.5. Индексы торов Лиувилля

Пусть  $\Phi = (f_1, \dots, f_n)$  — полное инволютивное семейство функций на симплектическом многообразии  $M^{2n}$ . Применяя конструкцию предыдущих разделов к лагранжеву подмногообразию

$$N_c = \{x \in M^{2n} \mid f_1(x) = c_1, \dots, f_n(x) = c_n\}, \quad c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n,$$

мы построим характеристические классы  $a(N_c) = a_c$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ .

Напомним определение полного инволютивного семейства функций на симплектическом многообразии  $M^{2n}$ :

- а) функции  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , попарно находятся в инволюции:  $\{f_i, f_j\} \equiv 0$  относительно скобки Пуассона, индуцированной данной симплектической структурой;
- б) функции  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , функционально независимы на  $M^{2n}$ ;
- в)  $n = \frac{1}{2} \dim M^{2n}$ .

Роль таких наборов в геометрии и различных её приложениях чрезвычайно велика (см., например, [19, 119, 155–159, 207]).

Пусть  $a \in H^*(H\Lambda(T_{x_0}M^{2n}))$  — произвольный класс когомологий приведённого лагранжева грассманиана  $H\Lambda(T_{x_0}M^{2n})$  относительно некоторой симплектической связности на  $M^{2n}$ . Тогда определены индексы  $a_c[T^n] = \langle a(T^n), [T^n] \rangle$ , где  $T^n$  — связная компонента многообразия  $N_c$  (если  $T^n$  компактно, то по теореме Лиувилля  $T^n$  —  $n$ -мерный тор, см. [19, 159, 207]).

Обозначим через

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

отображение моментов  $F: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Точка  $x \in M^{2n}$  называется регулярной, если  $\text{rk } dF(x) = n$ , и сингулярной в противном случае. Пусть  $\mathcal{K}$  — множество всех сингулярных точек. Множество критических значений  $\Sigma = F(\mathcal{K})$  называется бифуркационной диаграммой [159].

**Теорема 2.5.1.** Пусть  $M^{2n}$  — симплектическое многообразие. Предположим, что гамильтонова система  $\dot{x} = \text{sgrad } h$  на многообразии  $M^{2n}$  вполне интегрируема и  $h = f_1, f_2, \dots, f_n$  — полный инволютивный набор первых интегралов этой системы. Пусть также  $R$  — некоторая связная компонента дополнения  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$  к бифуркационной диаграмме  $\Sigma$  для отображения моментов  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Если  $a, b \in R$ , то индексы торов Лиувилля  $F^{-1}(a)$  равны индексам торов Лиувилля  $F^{-1}(b)$ .

**Доказательство.** Если  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ , то компактный слой  $B_b = F^{-1}(b)$  состоит из торов Лиувилля. Предположим, что имеется кривая  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , в  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ , такая что  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(1) = b$ . Полный прообраз  $W^{n+1} = F^{-1}(\gamma) \subset M^{2n}$  является подмногообразием размерности  $n+1$ . Граница  $\partial W^{n+1}$  совпадает

с  $F^{-1}(a) \cup F^{-1}(b)$ . Многообразие  $F^{-1}(a) \cup F^{-1}(b)$  L-кобордантно нулю. Для этого достаточно построить на кобордизме  $W^{n+1}$  такую функцию  $k$ , что  $k^{-1}(c)$  — лагранжево подмногообразие для любого  $c \in \mathbb{R}$ . Возьмём кривую  $\beta(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\beta(0) = a$ ,  $\beta(1) = b$ , которая однозначно проектируется на некоторую координатную ось пространства  $\mathbb{R}^n$ . Пусть (без ограничения общности) это проекция на ось  $x_i$ . Положим тогда  $k(x) = f_i(x)$ . Из определения следует, что  $f_i^{-1}(c) = F^{-1}(c)$  — лагранжево подмногообразие.  $\square$

## 2.6. Характеристические классы и индексы на торах Лиувилля

### 2.6.1. Плоская симплектическая связность, ассоциированная с вполне интегрируемой гамильтоновой системой

Для любой вполне интегрируемой гамильтоновой системы имеется единственная симплектическая связность, которую можно использовать для построения характеристических классов.

**Теорема 2.6.1.** Пусть  $M^{2n}$  — симплектическое многообразие и  $\dot{x} = \text{sgrad } H$  — вполне интегрируемая гамильтонова система на  $M^{2n}$ . Предположим, что  $H = f_1, f_2, \dots, f_n$  — полный инволютивный набор первых интегралов на  $M^{2n}$  этой системы. Положим, что  $N^n = \{x \in M^{2n} \mid f_1(x) = c_1, \dots, f_n(x) = c_n\}$  — неособая совместная поверхность уровня функций  $f_1, \dots, f_n$ . Тогда существует единственная связность  $\Gamma_{jk}^i$  на  $N^n$  без кручения, относительно которой все векторные поля  $\text{sgrad } f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , параллельны. Тензор кривизны такой связности тождественно равен нулю.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующий элементарный результат.

**Лемма 2.6.2.** Пусть  $Q^n$  — параллелизуемое многообразие и  $v_1, \dots, v_n$  — такие векторные поля на  $Q^n$ , что  $v_1(x), \dots, v_n(x)$  — базис каждого касательного пространства  $T_x Q^n$ ,  $x \in Q^n$ . Тогда имеется единственная аффинная связность  $\Gamma_{jk}^i$ , относительно которой все векторные поля  $v_i$  параллельны. Тензор кривизны этой связности тождественно равен нулю. Тензор кручения  $T$  задаётся равенством  $T(v_i, v_j) = -[v_i, v_j]$ .

**Доказательство.** Предположим, что такая связность  $\Gamma_{jk}^i$  существует. Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — локальная система координат на многообразии  $Q^n$  и  $v_j^1, \dots, v_j^n$  — соответствующие координаты векторных полей  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тогда в силу определения ковариантной производной мы имеем равенства

$$\frac{\partial v_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{pk}^i v_j^p = 0.$$

Поэтому имеется система линейных уравнений

$$\begin{aligned}\Gamma_{1k}^i v_1^1 + \dots + \Gamma_{nk}^i v_1^n &= -\frac{\partial v_1^i}{\partial x^k}, \\ &\dots \\ \Gamma_{1k}^i v_n^1 + \dots + \Gamma_{nk}^i v_n^n &= -\frac{\partial v_n^i}{\partial x^k}\end{aligned}$$

относительно  $\Gamma_{jk}^i$ ,  $j = 1, \dots, n$ , причём индексы  $i, k$  фиксированы. Эта система имеет единственное решение, так как векторы  $v_1(x), \dots, v_n(x)$  образуют базис пространства  $T_x Q^n$ , следовательно,

$$\det \begin{pmatrix} v_1^1(x) & \dots & v_1^n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_n^1(x) & \dots & v_n^n(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

для любой точки  $x \in Q^n$ .

Докажем теперь существование такой связности  $\Gamma_{jk}^i$ . Если  $Y = \sum_{i=1}^n f^i v_i$ , то определим ковариантную производную  $\nabla_X Y$  формулой

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n (X f^i) v_i.$$

Очевидно, что  $\nabla$  — связность и  $\nabla_k v_i = 0$ .

Используя определения тензоров кривизны и кручения

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \\ T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],\end{aligned}$$

мы получаем равенства  $R = 0$  и  $T(v_i, v_j) = -[v_i, v_j]$ .  $\square$

**Доказательство теоремы 2.6.1.** Пусть  $T^n$  — несингулярная совместная поверхность уровня функций  $f_1, \dots, f_n$ . Тогда  $T^n$  — гладкое подмногообразие, инвариантное относительно всех гамильтоновых потоков  $\text{sgrad } f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Если  $T^n$  связно и компактно, то  $T^n$  — тор в силу теоремы Лиувилля. По лемме 2.6.2 на  $T^n$  существует единственная связность, относительно которой все векторные поля  $v_i = \text{sgrad } f_i$  параллельны. Эта связность без кручения.

Действительно, имеют место равенства

$$T(v_i, v_j) = -[v_i, v_j] = -[\text{sgrad } f_i, \text{sgrad } f_j] = -\text{sgrad}\{f_i, f_j\} = 0,$$

так как  $\{f_i, f_j\} = 0$ , что полностью доказывает теорему.  $\square$

**Предложение 2.6.3.** Предположим, что  $(M^{2n}, \omega)$  — симплектическое многообразие и система  $\dot{x} = \text{sgrad } H$  на  $M^{2n}$  вполне интегрируема. Пусть  $H = f_1, f_2, \dots, f_n$  — полный инволютивный набор первых интегралов этой системы, а  $N_{C_0}^n$  — фиксированная несингулярная совместная поверхность уровня этих функций. Тогда на некоторой открытой окрестности  $U \supset N_{C_0}^n$  поверхности  $N_{C_0}^n$  существует плоская симплектическая связность  $\Gamma_{jk}^i$ , такая что все поверхности

уровня  $N_c^n \subset U$  — вполне геодезические подмногообразия относительно этой связности, и индуцированная связность на  $N_c^n$  совпадает со связностью, построенной в теореме 2.6.1.

**Доказательство.** Существует такая локальная система координат  $I_1, \dots, I_n, \theta_1, \dots, \theta_n$  в окрестности  $U \supset N_c^n$ , что форма  $\omega$  на  $U$  имеет вид

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dI_i \wedge d\theta_i$$

и

$$N_c^n = \{x \in M^{2n} \mid I_1(x) = \text{const}, \dots, I_n(x) = \text{const}\}.$$

Это так называемые координаты «действие—угол» (см. [19]).

Пусть  $\Gamma_{jk}^i = 0$  в этих координатах на  $U$ . Очевидно, что  $\Gamma_{jk}^i$  — симплектическая плоская связность. Далее,  $N_c^n$  — вполне геодезическое подмногообразие, так как компоненты  $\Gamma_{II}^\theta$  обращаются в нуль (см. [143]). Тогда можно ограничить связность  $\Gamma_{jk}^i$  на подмногообразии  $N_c^n$ . Векторные поля  $\text{sgrad } f_i$  параллельны относительно этого ограничения, и поскольку связность в теореме 2.6.1 определена однозначно, то  $\Gamma_{jk}^i|_U$  совпадает со связностью, построенной в этой теореме.  $\square$

### 2.6.2. Продолжение плоских связностей на касательное расслоение

Из вышесказанного следует, что при построении характеристических классов важную роль играют плоские симплектические связности. Большой запас примеров можно получить, продолжая такие структуры на касательное расслоение. Укажем один из таких приёмов.

Произвольное многообразие  $M^n$  будем считать вложенным в касательное расслоение  $TM^n$  с помощью нулевого сечения  $s_0: M^n \rightarrow TM^n$ .

**Теорема 2.6.4.** Пусть  $(M^n, g)$  — плоское псевдориманово многообразие. Тогда на касательном расслоении  $TM^n$  существует такая плоская псевдориманова структура  $\tilde{g}$  индекса ноль, что индуцированная метрика на многообразии  $M^n$ , вложенном в  $TM^n$  с помощью  $s_0$ , совпадает с исходной метрикой и подмногообразие  $M^n$  является вполне геодезическим.

**Доказательство.** Поскольку  $M^n$  — плоское псевдориманово многообразие, то в силу теоремы Римана на  $M^n$  существует такой атлас  $u_\alpha; x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, \alpha \in I$ , с локальными координатами  $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n$ , что метрика  $g$  имеет канонический вид

$$g = \sum_{i=1}^p (dx_\alpha^i)^2 - \sum_{p+1=1}^n (dx_\alpha^i)^2$$

(см., например, [47]).

В расслоении  $\hat{u}_\alpha = Tu_\alpha$  введём стандартные координаты  $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n, \xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n$ , где  $\xi_\alpha^i$  — координаты вектора  $\xi \in T_x u_\alpha$  в локальной системе координат  $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ . Переход от одной такой системы координат к другой задаётся

формулами

$$x_\alpha^i = x_\alpha^i(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n), \quad \xi_\alpha^i = \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \xi_\beta^j,$$

причём выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^s} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^k} = \pm \delta_{sk}.$$

Определим на  $TM^n$  метрику  $\tilde{g}$  равенством

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^n e_i [(dx_\alpha^i)^2 + dx_\alpha^i d\xi_\alpha^i],$$

где  $e_i = \dots = e_p = 1$  и  $e_{p+1} = \dots = e_n = -1$ . Надо проверить корректность этого определения, т. е. его инвариантность относительно вышеуказанных замен координат.

Дифференцируя закон преобразования координат вектора, мы получим равенство

$$d\xi_\alpha^i = \frac{\partial^2 x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j \partial x_\beta^k} \xi_\beta^j dx_\beta^k + \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} d\xi_\beta^j.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \sum_{i=1}^n e_i (dx_\alpha^i)^2 + \sum_{i=1}^n e_i dx_\alpha^i d\xi_\alpha^i = \\ &= \sum_{i=1}^n e_i (dx_\beta^i)^2 + \sum_{i=1}^n e_i \left[ \frac{\partial^2 x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j \partial x_\beta^k} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^s} \xi_\beta^j dx_\beta^k dx_\beta^s + \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^s} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} dx_\beta^s d\xi_\beta^j \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^n e_i (dx_\beta^i)^2 + \sum_{s=1}^n e_s dx_\beta^s d\xi_\beta^s + \sum_{i=1}^n e_i F_{ks}^i dx_\beta^k dx_\beta^s, \end{aligned}$$

где

$$F_{ks}^i = \frac{\partial^2 x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j \partial x_\beta^k} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^s} \xi_\beta^j.$$

Докажем, что

$$F_{ks}^i = -F_{sk}^i.$$

Дифференцируя условие псевдоортогональности замен координат по переменной  $x_\beta^j$ , мы получим равенство

$$\frac{\partial^2 x_\alpha^i}{\partial x_\alpha^j \partial x_\beta^s} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^k} + \frac{\partial^2 x_\alpha^i}{\partial x_\alpha^j \partial x_\beta^k} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^s} = 0,$$

после свёртки которого с  $\xi_\beta^j$  получим требуемое соотношение  $F_{ks}^i + F_{sk}^i = 0$ . Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n e_i \sum_{k,s=1}^n F_{ks}^i dx_\beta^k dx_\beta^s = 0.$$

Утверждение, касающееся сигнатуры построенной метрики, вытекает из соотношения

$$\begin{aligned} x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2 + x_1 y_1 + \dots + x_s y_s - x_{s+1} y_{s+1} - \dots - x_n y_n = \\ = \left(x_1 + \frac{1}{2} y_1\right)^2 + \dots + \left(x_s + \frac{1}{2} y_s\right)^2 - \left(x_{s+1} + \frac{1}{2} y_{s+1}\right)^2 - \dots - \left(x_n + \frac{1}{2} y_n\right)^2 - \\ - \frac{1}{4} y_1^2 - \dots - \frac{1}{4} y_s^2 + \frac{1}{4} y_{s+1}^2 + \dots + \frac{1}{4} y_n^2. \end{aligned}$$

Итак, если исходная метрика  $g$  имела сигнатуру  $(s, n-s)$ , то построенная метрика  $\tilde{g}$  на  $TM^n$  имеет сигнатуру  $(s + (n-s), (n-s) + s) = (n, n)$ , т. е. её индекс равен нулю.

Поскольку имеется система координат, в которой все коэффициенты  $\tilde{g}_{ij}$  метрики  $\tilde{g}$  постоянны, то  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , следовательно, для тензора кривизны имеем равенство  $R_{j,pq}^i \equiv 0$ , т. е.  $(TM^n, \tilde{g})$  — плоское многообразие.

Образ нулевого сечения  $s_0$  задаётся уравнениями  $\xi^i = 0$ . Тогда из [143] вытекает, что  $s_0(M^n)$  — вполне геодезическое подмногообразие. Очевидно, что ограничение метрики  $g$  на  $s_0(M^n)$  совпадает с исходной метрикой. Теорема доказана.  $\square$

Напомним, что на кокасательном расслоении  $T^*M^n$  к гладкому многообразию  $M^n$  имеется каноническая симплектическая структура  $\omega$  (см. [127, 128]). Если  $(M^n, g)$  — псевдориманово многообразие, то операция опускания индексов задаёт диффеоморфизм

$$f: TM^n \rightarrow T^*M^n,$$

поэтому на  $TM^n$  имеется симплектическая структура  $\omega^g = f^*\omega$ .

**Предложение 2.6.5.** Пусть  $(M^n, g)$  — плоское псевдориманово многообразие. Тогда связность  $\Gamma_{jk}^i$ , согласованная с метрикой  $\tilde{g}$  на  $TM^n$ , является симплектической относительно  $\omega^g$ .

**Доказательство.** Связность, согласованная с метрикой  $\tilde{g}$ , в выбранных выше координатах имеет вид  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ . Связность является симплектической, если симплектическая форма  $\omega^g$  ковариантно постоянна относительно этой связности, т. е.  $\nabla_k \omega_{ij}^g = 0$ . В нашем случае это равенство справедливо, так как  $\Gamma_{ij}^s = 0$  и координаты  $\omega_{ij}^g$  формы  $\omega^g$  постоянны в выбранной выше системе координат.  $\square$

Для псевдориманова многообразия  $(M^n, g)$  обозначим через  $\text{Hol}_x(M^n)$  группу голономии,  $x \in M^n$  (см. [221]).

**Предложение 2.6.6.** Пусть  $(M^n, g)$  — плоское псевдориманово многообразие. Тогда группа голономии  $\text{Hol}_x(TM^n)$  многообразия  $(TM^n, \tilde{g})$  изоморфна группе голономии  $\text{Hol}_x(M^n)$ ,  $x \in M^n$ .

**Доказательство.** Легко проверить, что параллельный перенос вдоль произвольной петли  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $x = \gamma(0) = \gamma(1) \in M^n = s_0(M^n)$ , совпадает

с параллельным переносом вдоль такой петли  $\beta(t) = \beta_1(t) \cdot \dots \cdot \beta_N(t)$ , что  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , лежат в некотором  $\hat{u}_\alpha$  и  $\beta_i(0), \beta_i(1) \in s_0(M^n)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Действительно, покроем проекцию  $\pi(\gamma(t))$  пути  $\gamma(t)$  конечным числом односвязных координатных областей  $u_1, \dots, u_N$  и рассмотрим те части  $\gamma_i(t)$  пути  $\gamma_i$ , которые лежат в прообразах  $\hat{u}_\alpha = \pi^{-1}(u_\alpha)$ , где  $\pi: TM^n \rightarrow M^n$  — естественная проекция. Выберем такие числа  $t_1, \dots, t_N$ , что  $\gamma_i(t) \in \hat{u}_i \cap \hat{u}_{i+1}$ .

Пусть  $p_s = \pi(\gamma(t_s))$ ,  $s = 1, \dots, N$ . Над точкой  $p_s$  лежит полный прообраз  $\pi^{-1}(p_s) = T_{p_s}M^n$ , содержащий точку  $\gamma(t_s)$ . Отрезок прямой в  $T_{p_s}M^n$ , идущей из точки  $\gamma(t_s)$  в точку  $s_0(p_s)$ , обозначим через  $\alpha_s$ . Поскольку для параллельного переноса  $\tau$  выполняется равенство  $\tau_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \tau_{\varepsilon_1} \tau_{\varepsilon_2}$ , то параллельный перенос вдоль кривой

$$\beta = (\gamma_1 \alpha_1)(\alpha_1^{-1} \gamma_2 \alpha_2)(\alpha_2^{-1} \gamma_3 \alpha_3) \cdot \dots \cdot (\alpha_N^{-1} \gamma_N)$$

совпадает с параллельным переносом вдоль кривой  $\gamma$ .

Положим

$$\beta_1 = \gamma_1 \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1^{-1} \gamma_2 \alpha_2, \dots, \beta_N = \alpha_N^{-1} \gamma_N.$$

Поскольку  $s_0(M^n)$  — вполне геодезическое подмногообразие, а многообразие  $TM^n$  плоское, то параллельный перенос вдоль пути  $\beta_i(t)$  можно получить как параллельный перенос вдоль такого пути  $\tilde{\beta}_i(t)$ , что  $\tilde{\beta}_i$  лежит в  $s_0(M^n)$  и  $\tilde{\beta}_i(0) = \beta_i(0)$ ,  $\tilde{\beta}_i(1) = \beta_i(1)$ .

Действительно, поскольку  $u_\alpha$  односвязно, то путь  $\beta_i$  гомотопен пути  $\tilde{\beta}_i$ , лежащему в  $u_\alpha$ . В силу того что  $Tu_\alpha$  — плоское многообразие, параллельный перенос вдоль пути  $\beta_i$  совпадает с параллельным переносом вдоль пути  $\tilde{\beta}_i$ . Подмногообразие  $M^n$  является вполне геодезическим, следовательно, параллельный перенос в объемлющем многообразии  $TM^n$  совпадает с параллельным переносом в  $M^n$ , что и утверждалось. Предложение доказано.  $\square$

## 2.7. Обобщённые классы Маслова в симплектических векторных расслоениях

### 2.7.1. Обобщённые классы Маслова на пространстве путей в случае расслоений

Конструкции раздела 2.1 можно повторить для произвольных расслоений и построить для них аналоги классов Маслова.

Пусть  $\pi: E \rightarrow M$  — векторное расслоение, в котором задана связность  $\Gamma_{jk}^i$  (см. [143]). Предположим, что  $p: V \rightarrow N$  — локально тривиальное подрасслоение в  $E$ , где  $X \subset E$ ,  $p = \pi|_X$ , и  $N$  — подмногообразие в  $M$ .

Выберем и зафиксируем точку  $x_0 \in M$ . Определим пространство

$$\begin{aligned} X \otimes [M, N] = \\ = \{(x, \alpha) \mid x \in X, \alpha \in [M, N], \alpha: [0, 1] \rightarrow M, \alpha(1) = p(x) \in N, \alpha(0) = x_0\}. \end{aligned}$$

Построим отображение

$$f: X \otimes [M, N] \rightarrow G_m(\pi^{-1}(x_0))$$

в грассманиан  $G_m(\pi^{-1}(x_0))$ , порождённый слоем  $\pi^{-1}(x_0)$  расслоения  $\pi$ , где  $m$  — размерность расслоения  $p$  ( $m = \dim p^{-1}(x)$ ). Если  $(x, \alpha) \in X \otimes [M, N]$ , где  $x \in X$  и  $\alpha \in [M, N]$ , то касательное пространство  $T_x X = T_x p^{-1}(\alpha(1)) \subset \pi^{-1}(\alpha(1))$  переносится параллельно в начало  $0 \in \pi^{-1}(\alpha(1))$ , а затем, используя связность  $\Gamma_{\alpha j}^i$ , в точку  $x_0$  вдоль пути  $\alpha$  в базе расслоения  $\pi$ .

Отображение  $f$  индуцирует отображение  $f^*$  в обобщённой теории когомологий  $h^*$ , т. е.

$$f^*: h^*(G_m(\pi^{-1}(x_0))) \rightarrow h^*(X \otimes [M, N]).$$

В этой ситуации можно определить стандартным образом характеристические классы подрасслоения  $p: X \rightarrow N$ , принимающие значения в  $h^*(X \otimes [M, N])$ .

**Определение 2.7.1.** Пусть  $a \in h^*(G_m(\pi^{-1}(x_0)))$  — произвольный класс когомологий грассманиана  $G_m(\pi^{-1}(x_0))$ . Тогда классы когомологий вида  $f^*(a) \in h^*(X \otimes [M, N])$  назовём обобщёнными классами Маслова локально тривиального подрасслоения  $p: X \rightarrow N$  в некотором расслоении  $\pi: E \rightarrow M$ .

## 2.7.2. Характеристические классы

### в симплектических векторных расслоениях

Аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.2, можно построить проекции характеристических классов, определённых в разделе 2.7.1. Проделаем это для случая, когда в расслоении задана симплектическая структура. В случае общих связностей в расслоении всё делается аналогично.

**Определение 2.7.2.** Векторное расслоение  $\pi: E \rightarrow M$  называется симплектическим, если каждый слой  $\pi^{-1}(b)$ ,  $b \in M$ , снабжён симплектической структурой  $\omega \in \Lambda^2(\pi^{-1}(b))$ .

Пусть  $p: X \rightarrow N$  — локально тривиальное подрасслоение в  $E$ , где  $X \subset E$ ,  $p = \pi|_X$ ,  $N$  — подмногообразие в  $M$ . Расслоение  $X$  называется лагранжевым подрасслоением в  $E$ , если все слои  $p^{-1}(b)$  — лагранжевы подмногообразия в  $\pi^{-1}(b)$ .

Связность в симплектическом векторном расслоении называется симплектической, если параллельный перенос относительно этой связности сохраняет скалярное произведение  $\omega(X, Y)$ , задаваемое структурой  $\omega$  в каждом слое. Множество всех лагранжевых подпространств в слое  $\pi^{-1}(b)$  симплектического векторного расслоения  $\pi: E \rightarrow M$  обозначим через  $\Lambda(E_b)$ . Если в расслоении  $\pi: E \rightarrow M$  дана симплектическая связность, то определена операция параллельного переноса элементов слоя  $\pi^{-1}(b)$ , а следовательно, и подпространств  $V \subset \pi^{-1}(b)$ . В этой ситуации можно определить группу голономии  $H$  связности в расслоении, а также приведённый лагранжев грассманиан  $H\Lambda(E_x) = \Lambda(E_x)/H$ ,  $x \in M$ , относительно данной симплектической связности в расслоении. Можно повторить все вышеизложенные конструкции и построить характеристические классы лагранжевых подрасслоений.

**Теорема 2.7.3.** Пусть  $\pi: E \rightarrow M$  — симплектическое векторное расслоение,  $p: X \rightarrow N$  — его лагранжево подрасслоение. Предположим, что  $a \in H^*(H\Lambda(\pi^{-1}(x_0)))$  — произвольный класс когомологий приведённого грассманиана  $H\Lambda(E_{x_0})$  относительно некоторой симплектической связности в расслоении  $\pi: E \rightarrow M$ . Тогда существуют естественные характеристические классы  $a(X) \in H^*(X)$  подрасслоения  $p: X \rightarrow N$ .

**Определение 2.7.4.** Классы когомологий  $a(X) = f^*(a) \in H^*(X)$  будем называть обобщёнными классами Маслова лагранжева подрасслоения  $p: X \rightarrow N$  в симплектическом векторном расслоении  $\pi: E \rightarrow M$ . Здесь отображение

$$f: X \rightarrow \Lambda(\pi^{-1}(b_0))/H$$

(называемое касательным представлением подрасслоения  $p: X \rightarrow N$ ) определяется следующим образом.

Отображение  $f$  является композицией параллельного переноса касательного пространства  $T_x(p^{-1}(b)) \subset \pi^{-1}(b)$ ,  $b \in N$ , к слою  $p^{-1}(b)$  в начало координат  $0 \in \pi^{-1}(b)$  и параллельного переноса (с использованием связности в расслоении  $\pi: E \rightarrow M$ ) в фиксированный слой  $\pi^{-1}(b_0)$ ,  $b_0 \in M$ .

### 2.7.3. Индексы Маслова в симплектических векторных расслоениях

Сохраним обозначения предыдущих разделов.

**Определение 2.7.5.** Предположим, что  $a \in H^{k+n}(\Lambda(\pi^{-1}(x_0))/H)$  — фиксированный  $(k+n)$ -мерный класс когомологий приведённого грассманиана относительно некоторой симплектической связности в симплектическом векторном расслоении  $E$ . Индекс Кронекера

$$a[X^{k+n}] = \langle a(X^{k+n}), [X^{k+n}] \rangle$$

будем называть индексом Маслова лагранжева подрасслоения  $X^{k+n} \subset E$  в векторном расслоении  $\pi: E \rightarrow M$ . Здесь  $\dim X = k+n$ ,  $\dim E = m+2n$ ,  $\dim M = m$ ,  $\dim N = k$ .

Для лагранжевых подрасслоений в симплектических векторных расслоениях можно ввести соответствующее понятие кобордантности.

**Определение 2.7.6.** Пусть  $\pi: E^{m+2n} \rightarrow M^m$  — симплектическое векторное расслоение. Два лагранжевых подрасслоения  $p_1: X_1^{k+n} \rightarrow N_1^k$  и  $p_2: X_2^{k+n} \rightarrow N_2^k$  назовём кобордантными, если существует такое лагранжево подрасслоение  $P: Y^{k+n+1} \rightarrow W^{k+1}$  расслоения  $\pi: E^{m+2n} \rightarrow M^m$ , что  $P|_{\partial W^{k+1}} = p_1 \sqcup p_2$ , и многообразие  $W^{k+1}$  имеет границу  $\partial W^{k+1} = N_1^k \cup (-N_2^k)$ .

Аналогично тому, как это сделано выше, доказывается следующее утверждение.

**Теорема 2.7.7.** Пусть лагранжево подрасслоение  $p: X^{k+n} \rightarrow N^k$  симплектического векторного расслоения  $\pi: E^{m+2n} \rightarrow M^m$  кобордантно нулю. Тогда все индексы Маслова подрасслоения  $p: X^{k+n} \rightarrow N^k$  равны нулю.

**Доказательство.** Пусть  $P: W^{k+n+1} \rightarrow Y^{k+1}$  — кобордизм, эквивалентный нулю, лагранжева подрасслоения  $p: X^{k+n} \rightarrow N^k$ . Рассмотрим отображение

$$h: W^{k+n+1} \rightarrow \Lambda(\pi^{-1}(x_0))/H = H\Lambda(\pi^{-1}(x_0)).$$

Параллельный перенос касательного пространства  $T_x P^{-1}(b)$ ,  $b \in Y^{k+1}$ , в начало координат  $0 \in \pi^{-1}(b)$  и затем параллельный перенос результата в фиксированный слой  $E_{x_0} = \pi^{-1}(x_0)$  относительно данной связности даёт нам отображение  $f$ . Имеем, таким образом, коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X^{k+n} & \xrightarrow{f} & H\Lambda(\pi^{-1}(x_0)) \\ & \searrow i & \nearrow h \\ & W^{k+n+1} & \end{array}$$

где  $f$  — касательное представление для  $X^{k+n}$  и  $i: X^{k+n} \rightarrow W^{k+n+1}$  — отображение вложения. Это даёт соответствующую коммутативную диаграмму в когомологиях:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X^{k+n}) & \xleftarrow{f^*} & H^*(H\Lambda(\pi^{-1}(x_0))) \\ & \nwarrow i^* & \swarrow h^* \\ & H^*(W^{k+n+1}) & \end{array}$$

т. е.  $f^* = i^* h^*$ . Из этого вытекают равенства

$$\begin{aligned} a[X^{k+n}] &= \langle a(X^{k+n}), [X^{k+n}] \rangle = \langle f^*(a), [X^{k+n}] \rangle = \\ &= \langle i^* h^*(a), [X^{k+n}] \rangle = \langle i^* h^*(a), \partial[W^{k+n+1}] \rangle = \pm \langle \delta i^* h^*(a), [W^{k+n+1}] \rangle = 0, \end{aligned}$$

так как  $\delta i^* = 0$  в силу точности когомологической последовательности

$$H^s(W^{k+n+1}) \xrightarrow{i^*} H^s(X^{k+n}) \xrightarrow{\delta} H^{s+1}(W^{k+n+1}, X^{k+n}). \quad \square$$

## 2.8. Характеристические классы в псевдоримановой геометрии

### 2.8.1. Характеристические классы изотропных подмногообразий

Рассмотрим псевдоевклидово пространство  $\mathbb{R}_s^n$  индекса  $s$ . Его скалярное произведение имеет вид

$$\langle \xi, \xi \rangle_s = - \sum_{i=1}^s (\xi^i)^2 + \sum_{i=s+1}^n (\xi^i)^2.$$

Вектор  $v$  называется световым или изотропным, если  $\langle v, v \rangle_s = 0$ .

**Определение 2.8.1.** Множество всех изотропных  $p$ -мерных подпространств  $V \subset \mathbb{R}_s^n$  назовём изотропным грассманианом и обозначим его через  $IG_p(\mathbb{R}_s^n)$ ;  $p$ -мерное подмногообразие  $M^p \subset \mathbb{R}_s^n$  называется изотропным, если  $T_x M^p \in IG_p(\mathbb{R}_s^n)$  для всех  $x \in M^p$ .

Более общо, пусть  $N^n$  — псевдориманово многообразие и  $M^p \subset N^n$  — его подмногообразие. Тогда  $M^p$  называется изотропным, если  $T_x M^p \in IG_p(T_x N^n)$  для всех  $x \in M^p$ .

Отметим, что в комплексном случае многообразие изотропных флагов, в частности изотропный грассманиан, играет фундаментальную роль в теории преобразования Пенроуза (см. [201]).

**Лемма 2.8.2.** Рассмотрим изотропный грассманиан  $IG_1(\mathbb{R}_2^4)$ . Тогда

$$IG_1(\mathbb{R}_2^4) \cong \mathbf{T}^2 \cong \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1.$$

В частности,

$$H^*(IG_1(\mathbb{R}_2^4)) \cong \Lambda(w_1, w_2),$$

где  $\deg w_1 = \deg w_2 = 1$ .

**Доказательство.** Имеем разложение в прямую сумму  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ , и для любого вектора  $x \in \mathbb{R}^4$  найдутся такие векторы  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ , что  $x = x_1 \oplus x_2$ . Единичная сфера  $\mathbf{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  задаётся уравнением  $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ , а световой конус  $K$  — уравнением  $|x_1|^2 = |x_2|^2$ . Пересечение  $K \cap \mathbf{S}^3$  диффеоморфно тору  $\mathbf{T}^2$ , так как оно определяется уравнениями  $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ ,  $|x_1|^2 = |x_2|^2$ , т. е.  $|x_1|^2 = 1/2$  и  $|x_2|^2 = 1/2$ . Для того чтобы получить  $IG_1(\mathbb{R}_2^4)$ , мы должны выполнить факторизацию тора  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  по отношению эквивалентности  $(x_1, x_2) \sim (-x_1, -x_2)$ , так как прямая, проходящая через начало координат, пересекает сферу  $\mathbf{S}^3$  в двух диаметрально противоположных точках. Очевидно, что после этой факторизации мы снова получим тор.  $\square$

Пусть  $(N^n, g_{ij})$  — псевдориманово многообразие. Предположим, что связность  $\Gamma_{jk}^i$  согласована с псевдоримановым скалярным произведением  $g_{ij}$  на многообразии  $N^n$ . В этой ситуации можно определить касательное представление, группу голономии  $H$  и приведённое пространство  $HIG_m(T_{x_0} N^n)$ ,  $x_0 \in N^n$ , так же, как это делалось выше.

**Теорема 2.8.3.** Пусть  $(N^n, g_{ij})$  — псевдориманово многообразие со связностью  $\Gamma_{jk}^i$ , согласованной со скалярным произведением  $g_{ij}$ , и  $a \in H^*(HIG_m(T_{x_0} N^n))$  — произвольный класс когомологий приведённого пространства  $HIG_m(T_{x_0} N^n)$  относительно связности  $\Gamma_{jk}^i$ . Тогда существуют естественные характеристические классы  $a(M^m) \in H^*(M^m)$  для любого изотропного подмногообразия  $M^m \subset N^n$ , где  $f$  — касательное представление подмногообразия  $M^m$ . Более точно, пусть  $(M_1^m, g_{ij})$ ,  $(M_2^m, h_{ij})$  — псевдоримановы подмногообразия и  $N^n$  — изотропное подмногообразие в  $M_1^m$ . Если  $\varphi: M_1^m \rightarrow M_2^m$  — такой диффеоморфизм, что  $\varphi^* h_{ij} = g_{ij}$ , то корректно определено отображение

$$d\varphi: HIG_n(T_{x_0} M_1^m) \rightarrow HIG_n(T_{\varphi(x_0)} M_2^m),$$

такое что

$$(d\varphi)^*(a)(N^n) = \varphi^*(a(\varphi(N^n)))$$

для любого класса когомологий  $a \in H^*(HIG_n(T_{\varphi(x_0)}M_s^m))$ .

**Доказательство.** Теорема фактически вытекает из теоремы 2.2.2, так как параллельный перенос переводит изотропные подпространства в изотропные, поскольку связность согласована с псевдоримановой структурой.  $\square$

Отметим следующий способ получения подмногообразий с нулевыми характеристическими классами.

**Теорема 2.8.4.** Пусть  $M_s^m$  — плоское псевдориманово многообразие индекса  $s$ . Предположим, что  $M_s^m$  удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1)  $M_s^m$  компактно;
- 2)  $M_s^m$  лоренцево;
- 3)  $m = \dim M_s^m < 5$ .

Тогда существует такое изотропное векторное поле  $v(x)$ ,  $x \in M_s^m$ , что все его траектории  $N^1$  имеют нулевые классы  $a(N^1) = 0$  для любого класса когомологий  $a \in H^*(IG_1(T_{x_0}M_s^m))$ .

**Доказательство.** Группа голономии  $H$  многообразия  $M_s^m$  тривиальна (см. [47]). Рассмотрим изотропный вектор  $v_0 \in T_{x_0}M_s^m$  и определим векторное поле  $v$  формулой  $v(x) = \tau(v_0)$ , где  $\tau$  — параллельный перенос вдоль любой кривой из точки  $x_0$  в точку  $x$ . Это определение корректно, так как  $H = \{e\}$ . Касательное представление для  $N^1$  тривиально, так как векторное поле  $v$  параллельно. Следовательно, все классы когомологий  $f^*(a)$ , где

$$a \in H^*(HIG_1(T_{x_0}M_s^m)) = H^*(IG_1(T_{x_0}M_s^m)), \quad H = \{e\},$$

равны нулю.  $\square$

### 2.8.2. Характеристические числа изотропных подмногообразий

Сохраним предыдущие обозначения. Пусть  $N^n$  — ориентируемое изотропное подмногообразие в  $M_s^m$ .

**Определение 2.8.5.** Пусть  $a \in H^*(HIG_n(T_{x_0}M_s^m))$  — произвольный  $n$ -мерный класс когомологий приведённого пространства  $HIG_n(T_{x_0}M_s^m)$  относительно связности, согласованной с данной псевдоримановой структурой на  $M_s^m$ . Индекс Кронекера

$$\langle a(N^n), [N^n] \rangle = a[N^n]$$

назовём характеристическим числом изотропного подмногообразия  $N^n \subset M_s^m$ , где  $[N^n]$  — фундаментальный гомологический класс  $[N^n] \in H_n(N^n; \mathbb{R})$ .

**Определение 2.8.6.** Скажем, что два изотропных подмногообразия  $N_1^N, N_2^N$  в псевдоримановом многообразии  $M_s^m$  кобордантны, если найдётся такое подмногообразие  $W^{n+1} \subset M_s^m$ , что  $\partial W^{n+1} = N_1^N \cup N_2^N$ , и существует такая гладкая

функция  $k \in C^\infty(W^{n+1})$ , что

$$N_1^n = \{x \in M_s^m \mid k(x) = 0\}, \quad N_2^n = \{x \in M_s^m \mid k(x) = 1\}$$

и  $\{x \in M_s^m \mid k(x) = \text{const}\}$  — изотропное подмногообразие в  $M_s^m$ .

**Теорема 2.8.7.** *Предположим, что изотропное подмногообразие  $N^n$  кобордантно нулю в псевдоримановом многообразии  $M_s^m$ . Тогда все характеристические числа  $a[N^n]$ ,  $a \in H^*(HIG_n(T_{x_0}M_s^m))$ , равны нулю.*

**Доказательство.** Определим отображение

$$h: W^{n+1} \rightarrow HIG_n(T_{x_0}M_s^m)$$

формулой

$$h(x) = \tau_\gamma(T_x\{x \in M_s^m \mid k(x) = c\}),$$

где  $\tau_\gamma$  — параллельный перенос вдоль кривой  $\gamma$  из точки  $x$  в фиксированную точку  $x_0 \in M_s^m$ . Отображение  $h$  корректно определено, так как подпространство  $\tau_\gamma(T_x\{x \in M_s^m \mid k(x) = c\})$  определено с точностью до преобразований из группы голономии  $H$ . Следовательно, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} N^n & \xrightarrow{f} & HIG_n(T_{x_0}M_s^m) \\ & \searrow i & \nearrow h \\ & W^{n+1}, & \end{array}$$

где  $i: N^n \rightarrow W^{n+1}$  — отображение вложения и  $f$  — касательное представление подмногообразия  $N^n$ , так как  $N^n = \{x \in M_s^m \mid k(x) = c\}$ .

Перейдём к когомологиям. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^*(N^n) & \xleftarrow{f^*} & H^*(HIG_n(T_{x_0}M_s^m)) \\ & \nwarrow i^* & \nearrow h^* \\ & H^*(W^{n+1}), & \end{array}$$

т. е.  $f^* = i^*h^*$ . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} a[N^n] &= \langle a(N^n), [N^n] \rangle = \langle f^*(a), [N^n] \rangle = \langle i^*h^*(a), [N^n] \rangle = \\ &= \langle i^*h^*(a), \partial[W^{n+1}] \rangle = \pm \langle \delta i^*h^*(a), [W^{n+1}] \rangle = 0 \end{aligned}$$

для произвольного класса когомологий  $a \in H^*(HIG_n(T_{x_0}M_s^m))$ . В данном случае мы использовали равенство

$$\langle v, \partial a \rangle = \pm \langle \delta v, a \rangle$$

и точность когомологической последовательности пары  $(W^{n+1}, N^n)$ :

$$H^n(W^{n+1}) \xrightarrow{i^*} H^n(N^n) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(W^{n+1}, N^n).$$

Это завершает доказательство теоремы.  $\square$

## 2.9. Теорема де Рама и примеры симплектических связностей

### 2.9.1. Дополнение к теореме разложения де Рама

Докажем следующее уточнение классической теоремы разложения де Рама в случае, когда риманово многообразие допускает параллельную симплектическую структуру.

**Теорема 2.9.1.** Пусть  $M$  — связное односвязное полное риманово многообразие, допускающее параллельную относительно связности Леви-Чивита  $\Gamma_{jk}^i$  симплектическую структуру  $\omega_{ij}$ , т. е.  $\Gamma_{jk}^i$  — симплектическая связность. Тогда  $M$  изометрично прямому произведению  $M_0 \times M_1 \times \dots \times M_k$ , где  $M_0$  — евклидово пространство, причём  $\omega|_{M_0}$  — симплектическая структура на  $M_0$ , а  $M_1, \dots, M_k$  — односвязные полные неприводимые римановы многообразия.

**Доказательство.** Единственное, что требует доказательства, — это то, что  $(M_0, \omega|_{M_0})$  — симплектическое многообразие.

Пусть  $T_{x_0}^{(0)}$  — множество элементов из  $T_{x_0}M$ , неподвижных относительно группы голономии  $H = H_{x_0}(M)$ , а  $T'_{x_0}$  — его ортогональное дополнение в  $T_{x_0}M$ . Оно инвариантно относительно действия группы  $H$  и может быть разложено в прямую сумму

$$T'_{x_0} = \sum_{i=1}^k T_{x_0}^{(i)}$$

взаимно ортогональных инвариантных подпространств  $T_{x_0}^{(i)}$ .

Обозначим через  $T_0$  и  $T'$  параллельные распределения, определяемые с помощью  $T_{x_0}^{(0)}$  и  $T'_{x_0}$  соответственно, как это описано в [77]. Пусть  $M_0, M'$  — максимальные интегральные подмногообразия этих распределений, проходящие через точку  $x_0$ . Об их существовании см. [77]. Там же доказано, что  $M_0, M'$  — вполне геодезические подмногообразия. Теорема де Рама гарантирует разложение  $M \cong M_0 \times M'$ .

Докажем теперь в дополнение к теореме де Рама, что если  $\omega$  — симплектическая структура на  $M$ , параллельная относительно связности, согласованной с римановой метрикой, то  $\omega|_{T_{x_0}^{(0)}}$  — невырожденная форма. Пусть  $\xi \in T_{x_0}^{(0)}$ ,  $\xi^\perp$  — косоортогональное дополнение к  $\mathbb{R}\xi$  в пространстве  $T_{x_0}M$  относительно формы  $\omega$ , т. е.

$$\xi^\perp = \{\zeta \in T_{x_0}M \mid \omega(\zeta, \xi) = 0\}.$$

Поскольку  $\omega$  — невырожденная форма, то

$$\dim \xi^\perp = \dim T_{x_0}M - 1.$$

Ортогональное дополнение  $\xi^\perp$  инвариантно относительно группы голономии  $H$ . Поскольку  $M$  — односвязное многообразие, то группа голономии  $H$  совпадает с ограниченной группой голономии  $H_0$ . Ограниченная группа голономии риманова многообразия  $M$  — замкнутая подгруппа в  $SO(n)$ ,  $n = \dim M$

(см. [77]). Следовательно, группа  $H$  компактна и действует на  $T_{x_0}M$  вполне приводимо. Поэтому

$$T_{x_0}M = \xi^\perp \oplus \mathbb{R}\eta,$$

где  $\mathbb{R}\eta$  — одномерное инвариантное относительно действия группы  $H$  подпространство в  $T_{x_0}M$ , причём  $\omega(\xi, \eta) \neq 0$ .

Покажем, что  $\eta \in T_{x_0}^{(0)}$ . Имеем равенство

$$\omega(\sigma\xi, \sigma\eta) = \omega(\xi, \eta)$$

для  $\sigma \in H$ , так как  $\sigma \in H$  сохраняет симплектическую структуру  $\omega|_{T_{x_0}M}$ . С другой стороны,

$$\omega(\sigma\xi, \sigma\eta) = \omega(\xi, \lambda(\sigma)\eta) = \lambda(\sigma)\omega(\xi, \eta),$$

так как  $\sigma\eta = \lambda(\sigma)\eta$ . Сравнивая два полученных равенства, имеем

$$\omega(\xi, \eta) = \lambda(\sigma)\omega(\xi, \eta),$$

и поскольку  $\omega(\xi, \eta) \neq 0$ , то  $\lambda(\sigma) = 1$ .

Итак,  $\eta \in T_{x_0}^{(0)}$ , т. е. в  $T_{x_0}^{(0)}$  мы нашли такой вектор  $\eta$ , что  $\omega(\xi, \eta) \neq 0$ , а это означает, что форма  $\omega|_{T_{x_0}M}$  невырождена.

Форма  $\omega|_{M_0}$  замкнута как ограничение замкнутой формы. Заметим, что форма  $\omega|_{M_0}$  есть параллельное перенесение на  $M$  формы  $\omega|_{T_{x_0}^{(0)}}$ . Это следует из того, что параллельный перенос на вполне геодезическом подмногообразии в индуцированной аффинной связности совпадает с параллельным переносом в большем многообразии (см., например, [143]).

Из сказанного следует, что  $\omega|_{M_0}$  — невырожденная форма, так как она получается параллельным переносом из невырожденной формы  $\omega|_{T_{x_0}^{(0)}}$ , что завершает доказательство теоремы.  $\square$

### 2.9.2. Некоторые конструкции симплектических связностей

Пусть  $M^{2n}$  — чётномерное риманово многообразие с метрикой  $g_{ij}$ . Возникает естественный вопрос: можно ли задать на  $M^{2n}$  параллельную симплектическую структуру  $\omega_{ij}$ . Другими словами, рассматриваются такие связности  $\Gamma_{jk}^i$ , что  $\nabla_k \omega_{ij} = 0$  и  $\nabla_k g_{ij} = 0$ ,  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ , т. е. связность  $\Gamma_{jk}^i$  должна быть одновременно римановой и симплектической.

Отметим следующий простой, но фундаментальный факт, позволяющий строить большие серии таких примеров.

**Предложение 2.9.2.** Пусть  $(M^{2n}, g_{ij})$  — чётномерное риманово многообразие,  $x_0 \in M^{2n}$ ,  $H = H_{x_0}(M^{2n})$  — группа голономии в точке  $x_0$ . На многообразии  $M^{2n}$  существует параллельная симплектическая структура  $\omega_{ij}$  тогда и только тогда, когда на касательном пространстве  $T_{x_0}M^{2n}$  можно задать  $H$ -инвариантную невырожденную 2-форму  $\omega \in \Lambda^2(T_{x_0}^*M^{2n})$ .

**Доказательство.** Если  $\omega_{ij}$  — параллельная симплектическая структура на  $M^{2n}$ , то  $(\omega_{ij})|_{T_{x_0}M^{2n}}$  — искомая  $H$ -инвариантная 2-форма.

Обратно, пусть  $\omega$  — это  $H$ -инвариантная 2-форма на  $T_{x_0}M^{2n}$ . Пусть  $\beta(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , — произвольная кривая, идущая из точки  $x_0 = \beta(0)$  в точку  $z = \beta(1) \in M^{2n}$ . Для  $X, Y \in T_zM^{2n}$  положим

$$\omega_z(X, Y) = \omega(\tau_\beta X, \tau_\beta Y),$$

где  $\tau_\beta$  — параллельный перенос вдоль кривой  $\beta$ . Ввиду  $H$ -инвариантности формы  $\omega$  это определение корректно, т. е. не зависит от выбора пути  $\beta$ , соединяющего точки  $z, x_0$ . Очевидно, что форма  $\omega$  параллельна. Осталось доказать, что  $d\omega = 0$ , а это следует из предложения 2.1.3.  $\square$

Простейшие примеры симплектических связностей можно извлечь из следующего утверждения.

**Предложение 2.9.3.** Пусть  $(M, h_{ij})$  — кэлерово многообразие. Тогда связность, согласованная с римановой метрикой  $\operatorname{Re} h_{ij}$ , является симплектической относительно симплектической структуры  $\omega = \operatorname{Im} h_{ij}$ .

**Доказательство** вытекает из основных свойств кэлеровых многообразий (см. [78]).  $\square$

**Теорема 2.9.4.** Пусть  $M^{2n}$  — компактное связное плоское риманово многообразие, которое допускает параллельную симплектическую структуру,  $H$  — его группа голономии. Тогда  $H$  — конечная подгруппа в  $\operatorname{Sp}(n, \mathbb{R})$ , и таким способом получаются с точностью до изоморфизма все конечные подгруппы  $H$  в  $\operatorname{Sp}(n, \mathbb{R})$ .

**Доказательство.** Если  $M^{2n}$  — компактное плоское риманово многообразие, то его группа голономии  $H$  конечна (см. [47]). Поскольку связность симплектическая, то  $H \subset \operatorname{Sp}(n, \mathbb{R})$ .

Обратно, пусть  $H$  — произвольная конечная подгруппа в  $\operatorname{Sp}(n, \mathbb{R})$ . Тогда в силу теоремы Ауслендера—Кураниши (см. [47]) группа  $H$  является группой голономии некоторого плоского компактного многообразия  $M^N$ . Можно считать, добавляя тривиальные слагаемые, что  $H \subset \operatorname{Sp}(n, \mathbb{R})$ , где  $2n \geq N$ , т. е.  $T_x M^N \subset \mathbb{R}^{2n}$ , и группа голономии  $H$ , действуя в  $\mathbb{R}^{2n} = T_x M^N \oplus \mathbb{R}^{2n-N}$ , сохраняет некоторую симплектическую структуру.

Рассмотрим многообразие  $M^{2n} = M^N \times \mathbf{T}^{2n-N}$ , где  $\mathbf{T}^{2n-N}$  — плоский тор с тривиальной группой голономии. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Hol}_x(M^{2n}) &\cong \operatorname{Hol}_{x_1}(M^N) \times \operatorname{Hol}_{x_2}(\mathbf{T}^{2n-N}) \cong \operatorname{Hol}_{x_1}(M^N) \cong H, \\ x &= (x_1, x_2) \in M^{2n}. \end{aligned}$$

Итак, в пространстве  $T_x M^{2n}$  имеется  $H$ -инвариантная симплектическая структура. Теперь, используя предложение 2.9.2, мы получаем параллельную симплектическую структуру на многообразии  $M^{2n}$ .  $\square$

Рассмотрим случай псевдоримановых многообразий. Для них также естественно поставить вопрос о существовании параллельных симплектических структур.

**Теорема 2.9.5.** Пусть  $M_s^n$  — плоское полное связное однородное псевдориманово многообразие сигнатуры  $s$ . Тогда если многообразие  $M_s^n$  удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) оно компактное риманово (т. е.  $s = 0$  или  $s = n$ );
- 2) оно лоренцево (т. е.  $s = 1$  или  $s = n - 1$ );
- 3)  $n = \dim M_s^n < 5$ ,

то многообразие  $M_s^n$  допускает параллельную симплектическую структуру, т. е. связность, согласованная с псевдоримановой метрикой, симплектическая. В этом случае группа голономии  $H$  тривиальна и фундаментальная группа  $\pi_1(M_s^n)$  является группой сдвигов пространства  $\mathbb{R}^n$ . Здесь  $n$  чётно.

**Доказательство.** Согласно [47] имеем равенство  $H = \{I\}$ ,  $M_s^n = \mathbb{R}_s^n / \Gamma$ ,  $\Gamma$  — группа сдвигов.

Выберем в пространстве  $T_{x_0}M_s^n$  произвольную невырожденную 2-форму  $\omega \in \Lambda^2(T_{x_0}M_s^n)$  и разнесём её с помощью параллельных переносов по всему многообразию  $M_s^n$ . По предложению 2.1.3 мы получим симплектическую структуру, и связность, согласованная с псевдоримановой структурой, будет симплектической.  $\square$

**Теорема 2.9.6.** Пусть  $(M, g_{ij})$  — полное односвязное неприводимое риманово неплоское спинорное многообразие размерности  $n$ , допускающее хотя бы одно параллельное спинорное поле. Если  $n = 2m$ ,  $n \neq 8$ , то на  $M$  существует такая параллельная симплектическая структура  $\omega_{ij}$ , что риманова связность на  $M$  является симплектической относительно  $\omega_{ij}$ .

**Доказательство.** Пусть  $N$  — размерность пространства параллельных спиноров. Будем следовать обозначениям работы [241]. При наших предположениях возможны два случая (см. [241]):

- а)  $n = 2m$ ,  $m \geq 2$ , представление голономии есть  $(\mathrm{SU}(m), \mathbb{C}^m)$  и  $N = 2$ ;
- б)  $n = 4m$ ,  $m \geq 2$ , представление голономии есть  $(\mathrm{Sp}(m), \mathbb{C}^{2m})$  и  $N = m + 1$ .

Пусть  $H$  — группа голономии.

Рассмотрим случай а). Если  $H \subset \mathrm{SU}(m)$ ,  $n = 2m$ , то имеется пара параллельных спинорных полей  $\sigma_1, \sigma_2$ , и с их помощью строится параллельная невырожденная 2-форма  $\eta_2$  (см. [241]). Поскольку форма  $\eta_2$  параллельная, то из предложения 2.1.3 вытекает равенство  $d\eta_2 = 0$ , т. е.  $\eta_2$  — параллельная симплектическая структура, и риманова связность является симплектической.

Рассмотрим случай б). Если  $H \subset \mathrm{Sp}(m)$ ,  $n = 4m$ , то используем спинорные поля  $\sigma_1, \sigma_2$  из [241]. С их помощью строится такая форма  $\mu$ , что  $\mathrm{Re}[\mu/(m-1)!]$  — невырожденная параллельная 2-форма (см. [241]). Снова используя предложение 2.1.3, мы получим выполнение равенства  $d\mu = 0$ .  $\square$

**Следствие 2.9.7.** В условиях теоремы 2.9.5 касательное расслоение  $TM_s^n$  к многообразию  $M_s^n$  допускает плоскую параллельную симплектическую структуру.

**Доказательство.** Достаточно применить теорему 2.6.4.  $\square$

### 2.9.3. Связности абсолютного параллелизма на симплектическом многообразии

Симплектические связности на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  можно использовать для построения обобщённых классов Маслова лагранжевых подмногообразий  $N^n \subset M^{2n}$ . Наиболее интересный случай связан с наличием на многообразии  $M^{2n}$  плоской симплектической связности  $\Gamma_{jk}^i$ , т. е.  $R_{j,pq}^i = 0$  и  $\nabla_k \omega_{ij} = 0$ , где  $R_{j,pq}^i$  — тензор кривизны связности  $\Gamma_{jk}^i$ .

Одна из конструкций для таких связностей была предложена в пункте 2.6.2. Оказывается, что в некоторых случаях такую связность можно построить, отказавшись от условия её симметричности. Для этого нам потребуются почти комплексные структуры на симплектических многообразиях, в некотором смысле согласованные с симплектической структурой. Имеет место следующее известное утверждение из линейной алгебры.

**Теорема 2.9.8.** Пусть  $\omega(X, Y)$  — кососимметрическая невырожденная билинейная форма в векторном пространстве  $V$ . Тогда в пространстве  $V$  существует комплексная структура  $J$ , согласованная с формой  $\omega$ . Более точно, существует такой линейный оператор  $J: V \rightarrow V$ , что

- 1)  $J^2 = -\text{Id}$ ;
- 2)  $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ ;
- 3)  $\mu_J(X, Y) = \omega(X, JY)$  — евклидово скалярное произведение в пространстве  $V$  и, в частности,  $\omega(X, Y) > 0$  для любого  $X \in V$ ,  $X \neq 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mu$  — произвольное скалярное произведение в пространстве  $V$ . Определим оператор  $A: V \rightarrow V$  равенством

$$\omega(X, Y) = \mu(AX, Y)$$

для любых  $X, Y \in V$ . В силу невырожденности форм  $\omega$  и  $\mu$  оператор  $A$  однозначно определён и невырожден.

Оператор  $-(A^2)$  является самосопряжённым оператором относительно скалярного произведения  $\mu$ , т. е.

$$\mu(-A^2 X, Y) = \mu(X, -A^2 Y)$$

для всех  $X, Y \in V$ . Оператор  $-(A^2)$  является положительно определённым по отношению к форме  $\mu$ , т. е.

$$\mu(-A^2 X, X) > 0, \quad X \neq 0.$$

Поскольку  $-(A^2)$  — положительный самосопряжённый оператор, то однозначно определён положительный корень из оператора:

$$(-(A^2))^{1/2} = \sqrt{-A^2}.$$

Положим  $J = (-(A^2))^{-1/2}A$ . Ясно, что  $J^2 = -\text{Id}$ .

Имеет место равенство

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y).$$

Формула

$$\mu_J(X, Y) = \omega(X, JY)$$

задаёт евклидово скалярное произведение.  $\square$

**Теорема 2.9.9.** Пусть  $(M^{2n}, \omega)$  — симплектическое многообразие, на котором имеются такие  $n$  векторных полей  $v_1, \dots, v_n$ , что для любой точки  $x \in M^{2n}$  векторы  $v_1(x), \dots, v_n(x)$  линейно независимы и  $\omega(v_i, v_j) = 0$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Тогда на многообразии  $M^{2n}$  существует такая плоская связность  $\Gamma_{jk}^i$  абсолютного параллелизма, что ковариантная производная  $\nabla_k \omega_{ij}$  относительно неё равна нулю и распределение  $L_x = \langle v_1(x), \dots, v_n(x) \rangle$  параллельно относительно  $\Gamma_{jk}^i$ . В частности, если  $L_x$  — интегрируемое распределение, то его интегральные подмногообразия являются вполне геодезическими относительно связности  $\Gamma_{jk}^i$ .

**Доказательство.** Используя теорему 2.9.8, мы построим такую почти симплексную структуру  $J$  ( $J^2 = -\text{Id}$ ) на многообразии  $M^{2n}$ , что

- а)  $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ ,  $X, Y \in T_x M^{2n}$ ;
- б)  $g(X, Y) = \omega(X, JY)$  — риманова метрика на многообразии  $M^{2n}$ .

Выполняя в каждом касательном пространстве  $T_x M^{2n}$  процесс ортогонализации Грама—Шмидта относительно метрики  $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ , мы из набора векторов  $v_1(x), \dots, v_n(x)$  построим ортонормированный базис  $e_1, \dots, e_n$  подпространства

$$\langle v_1(x), \dots, v_n(x) \rangle = L_v \subset T_x M^{2n},$$

порождённого векторами  $v_1(x), \dots, v_n(x)$ . Имеем также равенство  $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ , или, другими словами,  $\omega(e_i, Je_j) = \delta_{ij}$ .

По условию теоремы  $L_x$  — лагранжево подпространство в пространстве  $T_x M^{2n}$ , поэтому  $\omega(e_i, e_j) = 0$ . Далее,  $\omega(Je_i, Je_j) = 0$ , так как

$$\omega(Je_i, Je_j) = \omega(e_i, e_j) = 0.$$

Итак, мы построили ортонормированный относительно метрики  $g$  базис

$$(f_1, \dots, f_{2n}) = (e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n)$$

пространства  $T_x M^{2n}$ , причём  $g(f_i, f_j) = \text{const}$  и  $\omega(f_i, f_j) = \text{const}$  на многообразии  $M^{2n}$ .

Определим теперь ковариантную производную  $\nabla$  из следующего условия: если  $X = X^i f_i$ , то  $\nabla_X Y = Y(X^i) f_i$  (см. [202]).

Ясно, что параллельный перенос вдоль кривой  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , относительно связности  $\nabla$  из точки  $a = \gamma(0)$  в точку  $b = \gamma(1)$  не зависит от выбора кривой  $\gamma$ , соединяющей эти точки, т. е. это связность абсолютного параллелизма (см. [77]). Это утверждение следует из того, что координаты вектора относительно базиса  $f_1, \dots, f_{2n}$  при параллельном переносе сохраняются.

Далее, из последнего замечания и из того, что  $\omega(f_i, f_j) = \text{const}$ , вытекает равенство

$$\omega(X(t), Y(t)) = \omega(X^i f_i, Y^j f_j) = X^i Y^j \omega(f_i, f_j) = \text{const}$$

для любых векторных полей  $X(t)$ ,  $Y(t)$ , параллельных вдоль некоторой кривой  $\gamma(t)$ , а это означает, что  $\nabla_k \omega_{ij} = 0$ , т. е. форма  $\omega$  параллельна относительно связности  $\nabla$ . Аналогично метрика  $g$  параллельна относительно связности  $\nabla$ , т. е.  $\nabla_k g_{ij} = 0$ .

Утверждение об обращении в нуль тензора кривизны вытекает из его определения

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

и формулы для ковариантной производной

$$\nabla_X Y = (XY^i) f_i.$$

□

**Следствие 2.9.10.** Пусть  $M^n$  — параллелизуемое многообразие. Тогда на его кокасательном расслоении  $T^*M^n$  существует такая его плоская связность  $\nabla$  абсолютного параллелизма, что  $\nabla_k \omega_{ij} = 0$ , где  $\omega$  — стандартная симплектическая структура на  $T^*M^n$ , и все слои  $T_x^*M^n$  — вполне геодезические подмногообразия.

**Доказательство.** Выберем на многообразии  $M^n$  векторные поля  $v_1(x), \dots, v_n(x)$ , задающие его параллелизацию. Их можно считать заданными на  $T^*M^n$ . Действительно, пусть  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — формы, двойственные к базису  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , т. е.  $\omega_i(v_j) = \delta_{ij}$ . Тогда можно положить

$$v_i(y) = \omega_i(\pi(y)) \in T_x^*M^n \cong T_y(T_x^*M^n) \subset T_y T^*M^n.$$

Поскольку  $T_x^*M^n$  — лагранжево подмногообразие в кокасательном расслоении  $T^*M^n$ , то все условия теоремы 2.9.9 выполнены, и, применяя её, мы получим наше утверждение. □

**Определение 2.9.11.** Слоение  $F$  на симплектическом многообразии  $M^{2n}$  называется лагранжевым, если каждый его слой является лагранжевым подмногообразием в  $M^{2n}$ . Слоение  $F$  назовём интегрируемым, если существует такой набор векторных полей  $v_1, \dots, v_n$ , что  $v_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — базис касательного пространства  $T_x F$  к слою, проходящему через точку  $x$ .

**Следствие 2.9.12.** Для любого интегрируемого лагранжева слоения  $F$  симплектического многообразия  $(M^{2n}, \omega)$  существует такая плоская связность  $\nabla$  абсолютного параллелизма, что  $\nabla_k \omega_{ij} = 0$ , и все его слои — вполне геодезические подмногообразия. В частности,  $M^{2n}$  — параллелизуемое многообразие.

**Следствие 2.9.13.** Пусть  $\dot{x} = \text{sgrad } h$  — вполне интегрируемая гамильтонова система на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  и  $f_1 = h, f_2, \dots, f_n$  — полный инволютивный набор её первых интегралов. Положим

$$K = \{x \in M^{2n} \mid \text{sgrad } f_i(x), i = 1, \dots, n\},$$

при этом рассматриваемые векторы  $\text{sgrad } f_i(x)$  линейно зависимы в  $T_x M^{2n}$ . Тогда на множестве  $U = M^{2n} \setminus K$  существует такая плоская связность  $\nabla$  абсолютного параллелизма, что  $\nabla_k \omega_{ij} = 0$ , и все поверхности

$$\{x \in M^{2n} \mid f_i(x) = \text{const}, i = 1, \dots, n\}$$

являются вполне геодезическими подмногообразиями.

**Доказательство.** Утверждение вытекает из теоремы 2.9.9, если в качестве полей  $v_1, \dots, v_n$  взять косые градиенты  $v_i = \text{sgrad } f_i$  первых интегралов  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

**Следствие 2.9.14.** Пусть  $v_1 = \text{sgrad } h_1$ ,  $v_2 = \text{sgrad } h_2$  — две вполне интегрируемые гамильтоновы системы на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$ . Тогда определены обобщённые классы Маслова  $M(h_1, h_2)$  торов Лиувилля системы  $v_1$  относительно системы  $v_2$ . Эти классы нетривиальны: например, индексы торов Лиувилля нормальной серии относительно компактной серии для интегрируемых систем на алгебре Ли  $\mathfrak{so}(3)$  равны либо 0, либо 2 в зависимости от их расположения по отношению к бифуркационной диаграмме.

## 2.10. Лоскутно-аффинные многообразия

### 2.10.1. Геометрия лоскутно-аффинных многообразий

А. Т. Фоменко было введено понятие симплектической бордантности интегрируемых гамильтоновых систем. Оказалось, что для этого понятия существует аналог в аффинной геометрии, он был рассмотрен в предыдущих разделах.

Позже А. Т. Фоменко обнаружил, что в теории бордизмов гамильтоновых систем большую роль играет новое понятие жёсткой бордантности интегрируемых гамильтоновых боттовских систем. Оказывается, классы жёстко бордантных систем порождают нетривиальную абелеву группу (см. [160]). В процессе этого исследования выяснилось, что в рамках этой теории важное место занимает новый класс лоскутно-симплектических многообразий размерности четыре.

Ориентируемое четырёхмерное многообразие  $M^4$  с гладкой функцией  $H$  называется лоскутно-симплектическим, если  $M^4$  разбито на слои

$$M_i = \{x \in M^4 \mid a_i \leq H(x) \leq a_{i+1}\},$$

на каждом из которых задана симплектическая структура  $\omega_i$ . Эти структуры не обязаны сшиваться в единую гладкую симплектическую структуру на всём многообразии  $M^4$  (см. [160]).

Для лоскутно-симплектических многообразий существует аналог в теории многообразий с аффинной связностью. Изложенные выше конструкции можно перенести на этот случай.

**Определение 2.10.1.** Многообразие  $M^n$  назовём лоскутно-аффинным, если задано разбиение

$$M^n = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$$

многообразия  $M^n$  на «слои»  $B_\alpha$ , такие замкнутые подмножества  $B_\alpha$ , что

- а)  $\text{int } B_\alpha \neq \emptyset$  для всех  $\alpha \in I$ ;
- б)  $\text{int } B_\alpha \cap \text{int } B_\beta = \emptyset$  при  $\alpha \neq \beta$ ;
- в)  $Q_\alpha = \partial Q_\beta$  — гладкое подмногообразие в  $M^n$ , и на некоторых открытых подмножествах  $u_\alpha \supset B_\alpha$  задана аффинная связность  $(\alpha)\Gamma_{jk}^i$ .

В этой ситуации мы будем использовать обозначение  $(M^n, B, \Gamma)$ , где  $B = \{B_\alpha\}$ ,  $\Gamma = \{(\alpha)\Gamma_{jk}^i\}$ .

**Определение 2.10.2.** Кривую  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M^n$  в лоскутно-аффинном многообразии  $M^n$  назовём регулярной, если кривая  $\gamma(t)$  трансверсально пересекает все подмногообразия  $Q_\alpha$ .

Для регулярных кривых на лоскутно-аффинном многообразии определим параллельный перенос следующим образом. Пусть  $M^n$  — лоскутно-аффинное многообразие и  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M^n$  — регулярная кривая на  $M^n$ . Определим параллельный перенос вектора  $v \in T_{\gamma(0)}M^n$  в точку  $\gamma(1)$  по следующему правилу. Предположим, что  $\gamma(t)$  пересекает подмногообразия  $Q_{\alpha_1}, \dots, Q_{\alpha_s}$  в точках  $p_1 = \gamma(t_1), \dots, p_s = \gamma(t_s)$ , где  $0 \leq t_1 < \dots < t_s \leq 1$ . Тогда обычным образом перенесём вектор  $v$  в точку  $p_1$  относительно связности  $(\alpha_1)\Gamma_{jk}^i$ , если отрезок  $[\gamma(0), p_1]$  кривой  $\gamma(t)$  лежит в слое  $B_{\alpha_1}$ . Затем полученный вектор  $v_1$  перенесём в точку  $p_2$  относительно связности  $(\alpha_2)\Gamma_{jk}^i$ , если отрезок  $[p_1, p_2]$  кривой  $\gamma(t)$  лежит в слое  $B_{\alpha_2}$ , и т. д. В итоге получим вектор  $\tau_\gamma(v) \in T_{\gamma(1)}M^n$ , непрерывно зависящий от вектора  $v \in T_{\gamma(0)}M^n$ .

Имея параллельный перенос, мы можем определить группу голономии  $H$  лоскутно-аффинного многообразия  $M^n$  в точке  $p \in M^n$ . Эта группа действует как группа всех линейных преобразований

$$A: T_p M^n \rightarrow T_p M^n,$$

порождённых параллельными переносами вдоль кусочно-гладких кривых, начинающихся и заканчивающихся в точке  $p$ . Это действие продолжается естественным образом на все грассмановы многообразия  $G_k(T_p M^n)$ ,  $1 \leq k \leq \dim M^n = n$ . Поэтому определены приведённые грассманианы

$$HG_k(T_p M^n) = G_k(T_p M^n)/H(p).$$

### 2.10.2. Относительные характеристические классы и индексы подмногообразий в лоскутно-аффинных многообразиях

По аналогии с аффинными многообразиями можно определить касательное представление подмногообразия в лоскутно-аффинном многообразии.

Пусть  $N^n \subset M^m$  — произвольное подмногообразие в лоскутно-аффинном многообразии  $M^m$ , а  $x_0 \in M^m$  — некоторая фиксированная точка. Для произвольной точки  $x \in N^n$  рассмотрим некоторую регулярную кривую  $\gamma(t)$ ,  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = x_0$ , и параллельный перенос  $\tau_\gamma$  из точки  $x$  в точку  $x_0$  вдоль кривой  $\gamma(t)$ . Тогда можно определить отображение

$$f': N^n \rightarrow G_n(T_{x_0}M^m), \quad n = \dim N^n,$$

по правилу  $f'(x) = \tau_\gamma(T_x N^n) \subset T_{x_0}M^m$ .

Если имеется ещё одна регулярная кривая  $\beta(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , такая что  $\beta(0) = x$ ,  $\beta(1) = x_0$ , то существует линейное отображение  $A \in H(x_0)$  из группы голономии  $H(x_0)$ , такое что

$$A(\tau_\beta(T_x N^n)) = \tau_\gamma(T_x N^n).$$

В итоге поэтому мы получаем корректно определённое отображение

$$f: N^n \rightarrow HG_n(T_{x_0}M^m)$$

подмногообразия  $N^n$  в приведённый грассманиан  $HG_n(T_{x_0}M^m)$ .

**Определение 2.10.3.** Построенное отображение

$$f: N^n \rightarrow HG_n(T_{x_0}M^m)$$

назовём касательным представлением подмногообразия  $N^n$  в лоскутно-аффинном многообразии  $M^m$ .

Касательное представление  $f$  индуцирует соответствующее отображение  $f^*$  в когомологиях:

$$f^*: h^*(HG_n(T_{x_0}M^m)) \rightarrow h^*(N^n).$$

**Теорема 2.10.4.** Пусть  $M^m$  — лоскутно-аффинное многообразие и  $a \in h^*(HG_n(T_{x_0}M^m))$  — произвольный класс когомологий приведённого грассманиана. Тогда определён характеристический класс  $a(N^n) = f^*(a) \in h^*(N^n)$  подмногообразия  $N^n \subset M^m$  со значениями в теории когомологий  $h^*$ .

**Определение 2.10.5.** Классы когомологий вида  $f^*(a)$ , определённые в последней теореме, будем называть относительными характеристическими классами пары  $N^n \subset M^m$ .

Теперь, по аналогии с многообразиями аффинной связности, можно определить индексы подмногообразий. Обозначим фундаментальный гомологический класс ориентированного компактного многообразия  $N^n$  через  $[N^n] \in H_n(N^n; \mathbb{R})$ .

**Определение 2.10.6.** Пусть  $a \in H^*(HG_n(T_{x_0}M^m))$  — произвольный  $n$ -мерный класс когомологий приведённого грассманиана для лоскутно-аффинного многообразия  $M^m$ . Тогда индекс Кронекера  $\langle a(N^n), [N^n] \rangle = a[N^n]$  назовём индексом подмногообразия  $N^n \subset M^m$ , отвечающим классу когомологий  $a$ .

Оказывается, так определённый индекс является инвариантом относительно  $\nu\Gamma$ -кобордизма, описанного в разделе 2.3.

**Теорема 2.10.7.** Пусть подмногообразие  $N^n$  в лоскутно-аффинном многообразии  $M^m$  является  $\nu\Gamma$ -кобордантным нулю, т. е.  $N^n = \partial W^{n+1}$ , причём  $W^{n+1}$  — подмногообразие в  $M^m$ . Тогда все индексы подмногообразия  $N^n$  равны нулю.

**Доказательство.** Достаточно повторить доказательство теоремы 2.3.3.  $\square$

### 3. Обобщённые классы Маслова, минимальные поверхности и гамильтоновы системы

#### 3.1. Относительные характеристические классы минимальных поверхностей

Изучение минимальных лагранжевых поверхностей в кэлеровых многообразиях  $M^{2n}$  было начато Харви и Лоусоном [208] для случая  $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$  со стандартной кэлеровой структурой. Лагранжево подмногообразие в симплектическом пространстве  $\mathbb{R}^{2n}$  обладает топологическим инвариантом — характеристическими классами Маслова—Арнольда (см. [1, 3, 29, 30]). А. Т. Фоменко сформулировал гипотезу, что у минимальных лагранжевых подмногообразий характеристические классы Маслова—Арнольда тривиальны. Эта гипотеза была доказана в [69, 87] для случая  $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ . А. Т. Фоменко также выдвинул гипотезу, что «разумно определённые» характеристические классы (аналоги классов Маслова) для минимальных лагранжевых подмногообразий в симплектических многообразиях должны быть равны нулю.

В главе 2 было предложено одно из возможных обобщений классов Маслова на подмногообразия в произвольных многообразиях с аффинной связностью, в частности в римановых многообразиях. Оказывается, для большого класса устойчивых минимальных поверхностей справедлива гипотеза Фоменко.

Приведём примеры такого типа. Как уже отмечалось, первые результаты были получены в [69, 87].

**Теорема 3.1.1.** Пусть  $f: M^m \rightarrow N^{n+1}$  — изометрическая иммерсия, где  $M^m$  — компактное ориентированное риманово многообразие без границы, а  $N^{n+1}$  — плоское ориентированное риманово многообразие. Если отображение  $f$  минимально и устойчиво (относительно функционала объёма), то все относительные характеристические классы пары  $M^m \subset N^{n+1}$  равны нулю.

**Доказательство.** Используем следующий результат работы [210]: в условиях теоремы отображение  $f$  минимально и устойчиво тогда и только тогда, когда  $f$  вполне геодезическое. Теперь утверждение вытекает из утверждения теоремы 2.2.4.  $\square$

**Теорема 3.1.2.** Пусть  $M^m \subset N^n$  — компактное ориентированное подмногообразие без границы в параллелизуемом римановом многообразии  $N^n$ ,  $f$  — изометрия. Если  $f$  — минимально и устойчиво относительно функционала объёма, то все относительные характеристические классы пары  $M^m \subset N^n$  равны нулю.

**Доказательство.** Используем следующий результат работы [210]: в условиях теоремы отображение  $f$  минимально и устойчиво относительно функционала объёма тогда и только тогда, когда оно вполне геодезично. Теперь наше утверждение вытекает из теоремы 2.2.4.  $\square$

**Теорема 3.1.3.** Пусть  $M$  — трёхмерное многообразие с неотрицательной скалярной кривизной, а  $N$  — полная минимальная поверхность в  $M$ , устойчивая относительно вариаций с компактными носителями и не диффеоморфная сфере. Тогда все относительные характеристические классы пары  $N \subset M$  равны нулю. Если тензор Риччи многообразия  $M$  неотрицательно определён, то все относительные характеристические классы пары  $N \subset M$  равны нулю.

**Доказательство.** Согласно [223] из предположений теоремы вытекает, что  $N$  — вполне геодезическое подмногообразие. Тогда наше утверждение следует из теоремы 2.2.4.  $\square$

**Теорема 3.1.4.** Пусть  $C_1, C_2$  — две окружности, лежащие в параллельных плоскостях в  $\mathbb{R}^3$  с общей осью симметрии. Если  $M$  — минимальная поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , гомеоморфная кольцу с границей  $C_1 \cup C_2$ , то все характеристические классы поверхности  $M$  равны нулю.

**Доказательство.** Классический результат Шиффмана утверждает, что  $M$  — поверхность вращения, т. е. катеноид. Для катеноида утверждение вытекает из соотношения  $f(M) \neq \mathbb{S}^2$ , где  $f: M \rightarrow \mathbb{S}^2$  — гауссово отображение катеноида  $M$ .  
Отображение

$$g: M \rightarrow G_2(\mathbb{R}^3)/H = G_2(\mathbb{R}^3), \quad H = \{e\},$$

гомотопно отображению в точку, и следовательно,  $g$  индуцирует тривиальное отображение в когомологиях.  $\square$

**Замечание.** Имеются примеры полных минимальных поверхностей  $M^m$  в  $\mathbb{R}^n$  для произвольного нечётного  $n$ , для которых все относительные характеристические классы равны нулю. Например, можно взять минимальные поверхности из [204].

## 3.2. Плоские симплектические связности на орбитах коприсоединённого представления трёхмерных групп Ли

### 3.2.1. Формулировка основной теоремы

Далее мы будем использовать обозначения работы [216]. Для трёхмерных алгебр Ли имеется классификация Бьянки (см. [74]). Естественно рассматри-

вать только неразложимые алгебры Ли, т. е. такие алгебры Ли, которые не распадаются в прямую сумму алгебр Ли меньшей размерности. В этом случае мы имеем 9 типов трёхмерных алгебр Ли  $A_{3,1}, \dots, A_{3,9}$ , причём имеются два однопараметрических семейства  $A_{3,5}^a$ ,  $0 < |a| < 1$ , и  $A_{3,7}^a$ ,  $|a| > 0$ .

Справедливо следующее очевидное утверждение.

**Лемма 3.2.1.** *Индекс  $\text{ind } A_{3,j}$  любой алгебры Ли  $A_{3,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 9$ , равен 1.*

Итак, все орбиты общего положения коприсоединённого представления групп Ли, отвечающих алгебрам  $A_{3,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 9$ , являются двумерными поверхностями. Следовательно, любая гамильтонова система  $\dot{x} = \text{sgrad } H_x$  на указанных орбитах является вполне интегрируемой. Торы Лиувилля, являющиеся окружностями, расположены на линии уровня  $\{x \mid H(x) = \text{const}\}$  гамильтониана  $H$ .

Таким образом, в случае трёхмерных алгебр Ли нет проблемы, связанной с интегрируемостью уравнения  $\dot{x} = \text{sgrad } H_x$  на орбитах коприсоединённого представления. Наша задача — показать, что хотя бы для одного гамильтониана  $H$  торы Лиувилля на орбитах общего положения коприсоединённого представления имеют нетривиальные обобщённые классы Маслова.

Введём следующие обозначения. Алгебра Ли  $G = A_{3,j}$  имеет базис  $e_1, e_2, e_3$ , и произвольный элемент  $x \in G$  имеет вид  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ . В сопряжённом пространстве  $G^*$  рассмотрим дуальный базис  $e^1, e^2, e^3$ , т. е.  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Произвольный линейный функционал  $f \in G^*$  имеет вид  $f = f_1 e^1 + f_2 e^2 + f_3 e^3$ .

**Теорема 3.2.2.** *На всех орбитах общего положения коприсоединённого представления трёхмерных групп Ли имеется плоская симплектическая связность, обобщённые классы Маслова по отношению к которой нетривиальны, за исключением группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{3,9}$ .*

### 3.2.2. Доказательство основной теоремы

Доказательство будет получено перебором всех девяти случаев.

**Алгебра Ли  $A_{3,1}$ .** В алгебре Ли  $G = A_{3,1}$  имеется один ненулевой коммутатор  $[e_2, e_3] = e_1$  базисных векторов. Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один инвариант  $e_1$ . Ясно, что орбитами коприсоединённого представления служат плоскости, задаваемые уравнениями  $f_1 = \text{const} \neq 0$ , а плоскость  $f_1 = 0$  состоит из орбит, являющихся точками.

**Лемма 3.2.3.** *Каноническая форма  $\omega$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 = \text{const} \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{3,1}$ , равна*

$$\omega = \frac{df_2 \wedge df_3}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Функции  $p = f_2/f_1$ ,  $q = f_3$  после ограничения на орбиту  $\mathcal{O}(f)$  дают там канонические координаты, т. е.  $\omega = dp \wedge dq$ . В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями

$\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что

$$\mathrm{ad}_x^* f = (0, x_3 f_1, -x_2 f_1).$$

Отсюда вытекает, что каноническая форма

$$\omega(X, Y) = \omega(\mathrm{ad}_x^* f, \mathrm{ad}_y^* f) = f([x, y])$$

имеет вид, указанный в лемме. Функция  $f_2^2 + f_3^2$  после ограничения на орбиту  $\mathcal{O}(f)$  в координатах  $p, q$  имеет вид  $f_1^2 p^2 + q^2$ , где  $f_1^2 = \text{const}$ . Отсюда и следует утверждение о нетривиальности обобщённых классов Маслова на орбите  $\mathcal{O}(f)$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{3,2}$ .** Алгебра Ли  $A_{3,2}$  имеет ненулевые коммутаторы базисных векторов  $[e_1, e_3] = e_1$ ,  $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$ , поэтому существует единственный инвариант  $I = f_1 \exp[-f_2/f_1]$ , через который любой другой инвариант функционально выражается.

**Лемма 3.2.4.** Каноническая форма  $\omega$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\mathrm{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{3,2}$ , равна

$$\omega = \left. \frac{df_1 \wedge df_3}{f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Функции  $u_1 = \ln|f_1|$ ,  $u_2 = f_3$  или  $p = f_1$ ,  $q = f_3/f_1$  являются глобальными каноническими координатами на орбитах общего положения. В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \mathrm{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \left( -\frac{X_3}{f_1}, 0, \frac{X_1}{f_1} \right),$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция  $F(f_1, f_2, f_3) = f_1^2 + f_3^2/f_1^2$  на  $A_{3,2}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{3,3}$ .** Алгебра Ли  $A_{3,3}$  имеет ненулевые коммутаторы базисных векторов  $[e_1, e_3] = e_1$ ,  $[e_2, e_3] = e_2$ , поэтому существует единственный инвариант  $I = -f_2/f_1$  коприсоединённого представления, через который любой другой инвариант функционально выражается.

**Лемма 3.2.5.** Каноническая форма  $\omega$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\mathrm{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре

Ли  $A_{3,3}$ , равна

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_3}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Функции  $u_1 = \ln|f_1|$ ,  $u_2 = f_3$  или  $p = f_1$ ,  $q = f_3/f_1$  являются глобальными каноническими координатами на орбитах общего положения коприсоединённого представления. В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \left( -\frac{X_3}{f_1}, 0, \frac{X_1}{f_1} \right),$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция  $F(f_1, f_2, f_3) = f_1^2 + f_3^2/f_1^2$  на  $A_{3,3}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум, так как функция  $F$  после ограничения на орбиту  $\mathcal{O}(f)$  имеет вид  $p^2 + q^2$  в координатах  $p, q$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{3,4}$ .** Алгебра Ли  $A_{3,4}$  имеет ненулевые коммутаторы базисных векторов  $[e_1, e_3] = e_1$ ,  $[e_2, e_3] = -e_2$ , поэтому существует единственный инвариант  $I = f_1 f_2$  коприсоединённого представления, через который любой другой инвариант функционально выражается.

**Лемма 3.2.6.** Каноническая форма  $\omega$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{3,4}$ , равна

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_3}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Функции  $u_1 = \ln|f_1|$ ,  $u_2 = f_3$  или  $p = f_1$ ,  $q = f_3/f_1$  являются глобальными каноническими координатами на орбитах общего положения коприсоединённого представления. В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \left( -\frac{X_3}{f_1}, 0, \frac{X_1}{f_1} \right),$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция  $F(f_1, f_2, f_3) = f_1^2 + f_3^2/f_1^2$  на  $A_{3,4}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум, так как функция  $F$  после ограничения на орбиту  $\mathcal{O}(f)$  имеет вид  $p^2 + q^2$  в координатах  $p, q$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{3,5}^a$ .** Алгебра Ли  $A_{3,5}^a$  имеет ненулевые коммутаторы базисных векторов  $[e_1, e_3] = e_1$ ,  $[e_2, e_3] = ae_2$ ,  $0 < |a| < 1$ , поэтому существует единственный инвариант  $I = f_2 f_1^{-a}$  коприсоединённого представления, через который любой другой инвариант функционально выражается.

**Лемма 3.2.7.** Каноническая форма  $\omega$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{3,5}^a$ , равна

$$\omega = \left. \frac{df_1 \wedge df_3}{f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Функции  $u_1 = \ln |f_1|$ ,  $u_2 = f_3$  или  $p = f_1$ ,  $q = f_3/f_1$  являются глобальными каноническими координатами на орбитах общего положения коприсоединённого представления. В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \left( -\frac{X_3}{f_1}, 0, \frac{X_1}{f_1} \right),$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция  $F(f_1, f_2, f_3) = f_1^2 + f_3^2/f_1^2$  на  $(A_{3,5}^a)^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум, так как функция  $F$  после ограничения на орбиту  $\mathcal{O}(f)$  имеет вид  $p^2 + q^2$  в координатах  $p, q$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{3,6}$ .** Алгебра Ли  $A_{3,6}$  имеет ненулевые коммутаторы базисных векторов  $[e_1, e_3] = -e_2$ ,  $[e_2, e_3] = e_1$ , поэтому существует единственный инвариант  $I = f_1^2 + f_2^2$  коприсоединённого представления, через который любой другой инвариант функционально выражается.

Очевидно, что  $A_{3,6}$  — это алгебра Ли группы  $E(2)$  движений евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Орбиты общего положения коприсоединённого представления — цилиндры над окружностями  $f_1^2 + f_2^2 = R^2 = \text{const}$  ( $R \neq 0$ ).

Пусть  $(f_3, \varphi, r)$  — цилиндрическая система координат в пространстве  $A_{3,6}^*$ , где  $\varphi$  — угол между осью  $f_1$  и проекцией точки  $f$  на координатную плоскость  $(f_1, f_2)$ .

**Лемма 3.2.8.** Каноническая форма  $\omega$  на орбите  $f_1^2 + f_2^2 = R^2 = \text{const}$ ,  $R \neq 0$  (т. е.  $\mathcal{O}(f)$ ) общего положения коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{3,6}$ , равна

$$\omega = d\varphi \wedge df_3|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Функции  $u_1 = \varphi$ ,  $u_2 = f_3$  являются глобальными каноническими координатами на орбитах общего положения  $f_1^2 + f_2^2 = R^2 = \text{const}$  ( $R \neq 0$ ) коприсоединённого представления, и каноническая форма на орбите  $\mathcal{O}(f)$  пропорциональна форме

площади агеа, т. е.  $\omega = R^{-1}\text{агеа}$ . В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Орбита  $\mathcal{O}(f)$  покрывается двумя картами  $u_1 = \{f_1 \neq 0\}$ ,  $u_2 = \{f_2 \neq 0\}$ .

В карте  $u_1$  в качестве координат можно взять  $(f_2, f_3)$ , а в карте  $u_2 - (f_1, f_3)$ . Простые вычисления показывают, что если  $f_1 \neq 0$  и  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \left(0, -\frac{X_3}{f_1}, \frac{X_2}{f_1}\right),$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  примет вид

$$\omega = \frac{df_2 \wedge df_3}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Поскольку  $f_1 = \pm \sqrt{R^2 - f_2^2}$  в карте  $u_1$ , то на орбите  $\mathcal{O}(f)$  имеем равенства

$$\frac{df_2}{f_1} = \pm \frac{df_2}{\sqrt{R^2 - f_2^2}} = d\left(\pm \int \frac{df_2}{\sqrt{R^2 - f_2^2}}\right) = \pm d\left(\arcsin \frac{f_2}{R}\right) = \pm d\varphi.$$

Аналогично поступаем и во второй карте  $u_2$ . Функция  $F(f_1, f_2, f_3) = (f_1^2 + f_3^2)/f_2$  на  $A_{3,6}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{3,7}^a$  ( $a > 0$ ).** Алгебра Ли  $A_{3,7}^a$  ( $a > 0$ ) имеет ненулевые коммутаторы базисных векторов  $[e_1, e_3] = ae_1 - e_2$ ,  $[e_2, e_3] = e_1 + ae_2$ , поэтому существует единственный инвариант

$$I = (f_1^2 + f_2^2) \left[ \frac{f_1 + if_2}{f_1 - if_2} \right]^{ia}$$

коприсоединённого представления, через который любой другой инвариант функционально выражается.

Орбиты общего положения коприсоединённого представления — цилиндры над кривыми, которые в полярных координатах  $(r, \varphi)$  в плоскости  $(f_1, f_2)$  задаются уравнениями  $r \exp(-a\varphi) = \text{const}$ , т. е. спиралями.

**Лемма 3.2.9.** Каноническая форма  $\omega$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $I \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{3,7}^a$ , равна

$$\omega = d\varphi \wedge df_3|_{\mathcal{O}(f)},$$

где  $(f_3, \varphi, r)$  — цилиндрическая система координат в пространстве  $(A_{3,7}^a)^*$ ,  $\varphi$  — угол между осью  $f_1$  и проекцией точки  $f$  на координатную плоскость  $(f_1, f_2)$ . Функции  $u_1 = \varphi$ ,  $u_2 = f_3$  являются глобальными каноническими координатами на орбитах общего положения коприсоединённого представления. Плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат

функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Надо рассмотреть два случая:

- а)  $af_1 - f_2 \neq 0$ ;
- б)  $f_1 + af_2 \neq 0$ .

Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \left( -\frac{X_3}{af_1 - f_2}, 0, \frac{X_1}{af_1 - f_2} \right).$$

Тогда легко убедиться, что

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_3}{af_1 - f_2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Далее, пусть

$$f_1 = r \cos \varphi = C \exp a\varphi \cos \varphi, \quad f_2 = r \sin \varphi = C \exp a\varphi \sin \varphi.$$

Тогда

$$\frac{df_1}{af_1 - f_2} = d\varphi,$$

что и утверждалось в случае а).

Аналогично рассматривается случай б).

Далее, функция

$$F(f_1, f_2, f_3) = 2(f_1^2 + f_2^2) + \sqrt{4(f_1^2 + f_2^2)^2 - 3(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)}$$

порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{3,8}$ .** Алгебра Ли  $A_{3,8}$  имеет ненулевые коммутаторы базисных векторов  $[e_1, e_3] = -2e_2$ ,  $[e_1, e_2] = e_1$ ,  $[e_2, e_3] = e_3$ , поэтому существует единственный инвариант  $I = f_2^2 + f_1 f_3$  коприсоединённого представления, через который любой другой инвариант функционально выражается.

Алгебра Ли  $A_{3,8}$  полупростая, она изоморфна алгебре Ли группы  $SU(1, 1)$ . Орбиты общего положения коприсоединённого представления описываются уравнением  $f_2^2 + f_1 f_3 = C$ ,  $C = \text{const}$ , т. е. это либо двуполостный гиперболоид (при  $C < 0$ ), либо однополостный гиперболоид (при  $C > 0$ ).

**Лемма 3.2.10.** Каноническая форма  $\omega$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_2^2 + f_1 f_3 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{3,8}$ , равна

$$\omega = \frac{f_1 df_1 \wedge df_2 + 2f_2 df_3 \wedge df_1 + f_3 df_2 \wedge df_3}{f_1^2 + 4f_2^2 + f_3^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Функции  $u_1 = a\varphi \operatorname{sh} \psi$ ,  $u_2 = \psi$  являются глобальными каноническими координатами на орбитах общего положения коприсоединённого представления, где

$$f_1 = a(\operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi) \operatorname{sh} \psi, \quad f_2 = a \operatorname{ch} \psi, \quad f_3 = a(-\operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi) \operatorname{sh} \psi.$$

В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в системе координат  $u_1, u_2$  функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \operatorname{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x_1 = \frac{-f_1 X_2 + 2f_2 X_3}{f_1^2 + 4f_2^2 + f_3^2}, \quad x_2 = \frac{f_1 X_1 - f_3 X_3}{f_1^2 + 4f_2^2 + f_3^2}, \quad x_3 = \frac{-2f_1 X_1 + f_3 X_2}{f_1^2 + 4f_2^2 + f_3^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3)$ . Здесь предполагается, что

$$f_3 X_1 + 2f_2 X_2 + f_1 X_3 = 0.$$

Это соотношение на орбите выполнено автоматически. Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

Функция  $F(f_1, f_2, f_3) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$  на  $A_{3,8}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум на всех односвязных орбитах.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{3,9}$ .** Алгебра Ли  $A_{3,9}$  имеет ненулевые коммутаторы базисных векторов  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_3, e_1] = e_2$ . Эта алгебра Ли, очевидно, изоморфна алгебре Ли группы Ли  $SU(2)$  и, следовательно, полупростая. Коприсоединённое представление этой группы Ли имеет один функционально независимый инвариант  $I = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$ . Орбиты общего положения коприсоединённого представления — сферы  $I = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = R^2 \neq 0$ .

**Лемма 3.2.11.** Каноническая форма  $\omega$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = R^2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\operatorname{Ad}^*$  группы Ли  $SU(2)$ , отвечающей алгебре Ли  $A_{3,9}$ , равна

$$\omega = \left. \frac{f_1 df_2 \wedge df_3 + f_2 df_3 \wedge df_1 + f_3 df_1 \wedge df_2}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \right|_{\mathcal{O}(f)}$$

и пропорциональна форме площади  $\operatorname{area}$ , т. е.  $\omega = R^{-1} \operatorname{area}$ .

Если  $\varphi, \psi$  — сферические координаты на орбите  $\mathcal{O}(f)$  радиуса  $R$ , то  $u_1 = R\psi \cos \varphi$ ,  $u_2 = \varphi$  — координаты Дарбу, где  $f_1 = R \cos \varphi \cos \psi$ ,  $f_2 = R \cos \varphi \sin \psi$ ,  $f_3 = R \sin \varphi$ .

**Замечание.** На сфере  $\mathcal{O}(f)$  не существует плоской связности, поэтому нет задачи о построении плоской симплектической связности, необходимой для построения обобщённых классов Маслова.

С другой стороны, если  $H$  — гамильтониан, заданный на орбите  $\mathcal{O}(f)$ , то, выбрасывая его критические точки, мы можем поставить такую задачу на дополнении к критическим точкам. Так, например, линейная функция  $f_3$  на  $A_{3,9}^*$

порождает потоки на открытых всюду плотных подмножествах в двумерных орбитах  $\mathcal{O}(f)$ , являющихся дополнениями к критическим точкам функции  $f_3$  в  $\mathcal{O}(f)$ , все траектории которых замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.

**Доказательство леммы 3.2.11.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{1}{|f|^2} [X, f],$$

где  $[X, f]$  — обычное векторное произведение. Здесь предполагается, что  $f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 = 0$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. После замены переменных, также указанной в лемме, мы получим, что

$$du_1 \wedge du_2 = R \cos \varphi \, d\psi \wedge d\varphi,$$

что и требовалось.  $\square$

### 3.3. Плоские симплектические связности на орбитах коприсоединённого представления четырёхмерных групп Ли

#### 3.3.1. Формулировка основной теоремы

Для четырёхмерных алгебр Ли имеется полная классификация. При этом естественно рассматривать только неразложимые алгебры Ли, т. е. такие алгебры Ли, которые не распадаются в прямую сумму алгебр Ли меньшей размерности. В этом случае имеем 12 типов четырёхмерных алгебр Ли  $A_{4,1}, \dots, A_{4,12}$ , причём среди них имеются три однопараметрические серии  $A_{4,2}^a$  ( $a \neq 0$ ),  $A_{4,9}^b$  ( $-1 < b \leq 1$ ),  $A_{4,11}^a$  ( $a > 0$ ) и две двухпараметрические серии  $A_{4,5}^{ab}$  ( $ab \neq 0$ ,  $-1 \leq a \leq b \leq 1$ ),  $A_4^{ab}$  ( $a \neq 0$ ,  $b \geq 0$ ). Все четырёхмерные алгебры Ли разрешимы, а одна из них ( $A_{4,1}$ ) нильпотентна.

Если четырёхмерная алгебра Ли  $G$  имеет инвариант, то  $\text{ind } G = 2$  и, следовательно, размерность орбиты равна двум. Тем самым в этом случае нет проблемы, связанной с интегрируемостью уравнения Эйлера  $\dot{x} = \text{sgrad } H_x$ .

Наша цель — показать, что в этом случае обобщённый индекс Маслова на двумерных орбитах нетривиален, т. е. по крайней мере для одного гамильтониана  $H$  тора Лиувилля (окружность  $\mathbf{S}^1$ ) на орбитах общего положения имеют нетривиальные обобщённые классы Маслова.

Если коприсоединённое представление соответствующей группы Ли не имеет инвариантов, то мы получаем две задачи:

- вопрос о полной интегрируемости уравнений Эйлера  $\dot{x} = \text{sgrad } H_x$ ;
- вычисление индексов соответствующих торов Лиувилля.

Введём следующие обозначения. Алгебра Ли  $G = A_{4,j}$  имеет базис  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , и произвольный элемент  $x \in G$  имеет вид  $x = \sum_{i=1}^4 x_i e_i$ . В сопряжённом пространстве  $G^*$  рассмотрим дуальный базис  $e^1, e^2, e^3, e^4$ , т. е.  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$ . Произвольный линейный функционал  $f \in G^*$  имеет вид  $f = \sum_{i=1}^4 f_i e^i$ . Орбиту, проходящую через  $f \in G^*$ , для коприсоединённого представления группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $G$ , обозначим через  $\mathcal{O}(f) \subset G^*$ .

**Теорема 3.3.1.** *На всех орбитах общего положения коприсоединённого представления четырёхмерных групп Ли имеется плоская симплектическая связность, обобщённые классы Маслова по отношению к которой нетривиальны.*

### 3.3.2. Доказательство основной теоремы

**Алгебра Ли  $A_{4,1}$ .** В нильпотентной алгебре Ли  $A_{4,1}$  имеются два ненулевых коммутатора  $[e_2, e_4] = e_1$ ,  $[e_3, e_4] = e_2$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1, \quad I_2 = f_2^2 - 2f_1 f_3,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты коприсоединённого представления задаются уравнениями  $f_1 = C_1$ ,  $f_2^2 - 2f_1 f_3 = C_2$ .

**Лемма 3.3.2.** *Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,1}$ , в координатах  $f_2, f_4$  равна*

$$\omega = \left. \frac{df_2 \wedge df_4}{f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять  $u_1 = f_2/f_1$ ,  $u_2 = f_4$ . В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -X_4, 0, X_2)}{f_1}.$$

Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_4^2 + \frac{f_2^2}{f_1^2}$$

на  $A_{4,1}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум, так как линии

уровня функции  $F$  на орбите гомеоморфны окружностям  $u_1^2 + u_2^2 = \text{const}$ , что и доказывает утверждение.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,2}^a$ ,  $a \neq 0$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,2}^a$ ,  $a \neq 0$ , имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_4] = ae_1$ ,  $[e_2, e_4] = e_2$ ,  $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_2 \exp \left[ -\frac{f_3}{f_2} \right], \quad I_2 = \frac{f_2^a}{f_1},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_2 \exp \left[ -\frac{f_3}{f_2} \right] = C_1, \quad \frac{f_2^a}{f_1} = C_2.$$

**Лемма 3.3.3.** Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,2}^a$ , в координатах  $f_1, f_4$  равна

$$\omega = df_1 \wedge df_4|_{\mathcal{O}(f)},$$

т. е. обобщённый индекс Маслова совпадает с классическим индексом.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_4, 0, 0, X_1)}{af_1}.$$

Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция  $f_1^2 + f_4^2$  на  $(A_{4,2}^a)^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,3}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,3}$  имеются два ненулевых коммутатора  $[e_1, e_4] = e_1$ ,  $[e_3, e_4] = e_2$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1 \exp \left( -\frac{f_3}{f_2} \right), \quad I_2 = f_2,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 \exp \left( -\frac{f_3}{f_2} \right) = C_1, \quad f_2 = C_2.$$

**Лемма 3.3.4.** Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,3}$ , в координатах  $f_1, f_4$  равна

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_4}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции  $u_1 = \ln|f_1|$ ,  $u_2 = f_4$  или  $p = f_1$ ,  $q = f_4/f_1$ . В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_4, 0, 0, X_1)}{f_1},$$

где, как и прежде,  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_4^2}{f_1^2}$$

на  $A_{4,3}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум, так как линии уровня функции  $F$  на орбите совпадают с окружностями  $p^2 + q^2 = \text{const}$ , индексы которых равны 2.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,4}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,4}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_4] = e_1$ ,  $[e_2, e_4] = e_1 + e_2$ ,  $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1 \exp\left(-\frac{f_2}{f_1}\right), \quad I_2 = \frac{2f_1 f_3 - f_2^2}{f_1^2},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 \exp\left(-\frac{f_2}{f_1}\right) = C_1, \quad \frac{2f_1 f_3 - f_2^2}{f_1^2} = C_2.$$

**Лемма 3.3.5.** Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,4}$ , в координатах  $f_1$ ,  $f_4$  равна

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_4}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции  $u_1 = \ln|f_1|$ ,  $u_2 = f_4$  или  $p = f_1$ ,  $q = f_4/f_1$ . В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_4, 0, 0, X_1)}{f_1},$$

где, как и прежде,  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_4^2}{f_1^2}$$

на  $A_{4,4}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,5}^{ab}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,5}^{ab}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_4] = e_1$ ,  $[e_2, e_4] = ae_2$ ,  $[e_3, e_4] = be_3$ ,  $ab \neq 0$ ,  $-1 \leq a \leq b \leq 1$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = \frac{f_1^a}{f_2}, \quad I_2 = \frac{f_1^b}{f_3},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$\frac{f_1^a}{f_2} = C_1, \quad \frac{f_1^b}{f_3} = C_2.$$

**Лемма 3.3.6.** Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,5}^{ab}$ , в координатах  $f_1, f_4$  равна

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_4}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции  $u_1 = \ln|f_1|$ ,  $u_2 = f_4$  или  $p = f_1$ ,  $q = f_4/f_1$ . В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_4, 0, 0, X_1)}{f_1},$$

где, как и прежде,  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_4^2}{f_1^2}$$

или функция

$$G = \ln^2 f_1 + f_4^2$$

на  $(A_{4,5}^{ab})^*$  порождают на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум, так как линии уровня функции  $F$  на орбите гомеоморфны окружностям  $p^2 + q^2 = \text{const}$ , а для функции  $G$  гомеоморфны окружностям  $u_1^2 + u_2^2 = \text{const}$ , которые имеют индексы, равные 2.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,6}^{ab}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,6}^{ab}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_4] = ae_1$ ,  $[e_2, e_4] = be_2 - e_3$ ,  $[e_3, e_4] = e_2 + be_3$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \geq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = \frac{f_1^{2b/a}}{f_2^2 + f_3^2}, \quad I_2 = (f_2^2 + f_3^2) \left( \frac{f_2 + if_3}{f_2 - if_3} \right)^{ib},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$\frac{f_1^{2b/a}}{f_2^2 + f_3^2} = C_1, \quad r \exp(-b\varphi) = C_2,$$

где  $(r, \varphi)$  — полярная система координат в плоскости  $f_2, f_3$ .

**Лемма 3.3.7.** Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,6}^{ab}$ , в координатах  $f_1, f_4$  равна

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_4}{af_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$u_1 = \frac{1}{a} \ln |f_1|, \quad u_2 = f_4$$

или

$$p = f_1, \quad q = \frac{f_4}{af_1}.$$

В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_4, 0, 0, X_1)}{af_1},$$

где, как и прежде,  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_4^2}{a^2 f_1^2}$$

на  $(A_{4,6}^{ab})^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,7}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,7}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_4] = 2e_1$ ,  $[e_2, e_4] = e_2$ ,  $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление группы Ли не имеет инвариантов, т. е. орбита  $\mathcal{O}(f)$  общего положения — открытое всюду плотное множество в  $A_{4,7}^*$ .

**Лемма 3.3.8.** *Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,7}$ , в координатах  $f_1, \dots, f_4$  равна*

$$\omega = (2f_1)^{-2}[(f_2 + f_3)df_1 \wedge df_2 + f_1 df_1 \wedge df_4 + 2f_1 df_2 \wedge df_3 + f_2 df_3 \wedge df_1]|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_1, \quad q_2 = f_2$$

а также

$$p_1 = \frac{2f_2 f_3 - 2f_4 f_1 - f_2^2}{8f_1^2}, \quad p_2 = -\frac{f_3}{2f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-(f_2 + f_3)X_2 + f_2 X_3 - f_1 X_4, (f_2 + f_3)X_1 - 2f_1 X_3, 2f_1 X_2 - f_2 X_1, f_1 X_1)}{2f_1^2},$$

где, как и прежде,  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно, при этом учитывается явный вид формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,8}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,8}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_2, e_4] = e_2$ ,  $[e_3, e_4] = -e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1, \quad I_2 = f_2 f_3 - f_1 f_4,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 = C_1, \quad f_2 f_3 - f_1 f_4 = C_2.$$

**Лемма 3.3.9.** *Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,8}$ , в координатах  $f_2, f_3$  равна*

$$\omega = \left. \frac{df_2 \wedge df_3}{f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = f_3, \quad q = \frac{f_2}{f_1},$$

т. е.

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В случае алгебры Ли  $A_{4,8}$  обобщённый индекс Маслова на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления совпадает с классическим индексом Маслова на плоскости и, следовательно, тривиален (группа голономии тривиальна).

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -X_3, X_2, 0)}{f_1},$$

где, как и прежде,  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_3^2 + \frac{f_2^2}{f_1^2}$$

на  $A_{4,8}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,9}^b$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,9}^b$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_4] = (1+b)e_1$ ,  $[e_2, e_4] = e_2$ ,  $[e_3, e_4] = be_3$ ,  $-1 \leq b \leq 1$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление группы Ли не имеет инвариантов, т. е. орбита  $\mathcal{O}(f)$  общего положения — открытое всюду плотное множество в  $(A_{4,9}^b)^*$ .

**Лемма 3.3.10.** *Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,9}^b$ , в координатах  $f_1, \dots, f_4$  равна*

$$\omega = \left. \frac{bf_3 df_1 \wedge df_2 - f_2 df_1 \wedge df_3 + f_1 df_1 \wedge df_4 + (1+b)f_1 df_2 \wedge df_3}{(1+b)f_1^2} \right|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_1, \quad q_2 = f_2,$$

а также

$$p_1 = \frac{f_2 f_3 - f_4 f_1}{(1+b)f_1^2}, \quad p_2 = -\frac{f_3}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Пусть

$$T = \|c_{ij}^k f_k\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (1+b)f_1 \\ 0 & 0 & f_1 & f_2 \\ 0 & -f_1 & 0 & bf_3 \\ -(1+b)f_1 & -f_2 & -bf_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда форма  $\omega$  задаётся матрицей  $T^{-1}$ , т. е.

$$T^{-1} = -\frac{1}{(1+b)f_1^2} \begin{pmatrix} 0 & bf_3 & -f_2 & f_1 \\ -bf_3 & 0 & (1+b)f_1 & 0 \\ f_2 & -(1+b)f_1 & 0 & 0 \\ -f_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно, при этом учитывается явный вид формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,10}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,10}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_2, e_4] = -e_3$ ,  $[e_3, e_4] = e_2$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1, \quad I_2 = 2f_1 f_4 + f_2^2 + f_3^2,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 = C_1, \quad 2f_1 f_4 + f_2^2 + f_3^2 = C_2.$$

**Лемма 3.3.11.** Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,10}$ , в координатах  $f_2, f_3$  равна

$$\omega = \frac{df_2 \wedge df_3}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = f_3, \quad q = \frac{f_2}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В случае алгебры Ли  $A_{4,10}$  обобщённый индекс Маслова на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления совпадает с классическим индексом Маслова на плоскости и, следовательно, тривиален (группа голономии тривиальна).

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -X_3, X_2, 0)}{f_1},$$

где, как и прежде,  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_3^2 + \frac{f_2^2}{f_1^2}$$

на  $A_{4,10}^*$  порождают на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,11}^a$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,11}^a$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_4] = 2ae_1$ ,  $[e_2, e_4] = ae_2 - e_3$ ,  $[e_3, e_4] = e_2 + ae_3$ ,  $a > 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли не имеет инвариантов, т. е. орбита  $\mathcal{O}(f)$  общего положения — открытое всюду плотное множество в  $(A_{4,11}^a)^*$ .

**Лемма 3.3.12.** Каноническая симплектическая форма на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,11}^a$ , в координатах  $f_1, \dots, f_4$  равна

$$\omega = (2af_1^2)^{-1} \times \\ \times [(f_2 + af_3)df_1 \wedge df_2 - (af_2 - f_3)df_1 \wedge df_3 + f_1df_1 \wedge df_4 + 2af_1df_2 \wedge df_3]|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_1, \quad q_2 = f_2,$$

а также

$$p_1 = \frac{2af_2f_3 - f_2^2 - f_3^2 - 2f_1f_4}{4af_1^2}, \quad p_2 = -\frac{f_3}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Пусть

$$T = \|c_{ij}^k f_k\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2af_1 \\ 0 & 0 & f_1 & af_1 - f_3 \\ 0 & -f_1 & 0 & f_2 + af_3 \\ -2af_1 & -(af_2 - f_3) & -(f_2 + af_3) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда форма  $\omega$  задаётся матрицей  $T^{-1}$ , т. е.

$$T^{-1} = -\frac{1}{2f_1^2} \begin{pmatrix} 0 & f_2 + af_3 & -(af_2 - f_3) & f_1 \\ -(f_2 + af_3) & 0 & 2af_1 & 0 \\ af_2 - f_3 & -2af_1 & 0 & 0 \\ -f_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно, используя явный вид формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{4,12}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{4,12}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_3] = e_1$ ,  $[e_2, e_3] = e_2$ ,  $[e_1, e_4] = -e_2$ ,  $[e_2, e_4] = e_1$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли не имеет инвариантов, т. е. орбита  $\mathcal{O}(f)$  общего положения — открытое всюду плотное множество в  $A_{4,12}^*$ .

**Лемма 3.3.13.** *Каноническая симплектическая форма на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{4,12}$ , в координатах  $f_1, \dots, f_4$  равна*

$$\omega = (f_1^2 + f_2^2)^{-1} [-f_1 df_1 \wedge df_3 + f_2 df_1 \wedge df_4 - f_2 df_2 \wedge df_3 - f_1 df_2 \wedge df_4]_{|\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_4,$$

а также

$$p_1 = -\frac{1}{2} \ln(f_1^2 + f_2^2), \quad p_2 = -\arctg\left(\frac{f_1}{f_2}\right).$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Пусть

$$T = \|c_{ij}^k f_k\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_1 & -f_2 \\ 0 & 0 & f_2 & f_1 \\ -f_1 & -f_2 & 0 & 0 \\ f_2 & -f_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда форма  $\omega$  задаётся матрицей  $T^{-1}$ , т. е.

$$T^{-1} = -\frac{1}{f_1^2 + f_2^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f_1 & f_2 \\ 0 & 0 & -f_2 & -f_1 \\ f_1 & f_2 & 0 & 0 \\ -f_2 & f_1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно, при этом учитывается явный вид формы  $\omega$ .  $\square$

### 3.4. Плоские симплектические связности на орбитах коприсоединённого представления пятимерных групп Ли

#### 3.4.1. Формулировка основной теоремы

Для пятимерных алгебр Ли имеется полная классификация. Естественно рассматривать только неразложимые алгебры Ли, т. е. такие алгебры Ли, которые не распадаются в прямую сумму алгебр Ли меньшей размерности. В этом случае мы имеем 40 типов пятимерных алгебр Ли  $A_{5,1}, \dots, A_{5,40}$ , среди них 11 однопараметрических серий, 6 двухпараметрических серий, 3 трёхпараметрические серии. Алгебры Ли  $A_{5,1}, \dots, A_{5,39}$  — разрешимые алгебры Ли, причём  $A_{5,1}, \dots, A_{5,6}$  — нильпотентные алгебры Ли, а  $A_{5,40}$  является полупрямой суммой алгебры Ли группы Ли  $SU(2)$  и  $\mathbb{R}^2$  по некоторому представлению.

Если пятимерная алгебра Ли  $G$  имеет три независимых инварианта, т. е.  $\text{ind } G = 3$ , то размерность орбиты общего положения равна 2. В этом случае нет проблем, связанных с интегрируемостью уравнения Эйлера  $\dot{x} = \text{sgrad } H_x$ .

Наша цель — показать, что в этом случае обобщённый индекс Маслова на двумерных орбитах нетривиален, т. е. по крайней мере для одного гамильтониана  $H$  тора Лиувилля (окружность  $S^1$ ) на орбитах общего положения имеют нетривиальные обобщённые классы Маслова.

Если коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один инвариант, т. е.  $\text{ind } G = 1$ , то размерность орбиты общего положения равна 4. В этой ситуации мы имеем две задачи:

- а) вопрос о полной интегрируемости уравнений Эйлера  $\dot{x} = \text{sgrad } H_x$ ;
- б) вычисление индексов соответствующих торов Лиувилля.

Введём следующие обозначения, которые будем использовать на протяжении всего данного подраздела. Алгебра Ли  $G = A_{5,j}$ ,  $j = 1, \dots, 40$ , имеет базис  $e_1, \dots, e_5$ , и произвольный элемент  $x \in G$  имеет вид  $x = \sum_{i=1}^5 x_i e_i$ . В сопряжённом пространстве  $G^*$  рассмотрим дуальный базис  $e^1, \dots, e^5$ , т. е.  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ ,  $i, j = 1, \dots, 5$ . Произвольный линейный функционал  $f \in G^*$  имеет вид

$f = \sum_{i=1}^5 f_i e^i$ . Орбиту, проходящую через ковектор  $f \in G^*$  для коприсоединённого представления группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $G$ , обозначим через  $\mathcal{O}(f) \subset G^*$ .

**Теорема 3.4.1.** *На всех орбитах общего положения коприсоединённого представления пятимерных групп Ли имеется плоская симплектическая связность, обобщённые классы Маслова по отношению к которой нетривиальны.*

### 3.4.2. Доказательство основной теоремы

Доказательство будет получено перебором всех 40 случаев.

**Алгебра Ли  $A_{5,1}$ .** В нильпотентной алгебре Ли  $A_{5,1}$  имеются два ненулевых коммутатора  $[e_3, e_5] = e_1$ ,  $[e_4, e_5] = e_2$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1, \quad I_2 = f_2, \quad I_3 = f_2 f_3 - f_1 f_4,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad f_2 f_3 - f_1 f_4 = C_3,$$

следовательно, они двумерные.

**Лемма 3.4.2.** *Каноническая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,1}$ , в координатах  $f_3, f_5$  равна*

$$\omega = \left. \frac{df_3 \wedge df_5}{f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = \frac{f_3}{f_1}, \quad q = f_5,$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, 0, -X_5, 0, X_3)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_5^2 + \frac{f_3^2}{f_1^2}$$

на  $A_{5,1}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,2}$ .** В нильпотентной алгебре Ли  $A_{5,2}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_2, e_5] = e_1$ ,  $[e_3, e_5] = e_2$ ,  $[e_4, e_5] = e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1, \quad I_2 = f_2^2 - 2f_1f_3, \quad I_3 = f_2^3 + 3f_1^2f_4 - 3f_1f_2f_3,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 = C_1, \quad f_2^2 - 2f_1f_3 = C_2, \quad f_2^3 + 3f_1^2f_4 - 3f_1f_2f_3 = C_3,$$

следовательно, они двумерные.

**Лемма 3.4.3.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,2}$ , в координатах  $f_2, f_5$  равна

$$\omega = \frac{df_2 \wedge df_5}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = \frac{f_2}{f_1}, \quad q = f_5,$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -X_5, 0, 0, X_2)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_5^2 + \frac{f_2^2}{f_1^2}$$

на  $A_{5,2}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум. Действительно, линии уровня функции  $F$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  гомеоморфны окружностям  $p^2 + q^2 = \text{const}$ , индексы Маслова которых равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,3}$ .** В нильпотентной алгебре Ли  $A_{5,3}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_3, e_4] = e_2$ ,  $[e_3, e_5] = e_1$ ,  $[e_4, e_5] = e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1, \quad I_2 = f_2, \quad I_3 = f_3^2 + 2f_2f_5 - 2f_1f_4,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 = C_1, \quad f_2 = C_2, \quad f_3^2 + 2f_2f_5 - 2f_1f_4 = C_3,$$

следовательно, они двумерные.

**Лемма 3.4.4.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения  $(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2 \neq 0$  коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,3}$ , равна

$$\omega = \frac{f_3 df_4 \wedge df_5 + f_1 df_3 \wedge df_5 + f_2 df_3 \wedge df_4}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  при  $f_1 \neq 0$  можно взять функции

$$p = \frac{1}{C_1 \sqrt{C_1 + C_2^2}} \arctg \frac{f_3}{\sqrt{C_1 + C_2^2}}, \quad q = f_5,$$

а при  $f_2 \neq 0$  — функции

$$p = \frac{1}{C_2 \sqrt{C_1 + C_2^2}} \arctg \frac{f_3}{\sqrt{C_1 + C_2^2}}, \quad q = f_5.$$

В частности, плоская связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \left( 0, 0, \frac{-f_1 X_5 - f_2 X_4}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \frac{-f_3 X_5 + f_2 X_3}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \frac{f_3 X_4 + f_1 X_3}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \right),$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ , причём  $f_3 X_3 - f_1 X_4 + f_2 X_5 = 0$ , что на орбите  $\mathcal{O}(f)$  выполняется автоматически. Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Для нахождения канонических координат надо рассмотреть два типа орбит:

- а)  $f_1 \neq 0$ ;
- б)  $f_2 \neq 0$ .

Поскольку  $f_1$  и  $f_2$  — инварианты, это корректно.

Функция  $F = p^2 + q^2$  на  $A_{5,3}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,4}$ .** В нильпотентной алгебре Ли  $A_{5,4}$  имеются два ненулевых коммутатора  $[e_2, e_4] = e_1$ ,  $[e_3, e_5] = e_1$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один инвариант  $I_1 = f_1$ , через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнением  $f_1 = C_1$ .

**Лемма 3.4.5.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,4}$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  равна

$$\omega = \left. \frac{df_2 \wedge df_4 + df_3 \wedge df_5}{f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_5, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_3}{f_1},$$

и тогда

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -X_4, -X_5, X_2, X_3)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется, при этом учитывается явный вид формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,5}$ .** В нильпотентной алгебре Ли  $A_{5,5}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_3, e_4] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_1$ ,  $[e_3, e_5] = e_2$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один инвариант  $I_1 = f_1$ , через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнением  $f_1 = C_1$ .

**Лемма 3.4.6.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,5}$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  равна

$$\omega = \frac{f_2 df_3 \wedge df_2 + f_1 df_2 \wedge df_5}{f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_2, \quad q_2 = f_5, \quad p_1 = \frac{f_2 f_3}{f_1^2}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_1},$$

и тогда

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, f_2 X_3 - f_1 X_5, -f_1 X_3, f_1 X_3 - f_2 X_2, f_1 X_2)}{f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,6}$ .** В нильпотентной алгебре Ли  $A_{5,6}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_3, e_4] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_1$ ,  $[e_3, e_5] = e_2$ ,  $[e_4, e_5] = e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один инвариант  $I_1 = f_1$ , через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнением  $f_1 = C_1$ .

**Лемма 3.4.7.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,6}$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  равна

$$\omega = \frac{f_3 df_2 \wedge df_3 + f_1 df_3 \wedge df_4 + f_2 df_4 \wedge df_2 + f_1 df_2 \wedge df_5}{f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_2, \quad p_1 = \frac{f_2 f_3 - f_1 f_4}{f_1^2}, \quad p_2 = \frac{f_2 f_4 - f_5 f_1}{f_1^2},$$

и тогда

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, f_2 X_4 - f_3 X_3 - f_1 X_5, f_3 X_2 - f_1 X_4, f_1 X_3 - f_2 X_2, f_1 X_2)}{f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,7}^{abc}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,7}^{abc}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = ae_2$ ,  $[e_3, e_5] = be_3$ ,  $[e_4, e_5] = ce_4$ ,  $abc \neq 0$ ,  $-1 \leq c \leq b \leq a \leq 1$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = \frac{f_1^a}{f_2}, \quad I_2 = \frac{f_1^b}{f_3}, \quad I_3 = \frac{f_1^c}{f_4},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$\frac{f_1^a}{f_2} = C_1, \quad \frac{f_1^b}{f_3} = C_2, \quad \frac{f_1^c}{f_4} = C_3,$$

следовательно, орбиты — двумерные поверхности.

**Лемма 3.4.8.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,7}^{abc}$ , в координатах  $f_1, f_5$  равна

$$\omega = \left. \frac{df_1 \wedge df_5}{f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = f_1, \quad q = \frac{f_5}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, 0, 0, X_1)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_5^2}{f_1^2}$$

на  $(A_{5,7}^{abc})^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,8}^c$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,8}^c$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_2, e_5] = e_1$ ,  $[e_3, e_5] = e_3$ ,  $[e_4, e_5] = ce_4$ ,  $0 < |c| \leq 1$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1, \quad I_2 = \frac{f_3^c}{f_4}, \quad I_3 = f_3 \exp \frac{-f_2}{f_1},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 = C_1, \quad \frac{f_3^c}{f_4} = C_2, \quad f_3 \exp \frac{-f_2}{f_1} = C_3.$$

**Лемма 3.4.9.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,8}^c$ , в координатах  $f_2, f_5$  равна

$$\omega = \left. \frac{df_2 \wedge df_5}{f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = \frac{f_2}{f_1}, \quad q = f_5,$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -X_5, 0, 0, X_2)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_5^2 + \frac{f_2^2}{f_1^2}$$

на  $(A_{5,8}^c)^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,9}^{bc}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,9}^{bc}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_1 + e_2$ ,  $[e_3, e_5] = be_3$ ,  $[e_4, e_5] = ce_4$ ,  $0 \neq c \leq b$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = \frac{f_1^b}{f_3}, \quad I_2 = \frac{f_1^c}{f_4}, \quad I_3 = f_1 \exp \frac{-f_2}{f_1},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$\frac{f_1^b}{f_3} = C_1, \quad \frac{f_1^c}{f_4} = C_2, \quad f_1 \exp \frac{-f_2}{f_1} = C_3.$$

**Лемма 3.4.10.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,9}^{bc}$ , в координатах  $f_1, f_5$  равна

$$\omega = \left. \frac{df_1 \wedge df_5}{f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = f_1, \quad q = \frac{f_5}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, 0, 0, X_1)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_5^2}{f_1^2}$$

на  $(A_{5,9}^{bc})^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,10}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,10}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_2, e_5] = e_1$ ,  $[e_3, e_5] = e_2$ ,  $[e_4, e_5] = e_4$  базисных векторов  $e_i$ ,

$i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1, \quad I_2 = f_2^2 - 2f_1f_3, \quad I_3 = f_4 \exp \frac{-f_2}{f_1},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 = C_1, \quad f_2^2 - 2f_1f_3 = C_2, \quad f_4 \exp \frac{-f_2}{f_1} = C_3.$$

**Лемма 3.4.11.** *Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,10}$ , в координатах  $f_2, f_5$  равна*

$$\omega = \frac{df_2 \wedge df_5}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = \frac{f_2}{f_1}, \quad q = f_5,$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -X_5, 0, 0, X_2)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_5^2 + \frac{f_2^2}{f_1^2}$$

на  $A_{5,10}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,11}^c$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,11}^c$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_1 + e_2$ ,  $[e_3, e_5] = e_2 + e_3$ ,  $[e_4, e_5] = ce_4$ ,  $c \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = \frac{f_1^c}{f_4}, \quad I_2 = f_1 \exp \frac{-f_2}{f_1}, \quad I_3 = \frac{2f_3}{f_1} - \frac{f_2^2}{f_1^2},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$\frac{f_1^c}{f_4} = C_1, \quad f_1 \exp \frac{-f_2}{f_1} = C_2, \quad \frac{2f_3}{f_1} - \frac{f_2^2}{f_1^2} = C_3.$$

**Лемма 3.4.12.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,11}^c$ , в координатах  $f_1, f_5$  равна

$$\omega = \left. \frac{df_1 \wedge df_5}{f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = f_1, \quad q = \frac{f_5}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, 0, 0, X_1)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_5^2}{f_1^2}$$

на  $(A_{5,11}^c)^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,12}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,12}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_1 + e_2$ ,  $[e_3, e_5] = e_2 + e_3$ ,  $[e_4, e_5] = e_3 + e_4$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1 \exp \frac{-f_2}{f_1}, \quad I_2 = \frac{2f_3}{f_1} - \frac{f_2^2}{f_1^2}, \quad I_3 = \frac{3f_4}{f_1} - \frac{3f_2f_3}{f_1^2} + \frac{f_2^3}{f_1^3},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 \exp \frac{-f_2}{f_1} = C_1, \quad \frac{2f_3}{f_1} - \frac{f_2^2}{f_1^2} = C_2, \quad \frac{3f_4}{f_1} - \frac{3f_2f_3}{f_1^2} + \frac{f_2^3}{f_1^3} = C_3.$$

**Лемма 3.4.13.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,12}$ , в координатах  $f_1, f_5$  равна

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_5}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = f_1, \quad q = \frac{f_5}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, 0, 0, X_1)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_5^2}{f_1^2}$$

на  $A_{5,12}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,13}^{apq}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,13}^{apq}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = ae_2$ ,  $[e_3, e_5] = pe_3 - qe_4$ ,  $[e_4, e_5] = qe_3 + pe_4$ ,  $aq \neq 0$ ,  $|a| \leq 1$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = \frac{f_1^a}{f_2}, \quad I_2 = \frac{f_1^{2p}}{f_3^2 + f_4^2}, \quad I_3 = f_1^{2q} \left( \frac{f_3 + if_4}{f_3 - if_4} \right)^i,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$\frac{f_1^a}{f_2} = C_1, \quad \frac{f_1^p}{r} = C_2, \quad f_1^q \exp(-\varphi) = C_3,$$

где  $r, \varphi$  — полярная система координат в плоскости  $f_3, f_4$ .

**Лемма 3.4.14.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли,

отвечающей алгебре Ли  $A_{5,13}^{apq}$ , в координатах  $f_1, f_5$  равна

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_5}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = f_1, \quad q = \frac{f_5}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, 0, 0, X_1)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_5^2}{f_1^2}$$

на  $(A_{5,13}^{apq})^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,14}^p$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,14}^p$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_2, e_5] = e_1$ ,  $[e_3, e_5] = pe_3 - e_4$ ,  $[e_4, e_5] = e_3 + pe_4$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_1, \quad I_2 = (f_3^2 + f_4^2) \left( \frac{f_3 + if_4}{f_3 - if_4} \right)^{ip}, \quad I_3 = (f_3^2 + f_4^2) \exp \left( -2p \frac{f_2}{f_1} \right),$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$f_1 = C_1, \quad r \exp(-p\varphi) = C_2, \quad r \exp \left( -p \frac{f_2}{f_1} \right) = C_3,$$

где  $r, \varphi$  — полярная система координат в плоскости  $f_3, f_4$ .

**Лемма 3.4.15.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,14}^p$ , в координатах  $f_2, f_5$  равна

$$\omega = \frac{df_2 \wedge df_5}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = \frac{f_2}{f_1}, \quad q = f_5,$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -X_5, 0, 0, X_2)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_5^2 + \frac{f_2^2}{f_1^2}$$

на  $(A_{5,14}^p)^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,15}^a$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,15}^a$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_1 + e_2$ ,  $[e_3, e_5] = ae_3$ ,  $[e_4, e_5] = e_3 + ae_4$ ,  $|a| \leq 1$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = \frac{f_1^a}{f_3}, \quad I_2 = f_1 \exp \frac{-f_2}{f_1}, \quad I_3 = f_3 \exp \frac{-af_4}{f_3},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$\frac{f_1^a}{f_3} = C_1, \quad f_1 \exp \frac{-f_2}{f_1} = C_2, \quad f_3 \exp \frac{-af_4}{f_3} = C_3.$$

**Лемма 3.4.16.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,15}^a$ , в координатах  $f_1, f_5$  равна

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_5}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = f_1, \quad q = \frac{f_5}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, 0, 0, X_1)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_5^2}{f_1^2}$$

на  $(A_{5,15}^a)^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,16}^{pq}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,16}^{pq}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_1 + e_2$ ,  $[e_3, e_5] = pe_3 - qe_4$ ,  $[e_4, e_5] = qe_3 + pe_4$ ,  $q \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = \frac{f_1^{2p}}{f_3^2 + f_4^2}, \quad I_2 = f_1^{2q} \left( \frac{f_3 - if_4}{f_3 + if_4} \right)^{-i}, \quad I_3 = f_1 \exp \frac{-f_2}{f_1},$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбиты  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаются уравнениями

$$\frac{f_1^p}{r} = C_1, \quad f_1^q \exp(-\varphi) = C_2, \quad f_1 \exp \frac{-f_2}{f_1} = C_3,$$

где  $r, \varphi$  — полярная система координат в плоскости  $f_3, f_4$ .

**Лемма 3.4.17.** Каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,16}^{pq}$ , в координатах  $f_1, f_5$  равна

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_5}{f_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p = f_1, \quad q = \frac{f_5}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

В частности, плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, 0, 0, X_1)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Функция

$$F = f_1^2 + \frac{f_5^2}{f_1^2}$$

на  $(A_{5,16}^{pq})^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,17}^{spq}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,17}^{spq}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_5] = pe_1 - e_2$ ,  $[e_2, e_5] = e_1 + pe_2$ ,  $[e_3, e_5] = qe_3 - se_4$ ,  $[e_4, e_5] = se_3 + qe_4$ ,  $s \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Инварианты коприсоединённого для этой алгебры Ли в [216] приведены не для всех значений параметров  $s, p, q$ . Нужные нам инварианты найдены в следующей лемме.

**Лемма 3.4.18.** Коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = (f_1^2 + f_2^2) \left( \frac{f_1 + if_2}{f_1 - if_2} \right)^{ip} \in \mathbb{R},$$

$$I_2 = (f_3^2 + f_4^2) \left( \frac{f_3 + if_4}{f_3 - if_4} \right)^{is} \in \mathbb{R}, \quad I_3 = \frac{(f_1 + if_2)^{qi+s}}{(f_3 - if_4)^{pi-1}},$$

через которые выражается любой другой инвариант.

**Доказательство.** Решая систему дифференциальных уравнений

$$C_{ij}^k f_k \frac{\partial F}{\partial f_j} = 0$$

методом характеристик (см. [143, 216]), мы найдём указанные в лемме инварианты.  $\square$

**Лемма 3.4.19.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,17}^{spq}$ , имеет вид

$$\omega = d\varphi \wedge df_5,$$

где  $\varphi, r, f_5$  — цилиндрическая система координат в пространстве  $(f_1, f_2, f_5)$ ,  $\varphi$  — угол между осью  $f_1$  и проекцией точки  $f$  на координатную плоскость  $f_1, f_2$ . Плоская симплектическая связность, задаваемая в координатах  $\varphi, f_5$  функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Надо рассмотреть два случая:

- а)  $pf_1 - f_2 \neq 0$ ;
- б)  $f_1 + pf_2 \neq 0$ .

В первом случае, если  $X = \text{ad}_x^* f$ , можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, 0, 0, X_1)}{pf_1 - f_2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_5}{pf_1 - f_2},$$

и, совершая здесь замену переменных

$$f_1 = C_2 \exp\{p\varphi\} \cos \varphi, \quad f_2 = C_2 \exp\{p\varphi\} \sin \varphi,$$

мы получим

$$\omega = d\varphi \wedge df_5.$$

Во втором случае, если  $X = \text{ad}_x^* f$ , можно положить

$$x = \frac{(0, -X_5, 0, 0, X_2)}{f_1 + pf_2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что

$$\omega = \frac{df_2 \wedge df_5}{f_1 + pf_2},$$

и, совершая здесь прежнюю замену переменных, мы получим

$$\omega = d\varphi \wedge df_5.$$

Функция

$$F(f_1, \dots, f_5) = 2(f_1^2 + f_2^2) + \sqrt{4(f_1^2 + f_2^2) - 3(f_1^2 + f_2^2 + f_5^2)}$$

порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,18}^p$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,18}^p$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_5] = pe_1 - e_2$ ,  $[e_2, e_5] = e_1 + pe_2$ ,  $[e_3, e_5] = e_1 + pe_3 - e_4$ ,  $[e_4, e_5] = e_2 + e_3 + pe_4$ ,  $p \geq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет три функционально независимых инварианта

$$I_1 = (f_1^2 + f_2^2) \left( \frac{f_1 + if_2}{f_1 - if_2} \right)^{ip},$$

$$I_2 = (f_1 + if_2) \exp \left\{ -(p+i) \frac{f_3 + if_4}{f_1 + if_2} \right\}, \quad I_3 = (f_1 - if_2) \exp \left\{ -(p-i) \frac{f_3 - if_4}{f_1 - if_2} \right\},$$

через которые выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.4.20.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,18}^p$ , имеет вид

$$\omega = d\varphi \wedge df_5,$$

где  $\varphi, r, f_5$  — цилиндрическая система координат в пространстве  $(f_1, f_2, f_5)$ ,  $\varphi$  — угол между осью  $f_1$  и проекцией точки  $f$  на координатную плоскость  $f_1, f_2$ . Плоская симплектическая связность с тривиальной группой голономии, задаваемая в координатах  $\varphi, f_5$  функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Надо рассмотреть два случая:

- а)  $pf_1 - f_2 \neq 0$ ;
- б)  $f_1 + pf_2 \neq 0$ .

В первом случае, если  $X = \text{ad}_x^* f$ , можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, 0, 0, X_1)}{pf_1 - f_2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_5}{pf_1 - f_2},$$

и, совершая здесь замену переменных

$$f_1 = r \cos \varphi = C_2 \exp\{p\varphi\} \cos \varphi, \quad f_2 = r \sin \varphi = C_2 \exp\{p\varphi\} \sin \varphi,$$

мы получим

$$\omega = d\varphi \wedge df_5.$$

Во втором случае, если  $X = \text{ad}_x^* f$ , можно положить

$$x = \frac{(0, -X_5, 0, 0, X_2)}{f_1 + pf_2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что

$$\omega = \frac{df_2 \wedge df_5}{f_1 + pf_2},$$

и, совершая здесь прежнюю замену переменных, мы получим

$$\omega = d\varphi \wedge df_5.$$

Функция

$$F(f_1, \dots, f_5) = 2(f_1^2 + f_2^2) + \sqrt{4(f_1^2 + f_2^2) - 3(f_1^2 + f_2^2 + f_5^2)}$$

порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,19}^{ab}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,19}^{ab}$  имеются пять ненулевых коммутатора  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_5] = ae_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_2$ ,  $[e_3, e_5] = (a-1)e_3$ ,  $[e_4, e_5] = be_4$ ,  $b \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I_1 = \frac{f_1^b}{f_4^a},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита  $\mathcal{O}(f)$  общего положения коприсоединённого представления задаётся уравнением

$$\frac{f_1^b}{f_4^a} = C,$$

т. е. это четырёхмерное многообразие.

**Лемма 3.4.21.**

1. Если  $a \neq 0$ , то каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,19}^{ab}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_3, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{af_1df_2 \wedge df_3 + f_2df_3 \wedge df_1 + f_1df_1 \wedge df_5 + (a-1)f_3df_1 \wedge df_2}{af_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_1, \quad q_2 = f_3, \quad p_1 = -\left(\frac{(a-1)f_2f_3}{af_1^2} + \frac{f_5}{af_1}\right), \quad p_2 = \frac{f_2}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

2. Если  $a = 0$ , то каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ,  $f_4 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,19}^{ab}$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{bf_4df_2 \wedge df_3 + f_3df_2 \wedge df_4 + f_2df_3 \wedge df_4 + f_1df_4 \wedge df_5}{bf_1f_4} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_2, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = -\frac{f_3}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_2f_3}{bf_1f_4} - \frac{f_5}{bf_4},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

В частности, в обоих случаях плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** 1. Пусть  $a \neq 0$ . Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_5 + f_2 X_3 - (a-1)f_3 X_2, (a-1)f_3 X_1 - af_1 X_3, af_1 X_2 - f_2 X_1, 0, f_1 X_1)}{af_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

2. Пусть  $a = 0$ . Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -bf_4 X_3 - f_3 X_4, bf_4 X_2 - f_2 X_4, -f_1 X_5 + f_2 X_3 + f_3 X_2, f_1 X_4)}{bf_1 f_4},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,20}^a$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,20}^a$  имеются пять ненулевых коммутатора  $[e_1, e_5] = ae_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_2$ ,  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_3, e_5] = (a-1)e_3$ ,  $[e_4, e_5] = e_1 + ae_4$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = f_1 \exp \frac{-af_4}{f_1},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.4.22.**

1. Если  $a \neq 0$ , то каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,20}^a$ , в координатах  $f_2, f_3, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{af_1 df_2 \wedge df_3 + f_2 df_3 \wedge df_1 + f_1 df_5 \wedge df_1 + (a-1)f_3 df_1 \wedge df_2}{af_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_1, \quad q_2 = f_3, \quad p_1 = \frac{(1-a)f_2 f_3}{af_1^2} + \frac{f_5}{af_1}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

2. Если  $a = 0$ , то каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,20}^a$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_1 df_2 \wedge df_3 + f_3 df_2 \wedge df_4 + f_2 df_3 \wedge df_4 + f_1 df_4 \wedge df_5}{f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_2, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = -\frac{f_3}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_2 f_3 - f_1 f_5}{f_1^2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

В частности, в обоих случаях плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** 1. Пусть  $a \neq 0$ . Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_5 + f_2 X_3 - (a-1)f_3 X_2, (a-1)f_3 X_1 - a f_1 X_3, a f_1 X_2 - f_2 X_1, 0, a X_1)}{a f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

2. Пусть  $a = 0$ . Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -f_1 X_3 - f_3 X_4, f_1 X_2 - f_2 X_4, f_2 X_3 + f_3 X_2 - f_1 X_5, f_1 X_4)}{f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

Утверждение, касающееся канонических координат, получается из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,21}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,21}$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_5] = e_2 + e_3$ ,  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_5] = 2e_1$ ,  $[e_3, e_5] = e_3 + e_4$ ,  $[e_4, e_5] = e_4$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = \frac{f_4^2}{f_1},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.4.23.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,21}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_3, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{(f_3 + f_4)df_1 \wedge df_2 + 2f_1 df_2 \wedge df_3 + (f_2 + f_3)df_3 \wedge df_1 + f_1 df_1 \wedge df_5}{2f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь функция  $f_4$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  равна  $f_4 = \sqrt{Cf_1}$ . В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_3^2 - 2f_2f_3 - 2f_2f_4}{4f_1^2} - \frac{f_5}{2f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1X_5 + (f_2 + f_3)X_3 - (f_3 + f_4)X_2, (f_3 + f_4)X_1 - 2f_1X_3, 2f_1X_2 - (f_2 + f_3)X_1, 0, f_1X_1)}{2f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,22}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,22}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_3$ ,  $[e_4, e_5] = e_4$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант  $I = f_1$ , через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением  $f_1 = C_1$ .

**Лемма 3.4.24.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1, f_4 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,22}$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \left. \frac{f_4 df_2 \wedge df_3 + f_3 df_3 \wedge df_4 + f_1 df_5 \wedge df_4}{f_1 f_4} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_3^2}{2f_1} + \frac{f_5}{f_4},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -f_4X_3, f_4X_2 - f_3X_4, f_3X_3 - f_1X_5, f_1X_4)}{f_1 f_4},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,23}^b$**  В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,23}^b$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_5] = 2e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_2 + e_3$ ,  $[e_3, e_5] = e_3$ ,  $[e_4, e_5] = be_4$ ,  $b \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = \frac{f_1^b}{f_4^2},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$\frac{f_1^b}{f_4^2} = C.$$

**Лемма 3.4.25.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,23}^b$ , в координатах  $f_1, f_2, f_3, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{2f_1 df_2 \wedge df_3 + f_1 df_1 \wedge df_5 + (f_2 + f_3) df_3 \wedge df_1 + f_3 df_1 \wedge df_2}{2f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_3^2 - 2f_5 f_1 - 2f_2 f_3}{4f_1^2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_5 + (f_2 + f_3) X_3 - f_3 X_2, f_3 X_1 - 2f_1 X_3, 2f_1 X_2 - (f_2 + f_3) X_1, 0, f_1 X_1)}{2f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,24}^\varepsilon$**  В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,24}^\varepsilon$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_5] = 2e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_2 + e_3$ ,  $[e_3, e_5] = e_3$ ,  $[e_4, e_5] = \varepsilon e_1 + 2e_4$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = f_1 \exp \left( \frac{-2\varepsilon f_4}{f_1} \right),$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$f_1 \exp\left(\frac{-2\varepsilon f_4}{f_1}\right) = C.$$

**Лемма 3.4.26.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,24}^\varepsilon$ , в координатах  $f_1, f_2, f_3, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{2f_1 df_2 \wedge df_3 + (f_2 + f_3) df_3 \wedge df_1 + f_1 df_1 \wedge df_5 + f_3 df_1 \wedge df_2}{2f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_3^2 - 2f_5 f_1 - 2f_2 f_3}{4f_1^2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_5 + (f_2 + f_3) X_3 - f_3 X_2, f_3 X_1 - 2f_1 X_3, 2f_1 X_2 - (f_2 + f_3) X_1, 0, f_1 X_1)}{2f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,25}^{bp}$**  В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,25}^{bp}$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_5] = 2pe_1$ ,  $[e_2, e_5] = pe_2 + e_3$ ,  $[e_3, e_5] = pe_3 - e_2$ ,  $[e_4, e_5] = be_4$ ,  $b \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = \frac{f_1^b}{f_4^{2p}},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$\frac{f_1^b}{f_4^{2p}} = C.$$

**Лемма 3.4.27.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения  $(f_1, f_4 \neq 0)$  коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,25}^{bp}$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{bf_4df_2 \wedge df_3 + f_1df_5 \wedge df_4 + (pf_2 + f_3)df_3 \wedge df_4 + (pf_3 - f_2)df_4 \wedge df_2}{bf_1f_4} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь  $f_1$  — функция на орбите  $\mathcal{O}(f) = \{\frac{f_1^b}{f_4^{2p}} = C\}$ , равная  $f_1 = Cf_4^{2p/b}$ . В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = \frac{f_2}{Cf_4^{2p/b}}, \quad p_2 = -\frac{f_5}{bf_4} + \frac{f_2^2 + f_3^2 - 2pf_2f_3}{2bf_1f_4},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -bf_4X_3 + (pf_3 - f_2)X_4, bf_4X_2 - (pf_2 + f_3)X_4, -f_1X_5 + (pf_2 + f_3)X_3 - (pf_3 - f_2)X_2, f_1X_4)}{bf_1 - f_4},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,26}^{p\varepsilon}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,26}^{p\varepsilon}$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_5] = 2pe_1$ ,  $[e_2, e_5] = pe_2 + e_3$ ,  $[e_3, e_5] = pe_3 - e_2$ ,  $[e_4, e_5] = \varepsilon e_1 + 2pe_4$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = f_1 \exp \frac{-2\varepsilon pf_4}{f_1},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.4.28.**

1. Если  $p \neq 0$ , то каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения  $(f_1 \neq 0)$  коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,26}^{p\varepsilon}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_3, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{2pf_1df_2 \wedge df_3 + (pf_3 - f_2)df_1 \wedge df_2 + (pf_2 + f_3)df_3 \wedge df_1 + f_1df_1 \wedge df_5}{2pf_1} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_2^2 + f_3^2 - 2pf_2f_3}{4pf_1^2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

2. Если  $p = 0$ , то каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,26}^{0\epsilon}$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \left. \frac{f_1 df_2 \wedge df_3 + f_2 df_2 \wedge df_4 + f_3 df_3 \wedge df_4 + f_1 df_4 \wedge df_5}{f_1^2} \right|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_2, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = -\frac{f_3}{f_1} - \frac{f_2 f_4}{f_1^2}, \quad p_2 = \frac{f_3^2}{2f_1} - \frac{f_5}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Здесь  $f_1 = \text{const}$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$ .

В частности, в обоих случаях плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** 1. Пусть  $p \neq 0$ . Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_5 + (pf_2 + f_3)X_3 - (pf_3 - f_2)X_2 - 2pf_1 X_3 + (pf_3 - f_2)X_1, 2pf_1 X_2 - (pf_2 + f_3)X_1, 0, f_1 X_1)}{2pf_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

2. Пусть  $p = 0$ . Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -f_1 X_3 - f_2 X_4, f_1 X_2 - f_3 X_4, f_3 X_3 + f_2 X_2 - f_1 X_5, f_1 X_4)}{f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,27}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,27}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_3, e_5] = e_3 + e_4$ ,  $[e_4, e_5] = e_1 + e_4$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = f_1 \exp \frac{-f_4}{f_1},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$f_1 \exp \frac{-f_4}{f_1} = C.$$

**Лемма 3.4.29.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,27}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_3, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_1 df_2 \wedge df_3 + f_1 df_1 \wedge df_5 + (f_3 + f_4) df_1 \wedge df_2}{f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь  $f_4 = -f_1 \ln\{\frac{C}{f_1}\}$  — функция на орбите  $\mathcal{O}(f)$ . В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = -\left(\frac{f_5}{f_1} + (f_3 - f_4)\frac{f_2}{f_1^2}\right),$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_5 - (f_3 + f_4) X_2, (f_3 + f_4) X_1 - f_1 X_3, f_1 X_2, 0, f_1 X_1)}{f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,28}^a$**  В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,28}^a$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_5] = ae_1$ ,  $[e_2, e_5] = (a-1)e_2$ ,  $[e_3, e_5] = e_3 + e_4$ ,  $[e_4, e_5] = e_4$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = \frac{f_4^a}{f_1},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$\frac{f_4^a}{f_1} = C.$$

**Лемма 3.4.30.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1, f_4 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,28}^a$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_4 df_2 \wedge df_3 + (a-1)f_2 df_3 \wedge df_4 + (f_3 + f_4) df_4 \wedge df_2 + f_1 df_4 \wedge df_5}{f_1 f_4} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь  $f_1$  — функция на орбите  $\mathcal{O}(f)$ , равная  $f_1 = \frac{f_4^a}{C}$ . В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = -\frac{f_2 f_3 + f_4 f_2}{f_4 f_1} - \frac{f_5}{f_4},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -(f_3 + f_4)X_4 - f_4 X_3, f_4 X_2 - (a-1)f_2 X_4, (a-1)f_2 X_3 - (f_3 + f_4)X_2 - f_1 X_5, f_1 X_4)}{f_1 f_4},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,29}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,29}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_2, e_4] = e_1$ ,  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_2$ ,  $[e_4, e_5] = e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант  $I = f_3$ , через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением  $f_3 = C$ .

**Лемма 3.4.31.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,29}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_3 df_1 \wedge df_2 + f_1 df_2 \wedge df_4 + f_2 df_4 \wedge df_1 + f_1 df_1 \wedge df_5}{f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь  $f_3 = \text{const}$  — функция на орбите  $\mathcal{O}(f)$ . В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = -\left(\frac{f_2 f_3}{f_1^2} + \frac{f_5}{f_1}\right),$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_5 + f_2 X_4 - f_3 X_2, f_3 X_1 - f_1 X_4, 0, f_1 X_2 - f_2 X_1, f_1 X_1)}{f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,30}^a$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,30}^a$  имеются шесть ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_4] = e_1$ ,  $[e_3, e_4] = e_2$ ,  $[e_1, e_5] = (a+1)e_1$ ,  $[e_2, e_5] = ae_2$ ,  $[e_3, e_5] = (a-1)e_3$ ,  $[e_4, e_5] = e_4$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = \frac{(f_2^2 - 2f_1 f_3)^{a+1}}{f_1^{2a}},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.4.32.**

1. Если  $a \neq -1$ , то каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,30}^a$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{(a+1)f_1 df_2 \wedge df_4 + f_4 df_1 \wedge df_2 + af_2 df_4 \wedge df_1 + f_1 df_1 \wedge df_5}{(a+1)f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_1, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = \frac{f_2 f_4}{(a+1)f_1^2} - \frac{f_5}{(a+1)f_1}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

2. Если  $a = -1$ , то каноническая симплектическая форма  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_2^2 - 2f_1 f_3 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,30}^{-1}$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{2f_3 df_4 \wedge df_2 + f_2 df_5 \wedge df_2 + f_4 df_3 \wedge df_2 - f_2 df_4 \wedge df_3 - f_1 df_5 \wedge df_3}{f_2^2 - 2f_1 f_3} \Big|_{\mathcal{O}(f)},$$

и в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_2, \quad q_2 = f_3, \quad p_1 = \frac{2f_3 f_4 + f_2 f_5}{f_2^2 - 2f_1 f_3}, \quad p_2 = -\frac{f_2 f_4 + f_1 f_5}{f_2^2 - 2f_1 f_3},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

В частности, в обоих случаях плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** 1. Пусть  $a \neq -1$ . Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_5 + a f_2 X_4 - f_4 X_2, -(a+1)f_1 X_4 + f_4 X_1, 0, (a+1)f_1 X_2 - a f_2 X_1, f_1 X_1)}{(a+1)f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

2. Пусть  $a = -1$ . Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, 2f_3 X_4 + f_2 X_5 + f_4 X_3, -f_1 X_5 - f_2 X_4 - f_4 X_2, -2f_3 X_2 + f_2 X_3, f_1 X_3 - f_2 X_2)}{f_2^2 - 2f_1 f_3},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,31}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,31}$  имеются шесть ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_4] = e_1$ ,  $[e_3, e_4] = e_2$ ,  $[e_1, e_5] = 3e_1$ ,  $[e_2, e_5] = 2e_2$ ,  $[e_3, e_5] = e_3$ ,  $[e_4, e_5] = e_3 + e_4$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = \frac{(f_2^2 - 2f_1 f_3)^3}{f_1^4},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$\frac{(f_2^2 - 2f_1 f_3)^3}{f_1^4} = C.$$

**Лемма 3.4.33.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,31}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{(f_3 + f_4)df_1 \wedge df_2 + 3f_1 df_2 \wedge df_4 + 2f_2 df_4 \wedge df_1 + f_1 df_1 \wedge df_5}{3f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь  $f_3 = \frac{(f_2^2 - C f_1^{4/3})}{2f_1}$  — функция на орбите  $\mathcal{O}(f)$ . В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = - \left( \frac{-f_2^3 + 3f_1 f_2 f_3 + 3f_1 f_2 f_4}{9f_1^3} + \frac{f_5}{3f_1} \right),$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_5 + 2f_2 X_4 - (f_3 + f_4)X_2, (f_3 + f_4)X_1 - 3f_1 X_4, 0, 3f_1 X_2 - 2f_2 X_1, f_1 X_1)}{3f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,32}^a$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,32}^a$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_4] = e_1$ ,  $[e_3, e_4] = e_2$ ,  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_2$ ,  $[e_3, e_5] = ae_1 + e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = f_1^{2a} \exp \frac{f_2^2 - 2f_1 f_3}{f_1^2},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$f_1^{2a} \exp \frac{f_2^2 - 2f_1 f_3}{f_1^2} = C.$$

**Лемма 3.4.34.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,32}^a$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_1 df_2 \wedge df_4 + f_2 df_4 \wedge df_1 + f_1 df_1 \wedge df_5}{f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = -\frac{f_5}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(f_2 X_4 - f_1 X_5, -f_1 X_4, 0, f_1 X_2 - f_2 X_1, f_1 X_1)}{f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,33}^{ab}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,33}^{ab}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_4] = e_1$ ,  $[e_3, e_4] = be_3$ ,  $[e_2, e_5] = e_2$ ,  $[e_3, e_5] = ae_3$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = \frac{f_1^b f_2^a}{f_3},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$\frac{f_1^b f_2^a}{f_3} = C.$$

**Лемма 3.4.35.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1, f_2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,33}^{ab}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \left. \frac{f_2 df_1 \wedge df_4 + f_1 df_2 \wedge df_5}{f_1 f_2} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$p_1 = f_1, \quad p_2 = f_2, \quad q_1 = \frac{f_4}{f_1}, \quad q_2 = \frac{f_5}{f_2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_4, -X_5, 0, X_1, X_2)}{f_1},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,34}^a$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,34}^a$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_4] = ae_1$ ,  $[e_2, e_4] = e_2$ ,  $[e_3, e_4] = e_3$ ,  $[e_1, e_5] = e_1$ ,  $[e_3, e_5] = e_2$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый

инвариант

$$I = \frac{f_2^a}{f_1} \exp \frac{f_3}{f_2},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$\frac{f_2^a}{f_1} \exp \frac{f_3}{f_2} = C.$$

**Лемма 3.4.36.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,34}^a$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_2 df_2 \wedge df_4 + f_2 df_3 \wedge df_5 + f_3 df_5 \wedge df_2}{f_2^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_2, \quad q_2 = f_5, \quad p_1 = -\frac{f_4}{f_2}, \quad p_2 = \frac{f_3}{f_2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -f_2 X_4 + f_3 X_5, -f_2 X_5, f_2 X_2, f_2 X_3 - f_3 X_2)}{f_2^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,35}^{ab}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,35}^{ab}$  имеются шесть ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_4] = be_1$ ,  $[e_4, e_2] = -e_2$ ,  $[e_3, e_4] = e_3$ ,  $[e_1, e_5] = ae_1$ ,  $[e_2, e_5] = -e_3$ ,  $[e_3, e_5] = e_2$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = \frac{f_1^2}{(f_2^2 + f_3^2)^b} \left( \frac{f_2 + if_3}{f_2 - if_3} \right)^{ia},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$\frac{f_1^2}{(f_2^2 + f_3^2)^b} \left( \frac{f_2 + if_3}{f_2 - if_3} \right)^{ia} = C.$$

**Лемма 3.4.37.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_2^2 + f_3^2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,35}^{ab}$ , в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_3 df_5 \wedge df_2 + f_2 df_2 \wedge df_4 + f_2 df_3 \wedge df_5 + f_3 df_3 \wedge df_4}{f_2^2 + f_3^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_2, \quad q_2 = f_3, \quad p_1 = \frac{f_3 f_5 - f_2 f_4}{f_2^2 + f_3^2}, \quad p_2 = -\frac{f_2 f_5 + f_3 f_4}{f_2^2 + f_3^2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, f_3 X_5 - f_2 X_4, -f_2 X_5 - f_3 X_4, f_2 X_2 + f_3 X_3, f_2 X_3 - f_3 X_2)}{f_2^2 + f_3^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,36}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,36}$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_4] = e_1$ ,  $[e_2, e_4] = e_2$ ,  $[e_2, e_5] = -e_2$ ,  $[e_3, e_5] = e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = \frac{f_2 f_3 + f_1 f_5}{f_1},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$\frac{f_2 f_3 + f_1 f_5}{f_1} = C.$$

**Лемма 3.4.38.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,36}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_3, f_4$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_1 df_2 \wedge df_3 + f_2 df_3 \wedge df_1 + f_1 df_1 \wedge df_4}{f_1^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = -\frac{f_4}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_4 + f_2 X_3, -f_1 X_3, f_1 X_2 - f_2 X_1, f_1 X_1, 0)}{f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,37}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,37}$  имеются шесть ненулевых коммутаторов  $[e_2, e_3] = e_1$ ,  $[e_1, e_4] = 2e_1$ ,  $[e_2, e_4] = e_2$ ,  $[e_3, e_4] = e_3$ ,  $[e_2, e_5] = -e_3$ ,  $[e_3, e_5] = e_2$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = \frac{f_2^2 + f_3^2 + 2f_1 f_5}{f_1},$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$\frac{f_2^2 + f_3^2 + 2f_1 f_5}{f_1} = C.$$

**Лемма 3.4.39.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,37}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_3, f_4$  имеет вид

$$\omega = \left. \frac{f_3 df_1 \wedge df_2 + 2f_1 df_2 \wedge df_3 + f_2 df_3 \wedge df_1 + f_1 df_1 \wedge df_4}{2f_1} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_2, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = -\frac{f_3}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_2 f_3}{2f_1^2} - \frac{f_4}{2f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_1 X_4 + f_2 X_3 - f_3 X_2, f_3 X_1 - 2f_1 X_3, 2f_1 X_2 - f_2 X_1, f_1 X_1, 0)}{2f_1^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,38}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,38}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_4] = e_1$ ,  $[e_2, e_5] = e_2$ ,  $[e_4, e_5] = e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант  $I = f_3$ , через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением  $f_3 = C$ .

**Лемма 3.4.40.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1, f_2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,38}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_3 df_2 \wedge df_1 + f_2 df_1 \wedge df_4 + f_1 df_2 \wedge df_5}{f_1 f_2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_2, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = -\left(\frac{f_3}{f_1} \ln f_1 + \frac{f_5}{f_2}\right), \quad p_2 = -\frac{f_4}{f_1},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(f_3 X_2 - f_2 X_4, -f_1 X_5 - f_3 X_1, 0, f_2 X_1, f_1 X_2)}{f_1 f_2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,39}$ .** В разрешимой алгебре Ли  $A_{5,39}$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_4] = e_1$ ,  $[e_2, e_4] = e_2$ ,  $[e_1, e_5] = -e_2$ ,  $[e_2, e_5] = e_1$ ,  $[e_4, e_5] = e_3$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант  $I = f_3$ , через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением  $f_3 = C$ .

**Лемма 3.4.41.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,39}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_2 df_5 \wedge df_1 + f_1 df_1 \wedge df_4 + f_3 df_2 \wedge df_1 + f_1 df_2 \wedge df_5 + f_2 df_2 \wedge df_4}{f_1^2 + f_2^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_5, \quad q_2 = f_2 - f_3 p_2, \quad p_1 = \ln \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad p_2 = \arctg \frac{f_2}{f_1},$$

если  $f_1 \neq 0$ , и

$$p_2 = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{f_1}{f_2},$$

если  $f_2 \neq 0$ , при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(f_2 X_5 - f_1 X_4 + f_3 X_2, -f_1 X_5 - f_2 X_4 - f_3 X_1, 0, f_1 X_1 + f_2 X_2, f_1 X_2 - f_2 X_1)}{f_1^2 + f_2^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, вытекает из явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{5,40}$ .** Алгебра Ли  $A_{5,40}$  является полупрямой суммой алгебры Ли  $\text{SU}(1, 1)$  и  $\mathbb{R}^2$  по некоторому представлению. Она имеет семь ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_2] = 2e_1$ ,  $[e_1, e_3] = -e_2$ ,  $[e_2, e_3] = 2e_3$ ,  $[e_1, e_4] = e_5$ ,  $[e_2, e_4] = e_4$ ,  $[e_2, e_5] = -e_5$ ,  $[e_3, e_5] = e_4$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет один функционально независимый инвариант

$$I = f_1 f_4^2 - f_2 f_4 f_5 - f_3 f_5^2,$$

через который функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнением

$$f_1 f_4^2 - f_2 f_4 f_5 - f_3 f_5^2 = C.$$

Отображение

$$\pi: \mathcal{O}(f) \rightarrow \mathbb{R}^2(f_4, f_5) \setminus O = M^2, \quad \pi(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = (f_4, f_5), \quad O = (0, 0),$$

является расслоением, слоем которого служит  $\mathbb{R}^2$ .

**Лемма 3.4.42. Расслоение**

$$\pi: \mathcal{O}(f) \rightarrow M^2$$

тривиально.

**Доказательство.** Диффеоморфизм

$$F: (\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{O}(f),$$

для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathcal{O}(f) \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \pi & \\ & \mathbb{R}^2 \setminus O & \end{array}$$

коммутативна, задаётся формулами

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 x_4 + \frac{C x_3^2}{(x_3^2 + x_4^2)^2}, & f_2 &= x_1 x_3 + x_2 x_4 - \frac{2C x_3 x_4}{(x_3^2 + x_4^2)^2}, \\ f_3 &= -x_2 x_3 - \frac{C x_4^2}{(x_3^2 + x_4^2)^2}, & f_4 &= x_3, & f_5 &= x_4. \end{aligned}$$

На орбите  $\mathcal{O}(f)$  построим функции  $p_1, p_2$ . Пусть  $(r, \varphi)$  — полярная система координат на плоскости  $(f_4, f_5)$ , т. е.

$$f_4 = r \cos \varphi, \quad f_5 = r \sin \varphi.$$

Определим функцию  $p_1$  следующим образом:

а) если  $f_4 \neq 0$  (т. е.  $\cos \varphi \neq 0$ ), положим

$$p_1 = \frac{f_2}{r} + \frac{2 \sin \varphi}{r \cos \varphi} f_3 + \frac{2C \sin \varphi}{r^3 \cos \varphi};$$

б) если  $f_5 \neq 0$  (т. е.  $\sin \varphi \neq 0$ ), положим

$$p_1 = \frac{2 \cos \varphi}{r \sin \varphi} f_1 - \frac{f_2}{r} - \frac{2C \cos \varphi}{r^3 \sin \varphi},$$

здесь  $C$  — постоянная, определяющая орбиту  $\mathcal{O}(f)$ .

Легко убедиться, что эти два определения совпадают в общей области определения  $f_4 \neq 0, f_5 \neq 0$ .

Определим функцию  $p_2$  следующим образом:

а) если  $f_4 \neq 0$  (т. е.  $\cos \varphi \neq 0$ ), положим

$$p_2 = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} f_2 + \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi} f_3 - \frac{C}{r^2 \cos^2 \varphi};$$

б) если  $f_5 \neq 0$  (т. е.  $\sin \varphi \neq 0$ ), положим

$$p_2 = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} f_2 + \frac{\cos 2\varphi}{\sin^2 \varphi} f_1 - \frac{C}{r^2 \sin^2 \varphi},$$

здесь  $C$  — постоянная, определяющая орбиту  $\mathcal{O}(f)$ .

Легко убедиться, что эти два определения совпадают в общей области определения  $f_4 \neq 0, f_5 \neq 0$ .  $\square$

**Лемма 3.4.43.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_1 f_4^2 - f_2 f_4 f_5 - f_3 f_5^2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{5,40}$ , имеет следующий вид:

- а) если  $f_4 \neq 0$ , то в координатах  $f_2, f_3, f_4, f_5$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  выполнено равенство

$$\omega = \frac{f_4 df_2 \wedge df_4 + f_5 df_3 \wedge df_4 + f_4 df_3 \wedge df_5 + 2f_3 df_5 \wedge df_4}{f_4^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)};$$

- б) если  $f_5 \neq 0$ , то в координатах  $f_1, f_3, f_4, f_5$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  выполнено равенство

$$\omega = \frac{f_5 df_1 \wedge df_4 + f_4 df_1 \wedge df_5 + f_5 df_5 \wedge df_2 + 2f_1 df_4 \wedge df_5}{f_5^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad p_1, \quad p_2$$

( $r, \varphi$  — полярные координаты на плоскости  $f_4, f_5$ ), при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dr + dp_2 \wedge d\varphi.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Пусть  $f_4 \neq 0$ . Тогда простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(0, -f_4 X_4, -f_5 X_4 - f_4 X_5, f_4 X_2 + 2f_3 X_5 + f_5 X_3, f_4 X_3 - 2f_3 X_4)}{f_4^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

Пусть  $f_5 \neq 0$ . Тогда простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_5 X_4 - f_4 X_5, f_5 X_5, 0, f_5 X_1 - 2f_1 X_5, -f_5 X_2 + 2f_1 X_4 + f_4 X_1)}{f_5^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  и  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

Итак, функции  $p_1, p_2, r, \varphi$  на областях  $\{p_4 \neq 0\}, \{f_5 \neq 0\}$  дают канонические координаты, и матрица Якоби функций перехода является тождественной. Поэтому определение связности равенствами  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$  в каждой из этих областей корректным образом даёт связность на орбите  $\mathcal{O}(f)$ .

Ясно, что гамильтониан

$$p_2^2 + \sin^2 \varphi = H$$

порождает вполне интегрируемую гамильтонову систему, торы Лиувилля которой имеют нетривиальные обобщённые индексы Маслова.  $\square$

### 3.5. Плоские симплектические связности на орбитах коприсоединённого представления нильпотентных групп Ли размерности шесть

#### 3.5.1. Формулировка основной теоремы

Для nilпотентных алгебр Ли  $G$  размерности шесть имеется полная классификация. Естественно рассматривать только неразложимые алгебры Ли, т. е. такие алгебры Ли, которые не распадаются в прямую сумму алгебр Ли меньшей размерности. В этом случае мы имеем 22 типа шестимерных алгебр Ли  $A_{6,1}, \dots, A_{6,22}$ , среди них 4 однопараметрические серии алгебр Ли.

Для индекса  $\text{ind } G$  возможны два варианта:

- а)  $\text{ind } G = 4$ ;
- б)  $\text{ind } G = 2$ .

Алгебры Ли  $A_{6,1}$ ,  $A_{6,2}$  и  $A_{6,3}$  относятся к первому типу, а остальные алгебры Ли  $A_{6,4}, \dots, A_{6,22}$  — ко второму типу. В первом случае размерность орбиты общего положения равна 2, т. е. нет проблемы, связанной с интегрируемостью уравнений Эйлера  $\dot{x} = \text{sgrad } H_x$ .

Наша цель — показать, что в этом случае обобщённый индекс Маслова на двумерных орбитах нетривиален, т. е. по крайней мере для одного гамильтониана  $H$  торы Лиувилля (окружности  $S^1$ ) на орбитах общего положения имеют нетривиальные обобщённые классы Маслова.

Во втором случае размерность орбиты общего положения равна 4, и мы имеем две задачи:

- а) вопрос о полной интегрируемости уравнений Эйлера  $\dot{x} = \text{sgrad } H_x$ ;
- б) вычисление индексов соответствующих торов Лиувилля.

Введём следующие обозначения. Алгебра Ли  $G = A_{6,j}$ ,  $j = 1, \dots, 22$ , имеет базис  $e_1, \dots, e_6$ , и произвольный элемент  $x \in G$  имеет вид  $x = \sum_{i=1}^6 x_i e_i$ . В сопряжённом пространстве  $G^*$  рассмотрим дуальный базис  $e^1, \dots, e^6$ , т. е.  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ ,  $i, j = 1, \dots, 6$ . Произвольный же линейный функционал  $f \in G^*$  имеет вид  $f = \sum_{i=1}^6 f_i e^i$ . Орбита, проходящая через  $f \in G^*$ , будет обозначаться через  $\mathcal{O}(f) \subset G^*$ .

**Теорема 3.5.1.** *На всех орбитах общего положения коприсоединённого представления шестимерной nilпотентной группы Ли имеется плоская симплектическая связность, по отношению к которой торы Лиувилля вполне интегрируемых гамильтоновых систем имеют нетривиальные обобщённые классы Маслова.*

### 3.5.2. Доказательство основной теоремы

Доказательство будет получено перебором всех двадцати двух случаев.

**Алгебра Ли  $A_{6,1}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,1}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_5] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет четыре функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_4, \quad I_2 = f_6, \quad I_3 = f_3 f_6 - f_4 f_5, \quad I_4 = 2f_2 f_4 - f_3^2,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.2.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_4 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,1}$ , в координатах  $f_1, f_3$  имеет вид

$$\omega = \left. \frac{df_1 \wedge df_3}{f_4} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q = f_3, \quad p = \frac{f_1}{f_4},$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_3, 0, X_1, 0, 0, 0)}{f_4},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

Функция

$$F = f_3^2 + \frac{f_1^2}{f_4^2}$$

на  $A_{6,1}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,2}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,2}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_5$ ,  $[e_1, e_5] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет четыре функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_6, \quad I_2 = 2f_4 f_6 - f_5^2, \quad I_3 = 2f_2 f_6 - 2f_3 f_5 + f_4^2, \quad I_4 = 3f_3 f_6^2 - 3f_4 f_5 f_6 + f_5^3,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.3.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,2}$ , в координатах  $f_1, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_5}{f_6} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q = f_5, \quad p = \frac{f_1}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp \wedge dq.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, 0, 0, X_1, 0)}{f_6},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

Функция

$$F = f_5^2 + \frac{f_1^2}{f_6^2}$$

на  $A_{6,1}^*$  порождает на всех двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,3}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,3}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_6$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_2, e_3] = e_5$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет четыре функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_4, \quad I_2 = f_5, \quad I_3 = f_6, \quad I_4 = f_1 f_5 + f_3 f_6 - f_2 f_4,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.4.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_4^2 + f_5^2 + f_6^2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,3}$ , имеет вид

$$\omega = \frac{f_6 df_1 \wedge df_2 + f_4 df_1 \wedge df_3 + f_5 df_2 \wedge df_3}{f_4^2 + f_5^2 + f_6^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

1. Если  $f_4 \neq 0$ , то в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad p_1 = \frac{f_1}{f_4},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1.$$

2. Если  $f_5 \neq 0$ , то в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_2 = f_3, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_5},$$

при этом

$$\omega = dp_2 \wedge dq_2.$$

3. Если  $f_6 \neq 0$ , то в качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_3 = f_2, \quad p_1 = \frac{f_1}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_3 \wedge dq_3.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в рассматриваемой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)}{f_4},$$

где

$$x_1 = \frac{-f_6 X_2 - f_4 X_3}{f_4^2 + f_5^2 + f_6^2}, \quad x_2 = \frac{f_6 X_1 - f_5 X_3}{f_4^2 + f_5^2 + f_6^2}, \quad x_3 = \frac{f_5 X_2 + f_4 X_1}{f_4^2 + f_5^2 + f_6^2},$$

$$x_4 = x_5 = x_6 = 0,$$

$X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме.

Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы. Рассматриваются три случая:  $f_4 \neq 0$ ;  $f_5 \neq 0$ ;  $f_6 \neq 0$ .

Функции

$$F_1 = f_3^2 + \frac{f_1^2}{f_4^2}$$

на орбитах, где  $f_4 \neq 0$ ,

$$F_2 = f_3^2 + \frac{f_2^2}{f_5^2}$$

на орбитах, где  $f_5 \neq 0$ ,

$$F_3 = f_2^2 + \frac{f_1^2}{f_6^2}$$

на орбитах, где  $f_6 \neq 0$ , порождают на двумерных орбитах поток, все траектории которого замкнуты, и все их обобщённые индексы Маслова равны двум.  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,4}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,4}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_5$ ,  $[e_1, e_3] = e_6$ ,  $[e_2, e_4] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_5, \quad I_2 = f_6,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.5.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,4}$ , имеет вид

$$\omega = \left. \frac{f_6 df_1 \wedge df_3 + f_6 df_4 \wedge df_2 + f_5 df_3 \wedge df_4}{f_6^2} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = \frac{f_1}{f_6}, \quad p_2 = \frac{f_5 f_3 - f_6 f_2}{f_6^2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6 X_3, f_6 X_4, f_6 X_1 - f_5 X_4, f_6 X_2 - f_5 X_3, 0, 0)}{f_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,5}^a$ .** В алгебре Ли  $A_{6,5}^a$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_3] = e_5$ ,  $[e_1, e_4] = e_6$ ,  $[e_2, e_3] = ae_6$ ,  $[e_2, e_4] = e_5$ ,  $a \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_5, \quad I_2 = f_6,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.6.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_5^2 - af_6^2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,5}^a$ , имеет вид

$$\omega = \left. \frac{af_6 df_4 \wedge df_1 + f_5 df_1 \wedge df_3 + f_5 df_2 \wedge df_4 + f_6 df_3 \wedge df_2}{f_5^2 - af_6^2} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_1, \quad q_2 = f_2, \quad p_1 = \frac{af_6f_4 - f_5f_3}{f_5^2 - af_6^2}, \quad p_2 = \frac{f_6f_3 - f_5f_4}{f_5^2 - af_6^2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(af_6X_4 - f_5X_3, f_6X_3 - f_5X_4, f_5X_1 - f_6X_2, f_5X_2 - af_6X_1, 0, 0)}{f_5^2 - af_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,6}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,6}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_6$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_5$ ,  $[e_2, e_3] = e_5$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта  $I_1 = f_5$ ,  $I_2 = f_6$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.7.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_5 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,6}$ , имеет вид

$$\omega = \frac{f_6df_4 \wedge df_3 + f_5df_1 \wedge df_4 + f_4df_2 \wedge df_4 + f_5df_2 \wedge df_3}{f_5^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_3, \quad p_1 = \frac{-f_6f_3 + f_5f_1 + f_2f_4}{f_5^2}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_5},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_5X_4, f_4X_4 - f_5X_3, f_5X_2 - f_6X_4, f_5X_1 + f_6X_3 + f_4X_2, 0, 0)}{f_5^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,7}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,7}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_5$ ,  $[e_2, e_5] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта  $I_1 = f_5$ ,  $I_2 = f_6$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.8.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_5, f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,7}$ , имеет вид

$$\omega = \frac{f_6 df_1 \wedge df_4 + f_4 df_4 \wedge df_2 + f_5 df_2 \wedge df_3}{f_5 f_6} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_3, \quad p_1 = \frac{f_6 f_1 - f_4 f_2}{f_5 f_6}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6 X_4, f_4 X_4 - f_5 X_3, f_5 X_2, f_6 X_1 - f_4 X_2, 0, 0)}{f_5 f_6},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,8}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,8}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_3 + e_5$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_2, e_5] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта  $I_1 = f_4$ ,  $I_2 = f_6$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.9.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_4, f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,8}$ , имеет вид

$$\omega = \frac{f_4 df_2 \wedge df_5 + (f_3 + f_5) df_5 \wedge df_3 + f_6 df_1 \wedge df_3}{f_4 f_6} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_5, \quad q_2 = f_3, \quad p_1 = \frac{2f_4f_2 - f_3^2 - 2f_5f_3}{f_4f_6}, \quad p_2 = \frac{f_1}{f_4},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6X_3, -f_4X_5, f_6X_1 + (f_3 + f_5)X_5, 0, f_4X_2 - (f_3 + f_5)X_3, 0)}{f_4f_6},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,9}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,9}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_5] = e_6$ ,  $[e_2, e_3] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта  $I_1 = f_4$ ,  $I_2 = f_6$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.10.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,9}$ , имеет вид

$$\omega = \frac{f_6df_2 \wedge df_3 + f_6df_1 \wedge df_5 + f_3df_3 \wedge df_5}{f_6^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_5, \quad q_2 = f_3, \quad p_1 = \frac{2f_6f_1 + f_3^2 + 2f_4f_2}{2f_6^2}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6X_5, f_4X_5 - f_6X_3, f_6X_2 - f_3X_3, 0, f_6X_1 + f_3X_3 - f_4X_2, 0)}{f_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,10}^a$ .** В алгебре Ли  $A_{6,10}^a$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_3] = e_5$ ,  $[e_1, e_4] = e_6$ ,  $[e_2, e_3] = ae_6$ ,  $[e_2, e_4] = e_5$ ,  $a \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта  $I_1 = f_5$ ,  $I_2 = f_6$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.11.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_5^2 - af_6^2 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,10}^a$ , имеет вид

$$\omega = \frac{-f_5 df_3 \wedge df_1 + f_6 df_3 \wedge df_2 - f_3 df_3 \wedge df_4 + af_6 df_4 \wedge df_1 - f_5 df_4 \wedge df_2}{f_5^2 - af_6^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_3, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = \frac{f_5 f_1 - f_6 f_2 + f_3 f_4}{f_5^2 - af_6^2}, \quad p_2 = \frac{f_5 f_2 - af_6 f_1}{f_5^2 - af_6^2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_5 X_3 + af_6 X_4, -f_5 X_4 + f_6 X_3, f_5 X_1 - f_6 X_6 + f_3 X_4, f_5 X_2 - af_6 X_1 - f_3 X_3, 0, 0)}{f_5^2 - af_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,11}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,11}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_5$ ,  $[e_2, e_3] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта  $I_1 = f_5$ ,  $I_2 = f_6$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.12.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_5, f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы

Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,11}$ , имеет вид

$$\omega = \frac{f_3 df_3 \wedge df_4 + f_4 df_4 \wedge df_2 + f_6 df_1 \wedge df_6 + f_5 df_2 \wedge df_3}{f_5 f_6} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_3, \quad p_1 = \frac{f_3^2 - 2f_2 f_4 + 2f_6 f_1}{2f_5 f_6}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6 X_4, f_4 X_4 - f_5 X_3, f_5 X_2 - f_3 X_4, f_6 X_1 + f_3 X_3 - f_4 X_2, 0, 0)}{f_5 f_6},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,12}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,12}$  имеются три ненулевых коммутатора  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_6$ ,  $[e_2, e_5] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта  $I_1 = f_6$ ,  $I_2 = 2f_3 f_6 - f_4^2$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.13.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,12}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_4 + df_2 \wedge df_5}{f_6} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_5, \quad p_1 = \frac{f_1}{f_6}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_4, -X_5, 0, X_1, X_2, 0)}{f_6},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,13}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,13}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_5$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_6$ ,  $[e_2, e_5] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта  $I_1 = f_6$ ,  $I_2 = 2f_3f_6 - f_4^2$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.14.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,13}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_6 df_4 \wedge df_1 + f_6 df_2 \wedge df_5 + f_5 df_4 \wedge df_5}{f_6^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_1, \quad q_2 = f_5, \quad p_1 = \frac{f_4}{f_6}, \quad p_2 = \frac{f_6 f_2 + f_5 f_4}{f_6^2},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6 X_4, -f_6 X_5, 0, f_6 X_1 + f_5 X_5, f_6 X_2 - f_5 X_4, 0)}{f_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,14}^a$ .** В алгебре Ли  $A_{6,14}^a$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_6$ ,  $[e_2, e_3] = e_5$ ,  $[e_2, e_5] = ae_6$ ,  $a \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$I_1 = f_6$ ,  $I_2 = f_5^2 + af_4^2 - 2af_3f_6$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант.

**Лемма 3.5.15.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,14}^a$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \left. \frac{df_1 \wedge df_4 + df_2 \wedge df_5}{af_6} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_5, \quad p_1 = \frac{f_1}{af_6}, \quad p_2 = \frac{f_2}{af_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-aX_4, -X_5, 0, aX_1, X_2, 0)}{af_6},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,15}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,15}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_3 + e_5$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_6$ ,  $[e_2, e_5] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта  $I_1 = f_6$ ,  $I_2 = f_4^2 - 2f_3f_6$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант. Напомним, что орбита общего положения задаётся уравнениями  $f_6 = C_1$ ,  $f_4^2 - 2f_3f_6 = C_2$ .

**Лемма 3.5.16.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,15}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \left. \frac{f_6 df_1 \wedge df_4 + (f_3 + f_5) df_4 \wedge df_5 + f_6 df_5 \wedge df_2}{f_6^2} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь функция  $f_3$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  равна

$$f_3 = \frac{f_4^2 - C_2}{2f_6}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_2, \quad p_1 = \frac{2f_6f_1 - f_5^2 - 2f_3f_5}{2f_6^2}, \quad p_2 = \frac{f_5}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6X_4, -f_6X_5, 0, f_6X_1 + (f_3 + f_5)X_5, (f_3 + f_5)X_4 - f_6X_2, 0)}{f_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,16}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,16}$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_5$ ,  $[e_1, e_5] = e_6$ ,  $[e_2, e_3] = e_5$ ,  $[e_2, e_4] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_6, \quad I_2 = 3f_3f_6^2 + f_5^3 - 3f_4f_5f_6,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Напомним, что орбита общего положения задаётся уравнениями

$$f_6 = C_1, \quad 3f_3f_6^2 + f_5^3 - 3f_4f_5f_6 = C_2.$$

**Лемма 3.5.17.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,16}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_5df_2 \wedge df_5 + f_6df_5 \wedge df_1 + f_6df_2 \wedge df_4}{f_6^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_5, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = \frac{f_5f_2 - f_6f_1}{f_6^2}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6 X_5, f_5 X_5 - f_6 X_4, 0, f_6 X_2, f_5 X_2 - f_6 X_1, 0)}{f_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,17}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,17}$  имеются четыре ненулевых коммутатора  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_6$ ,  $[e_2, e_5] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта  $I_1 = f_6$ ,  $I_2 = f_4^2 - 2f_3 f_6$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант. Напомним, что орбита общего положения задаётся уравнениями  $f_6 = C_1$ ,  $f_4^2 - 2f_3 f_6 = C_2$ .

**Лемма 3.5.18.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,17}$ , имеет вид

$$\omega = \left. \frac{f_3 df_4 \wedge df_5 + f_6 df_4 \wedge df_2 + f_6 df_1 \wedge df_5}{f_6^2} \right|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь функция  $f_3$  равна

$$f_3 = \frac{f_4^2 - C_2}{2f_6}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_1, \quad p_1 = -\frac{f_3 f_5 + f_6 f_2}{f_6^2}, \quad p_2 = -\frac{f_5}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6 X_4, -f_6 X_5, 0, f_6 X_2 - f_3 X_4, f_6 X_1 + f_3 X_5, 0)}{f_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,18}^a$ .** В алгебре Ли  $A_{6,18}^a$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_6$ ,  $[e_2, e_3] = e_5$ ,  $[e_2, e_5] = ae_6$ ,  $a \neq 0$ , базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_6, \quad I_2 = f_5^2 + af_4^2 - 2af_3f_6,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Напомним, что орбита общего положения задаётся уравнениями

$$f_6 = C_1, \quad f_5^2 + af_4^2 - 2af_3f_6 = C_2.$$

**Лемма 3.5.19.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,18}^a$ , имеет вид

$$\omega = \frac{af_6df_1 \wedge df_4 + f_3df_5 \wedge df_4 + f_6df_2 \wedge df_5}{af_6^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь функция  $f_3$  на орбите  $\mathcal{O}(f)$  равна

$$f_3 = \frac{f_5^2 + af_4^2 - C_2}{2af_6}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_4, \quad q_2 = f_5, \quad p_1 = \frac{3a^2f_6^2f_1 - f_5^3 - af_4^2f_5 + 3af_3f_6f_5}{3a^2f_6^3}, \quad p_2 = \frac{f_2}{af_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-af_6X_4, -f_6X_5, 0, af_6X_1 + f_3X_5, f_6X_2 - f_3X_4, 0)}{af_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,19}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,19}$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_5$ ,  $[e_1, e_5] = e_6$ ,  $[e_2, e_3] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$I_1 = f_6$ ,  $I_2 = f_5^2 - 2f_4f_6$ , через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнениями  $f_6 = C_1$ ,  $f_5^2 - 2f_4f_6 = C_2$ .

**Лемма 3.5.20.** *Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,19}$ , в координатах  $f_1, f_2, f_3, f_5$  имеет вид*

$$\omega = \frac{f_6 df_1 \wedge df_5 + f_3 df_3 \wedge df_5 + f_4 df_5 \wedge df_2 + f_6 df_2 \wedge df_3}{f_6^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь функция  $f_4$  равна

$$f_4 = \frac{f_5^2 - C_2}{2f_6}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_5, \quad q_2 = f_3, \quad p_1 = \frac{2f_6f_1 + f_3^2 - f_2f_4}{f_6^2}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6X_5, f_4X_5 - f_6X_3, f_6X_2 - f_3X_5, 0, f_6X_1 + f_3X_3 - f_4X_2, 0)}{f_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,20}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,20}$  имеются шесть ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_3] = e_4$ ,  $[e_1, e_4] = e_5$ ,  $[e_1, e_5] = e_6$ ,  $[e_2, e_3] = e_5$ ,  $[e_2, e_4] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_6, \quad I_2 = f_5^3 + 3f_3f_6^2 - 3f_4f_5f_6,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнениями

$$f_6 = C_1, \quad f_5^3 + 3f_3f_6^2 - 3f_4f_5f_6 = C_2.$$

**Лемма 3.5.21.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,20}$ , имеет вид

$$\omega = \frac{f_6 df_1 \wedge df_5 + f_3 df_4 \wedge df_5 + f_5 df_5 \wedge df_2 + f_6 df_2 \wedge df_4}{f_6^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

Здесь функция  $f_3$  равна

$$f_3 = \frac{3f_4 f_5 f_6 + C_2 - f_5^3}{3f_6^2}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_5, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = \frac{2f_6 f_1 + f_3 f_4 - 2f_5 f_2}{2f_6^2}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6 X_5, f_5 X_5 - f_6 X_4, 0, f_6 X_2 - f_3 X_5, f_6 X_1 + f_3 X_4 - f_5 X_2, 0)}{f_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,21}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,21}$  имеются пять ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_5] = e_6$ ,  $[e_2, e_3] = e_4$ ,  $[e_2, e_4] = e_5$ ,  $[e_3, e_4] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_6, \quad I_2 = f_4^2 + 2f_2 f_6 - 2f_3 f_5,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнениями

$$f_6 = C_1, \quad I_2 = f_4^2 + 2f_2 f_6 - 2f_3 f_5 = C_2.$$

**Лемма 3.5.22.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,21}$ , в координатах  $f_1, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{df_1 \wedge df_5 + df_3 \wedge df_4}{f_6} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_5, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = \frac{f_1}{f_6}, \quad p_2 = \frac{f_3}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-X_5, 0, -X_4, X_3, X_1, 0)}{f_6},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

**Алгебра Ли  $A_{6,22}$ .** В алгебре Ли  $A_{6,22}$  имеются шесть ненулевых коммутаторов  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_3] = e_5$ ,  $[e_1, e_5] = e_6$ ,  $[e_2, e_3] = e_4$ ,  $[e_2, e_4] = e_5$ ,  $[e_3, e_4] = e_6$  базисных векторов  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Следовательно, коприсоединённое представление соответствующей группы Ли имеет два функционально независимых инварианта

$$I_1 = f_6, \quad I_2 = 2f_5^3 + 3f_4^2 f_6 + 6f_2 f_6^2 - 6f_3 f_5 f_6,$$

через которые функционально выражается любой другой инвариант. Орбита общего положения задаётся уравнениями

$$f_6 = C_1, \quad I_2 = 2f_5^3 + 3f_4^2 f_6 + 6f_2 f_6^2 - 6f_3 f_5 f_6 = C_2.$$

**Лемма 3.5.23.** Каноническая симплектическая структура  $\omega$  на орбитах  $\mathcal{O}(f)$  общего положения ( $f_6 \neq 0$ ) коприсоединённого представления  $\text{Ad}^*$  группы Ли, отвечающей алгебре Ли  $A_{6,22}$ , в координатах  $f_1, f_3, f_4, f_5$  имеет вид

$$\omega = \frac{f_6 df_1 \wedge df_5 + f_5 df_4 \wedge df_5 + f_6 df_3 \wedge df_4}{f_6^2} \Big|_{\mathcal{O}(f)}.$$

В качестве канонических координат на орбите  $\mathcal{O}(f)$  можно взять функции

$$q_1 = f_5, \quad q_2 = f_4, \quad p_1 = \frac{f_6 f_1 + f_5 f_4}{f_6^2}, \quad p_2 = \frac{f_3}{f_6},$$

при этом

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Плоская симплектическая связность (с тривиальной группой голономии), задаваемая в этой системе координат функциями  $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$ , позволяет определить нетривиальные классы Маслова на всех таких орбитах.

**Доказательство.** Простые вычисления показывают, что если  $X = \text{ad}_x^* f$ , то можно положить

$$x = \frac{(-f_6 X_5, 0, -f_6 X_4, f_6 X_3 - f_5 X_5, f_6 X_1 + f_5 X_4, 0)}{f_6^2},$$

где  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ ,  $f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ . Отсюда вытекает, что форма  $\omega$  имеет вид, указанный в лемме. Утверждение, касающееся канонических координат, проверяется непосредственно с учётом явного вида формы  $\omega$ .  $\square$

### 3.6. Плоские симплектические связности на орбитах коприсоединённого представления тензорных расширений групп Ли малых размерностей

Пусть  $G$  — произвольная алгебра Ли,  $\Omega(G) = G \otimes (\mathbb{R}[x]/(x^2))$ ,  $g$  — группа Ли, отвечающая алгебре Ли  $G$ , а  $\Omega(g)$  — группа Ли, отвечающая алгебре Ли  $\Omega(G)$ . Для функции  $F$ , определённой на пространстве  $G^*$ , алгоритм (A) из главы 1 позволяет построить набор функций,  $\mathcal{A}(F) = \{f^{(1)}, F^{(2)}\}$  (см. разделы 1.1 и 1.2).

Предположим, что  $S$  — семейство функций, определённых на пространстве  $G^*$ , и пусть  $S$  представлено в виде объединения двух непересекающихся подмножеств

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset, \quad S_1 = \{q_1, \dots, q_n\}, \quad S_2 = \{p_1, \dots, p_n\}.$$

Положим

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S_1) \cup \mathcal{L}(S_2),$$

где

$$\mathcal{L}(S_1) = \{q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}, q_1^{(2)}, \dots, q_n^{(2)}\}, \quad \mathcal{L}(S_2) = \{p_1^{(2)}, \dots, p_n^{(2)}, p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)}\}.$$

Определим две функции

$$\mathcal{B}(S) = \sum_{f \in \mathcal{A}(S)} f^2, \quad \mathcal{T}(S) = \sum_{f \in \mathcal{A}(S_1)} f^2 + \sum_{f \in \mathcal{A}(S_2)} \sin^2 f$$

на пространстве  $\Omega(G)^*$ .

Итог нашего исследования плоских симплектических связностей на орбитах коприсоединённого представления групп Ли малых размерностей подводится в теоремах 3.6.1–3.6.4.

**Теорема 3.6.1.** Пусть  $G$  — неразложимая вещественная трёхмерная алгебра Ли,  $G \neq \mathfrak{so}(3)$ . Тогда на всех орбитах  $\mathcal{O}_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $g_s$ , отвечающей алгебре Ли

$$G_s = (\dots (G \otimes \mathbb{R}[x_1]/(x_1^2) \otimes \dots) \otimes \mathbb{R}[x_s]/(x_s^2),$$

определены нетривиальные классы Маслова, где  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+1}$ . На всех этих орбитах имеются вполне интегрируемые гамильтоновы системы, на торах Лиу-

вилля которых индексы Маслова нетривиальны. Гамильтонианы этих систем получаются с помощью алгоритмов  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{T}$  из следующих систем функций  $S = S_1 \cup S_2$  (в базисе, указанном при исследовании трёхмерных алгебр Ли в разделе 3.2):

$$1) \quad S_1 = \{q = f_3\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_2}{f_1}\right\};$$

$$2) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_3}{f_1}\right\};$$

$$3) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_3}{f_1}\right\};$$

$$4) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_3}{f_1}\right\};$$

$$5) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_3}{f_1}\right\};$$

6\* а) на карте  $u_1 = \{f_1 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{q = f_3\}, \quad S_2 = \left\{p = \arctg \frac{f_2}{f_1}\right\};$$

6\* б) на карте  $u_2 = \{f_2 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{q = f_3\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{f_1}{f_2}\right\};$$

7\* а) на карте  $u_1 = \{af_1 - f_2 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{q = f_3\}, \quad S_2 = \left\{p = \arctg \frac{f_2}{f_1}\right\};$$

7\* б) на карте  $u_2 = \{f_1 + af_2 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{q = f_3\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{f_1}{f_2}\right\};$$

8\* а) для однополостных гиперboloидов  $f_2^2 + f_1 f_2 = a^2$  положим

$$S_1 = \left\{q = \operatorname{arch} \frac{f_2}{a}\right\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{f_2^2}{a^2} - 1} \operatorname{arch} \frac{f_1^2 - f_2^2}{2(f_2^2 - a^2)}\right\};$$

8\* б) для двуполостных гиперboloидов  $f_2^2 + f_1 f_2 = -a^2$  положим

$$S_1 = \left\{q = \operatorname{arch} \frac{f_2}{a}\right\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{f_2^2}{a^2} + 1} \operatorname{arch} \frac{f_1^2 - f_2^2}{2(f_2^2 + a^2)}\right\}.$$

Здесь звёздочкой обозначены те случаи, когда для построения нужного гамильтониана нужно использовать алгоритм  $\mathcal{T}$ . Применяя алгоритм  $\mathcal{B}$  к указанным функциям  $(p, q)$ , мы получим канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $g_s$ .

**Доказательство.** Утверждение следует из результатов раздела 3.2 и теоремы 1.6.1.  $\square$

**Теорема 3.6.2.** Пусть  $G$  — неразложимая вещественная четырёхмерная алгебра Ли. Тогда на всех орбитах  $\mathcal{O}_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $g_s$ , отвечающей алгебре Ли

$$G_s = (\dots (G \otimes \mathbb{R}[x_1]/(x_1^2) \otimes \dots) \dots) \otimes \mathbb{R}[x_s]/(x_s^2),$$

определены нетривиальные классы Маслова, где  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+2}$ , если  $\text{ind } G = 0$ , и  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+1}$ , если  $\text{ind } G = 2$ . На всех этих орбитах имеются вполне интегрируемые гамильтоновы системы, на торах Лиувилля которых индексы Маслова нетривиальны. Гамильтонианы этих систем получаются с помощью алгоритмов  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{T}$  из следующих систем функций  $S = S_1 \cup S_2$  (в базисе, указанном при исследовании четырёхмерных алгебр Ли в разделе 3.3):

- 1)  $S_1 = \{q = f_4\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_2}{f_1}\right\};$
- 2)  $S_1 = \{q = f_4\}, \quad S_2 = \{p = f_1\};$
- 3)  $S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_4}{f_1}\right\};$
- 4)  $S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_4}{f_1}\right\};$
- 5)  $S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_4}{f_1}\right\};$
- 6)  $S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_4}{af_1}\right\};$
- 7)  $S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_2\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{2f_2f_3 - 2f_4f_1 - f_2^2}{8f_1^2}, \quad p_2 = -\frac{f_3}{2f_1};$
- 8)  $S_1 = \{q = f_3\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_2}{f_1}\right\};$
- 9)  $S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_2\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2f_3 - f_1f_4}{(1+b)f_1^2}, \quad p_2 = -\frac{f_3}{f_1};$
- 10)  $S_1 = \{q = f_3\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_2}{f_1}\right\};$
- 11)  $S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_2\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{2af_2f_3 - f_2^2 - f_3^2 - 2f_1f_4}{4af_1^2}, \quad p_2 = -\frac{f_3}{f_1};$

$$12^*) \quad S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_2\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$$

$$\text{где } p_1 = \frac{2af_2f_3 - f_2^2 - f_3^2 - 2f_1f_4}{4af_1^2}, \quad p_2 = -\frac{f_3}{f_1}.$$

Здесь звёздочкой обозначены те случаи, когда для построения нужного гамильтониана нужно использовать алгоритм  $\mathcal{T}$ . Применяя алгоритм  $\mathcal{B}$  к указанным функциям  $(p, q)$ , мы получим канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $g_s$ .

**Доказательство.** Утверждение следует из результатов раздела 3.3 и теоремы 1.6.1.  $\square$

**Теорема 3.6.3.** Пусть  $G$  — неразложимая вещественная пятимерная алгебра Ли. Тогда на всех орбитах  $\mathcal{O}_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $g_s$ , отвечающей алгебре Ли

$$G_s = (\dots (G \otimes \mathbb{R}[x_1]/(x_1^2) \otimes \dots) \dots) \otimes \mathbb{R}[x_s]/(x_s^2),$$

определены нетривиальные классы Маслова, где  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+2}$ , если  $\text{ind } G = 1$ , и  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+1}$ , если  $\text{ind } G = 3$ . На всех этих орбитах имеются вполне интегрируемые гамильтоновы системы, на торах Лиувилля которых индексы Маслова нетривиальны. Гамильтонианы этих систем получаются с помощью алгоритмов  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{T}$  из следующих систем функций  $S = S_1 \cup S_2$  (в базисе, указанном при исследовании пятимерных алгебр Ли в разделе 3.4):

- 1)  $S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_3}{f_1}\right\};$
- 2)  $S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_2}{f_1}\right\};$
- 3 а)  $S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \{p\},$  где  

$$p = \frac{1}{f_1\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \arctg \frac{f_3}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \text{ на орбитах, где } f_1 \neq 0;$$
- 3 б)  $S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \{p\},$   
где 
$$p = \frac{1}{f_2\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \arctg \frac{f_3}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}} \text{ на орбитах, где } f_2 \neq 0;$$
- 4)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_5\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_3}{f_1};$
- 5)  $S_1 = \{q_1 = f_2, q_2 = f_5\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
где  $p_1 = \frac{f_2f_3}{f_1^2}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_1};$
- 6)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_2\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
где  $p_1 = \frac{f_3f_2 - f_1f_4}{f_1^2}, \quad p_2 = \frac{f_2f_4 - f_5f_1}{f_1^2};$

$$7) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_5}{f_1}\right\};$$

$$8) \quad S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_2}{f_1}\right\};$$

$$9) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_5}{f_1}\right\};$$

$$10) \quad S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_2}{f_1}\right\};$$

$$11) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_5}{f_1}\right\};$$

$$12) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_5}{f_1}\right\};$$

$$13) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_5}{f_1}\right\};$$

$$14) \quad S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_2}{f_1}\right\};$$

$$15) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_5}{f_1}\right\};$$

$$16) \quad S_1 = \{q = f_1\}, \quad S_2 = \left\{p = -\frac{f_5}{f_1}\right\};$$

17\* а) на карте  $u_1 = \{pf_1 - f_2 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \left\{p = \operatorname{arctg} \frac{f_2}{f_1}\right\};$$

17\* б) на карте  $u_2 = \{f_1 + pf_2 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{f_1}{f_2}\right\};$$

18\* а) на карте  $u_1 = \{pf_1 - f_2 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \left\{p = \operatorname{arctg} \frac{f_2}{f_1}\right\};$$

18\* б) на карте  $u_2 = \{f_1 + pf_2 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{f_1}{f_2}\right\};$$

$$19) \quad S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_3\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$$

$$\text{где } p_1 = -\frac{(a-1)f_2f_3 + f_1f_5}{af_1^2}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_1}, \quad a \neq 0;$$

- 20)  $S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_3\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{(1-a)f_2f_3 - f_1f_5}{af_1^2}, p_2 = \frac{f_2}{f_1}, a \neq 0;$
- 21)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_1\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, p_2 = \frac{f_3^2 - 2f_2f_3 - 2f_2f_4}{4f_1^2} - \frac{f_5}{2f_1};$
- 22)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_4\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, p_2 = \frac{f_3^2}{2f_1} + \frac{f_5}{f_4};$
- 23)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_1\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, p_2 = \frac{f_3^2 - 2f_5f_1 - 2f_2f_3}{4f_1^2};$
- 24)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_1\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, p_2 = \frac{f_3^2 - 2f_5f_1 - 2f_2f_3}{4f_1^2};$
- 25)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_4\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, p_2 = -\frac{f_5}{bf_4} + \frac{f_2^2 + f_3^2 - 2pf_2f_3}{2bf_1f_4};$
- 26 а) если  $p \neq 0$ , то  
 $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_1\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, p_2 = \frac{f_2^2 + f_3^2 - 2pf_2f_3}{4pf_1^2};$
- 26 б) если  $p = 0$ , то  
 $S_1 = \{q_1 = f_2, q_2 = f_4\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = -\frac{f_3}{f_1} - \frac{f_2f_4}{f_1^2}, p_2 = \frac{f_3^2}{2f_1^2} - \frac{f_5}{f_1};$
- 27)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_1\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, p_2 = -\frac{f_5}{f_1} + (f_4 - f_3)\frac{f_2}{f_1^2};$
- 28)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_4\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, p_2 = -\frac{f_2f_3 + f_4f_2}{f_4f_1} - \frac{f_5}{f_4};$
- 29)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_1\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, p_2 = -\frac{f_2f_3}{f_1^2} - \frac{f_5}{f_1};$

- 30 а) если  $a \neq -1$ , то  
 $S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_4\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = -\frac{f_2 f_4}{(a+1)f_1^2} - \frac{f_5}{(a+1)f_1}, \quad p_2 = \frac{f_2}{f_1};$
- 30 б) если  $a = -1$ , то  
 $S_1 = \{q_1 = f_2, q_2 = f_3\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{2f_3 f_4 + f_2 f_5}{f_2^2 - 2f_1 f_3}, \quad p_2 = -\frac{f_2 f_4 + f_1 f_5}{f_2^2 - 2f_1 f_3};$
- 31)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_1\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_3^3 - 3f_1 f_2 f_3 - 3f_1 f_2 f_4}{9f_1^3} - \frac{f_5}{3f_1};$
- 32)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_1\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = -\frac{f_5}{f_1};$
- 33)  $S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_2\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = -\frac{f_4}{f_1}, \quad p_2 = -\frac{f_5}{f_2};$
- 34)  $S_1 = \{q_1 = f_2, q_2 = f_5\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = -\frac{f_4}{f_2}, \quad p_2 = \frac{f_3}{f_2};$
- 35)  $S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_3\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_3 f_5 - f_2 f_4}{f_2^2 + f_3^2}, \quad p_2 = -\frac{f_2 f_5 + f_3 f_4}{f_2^2 + f_3^2};$
- 36)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_1\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_2}{f_1}, \quad p_2 = -\frac{f_4}{f_1};$
- 37)  $S_1 = \{q_1 = f_2, q_2 = f_1\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = -\frac{f_3}{f_1}, \quad p_2 = \frac{f_2 f_3}{2f_1^2} - \frac{f_4}{2f_1};$
- 38)  $S_1 = \{q_1 = f_2, q_2 = f_1\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = -\left(\frac{f_3}{f_1} \ln f_1 + \frac{f_5}{f_2}\right), \quad p_2 = -\frac{f_4}{f_1};$
- 39\* а) на карте  $u_1 = \{f_1 \neq 0\}$  положим  
 $S_1 = \{q_1 = f_5, q_2 = f_2 - f_3 p_2\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \ln \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad p_2 = \operatorname{arctg} \frac{f_2}{f_1};$

39\* б) на карте  $u_2 = \{f_2 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{q_1 = f_5, q_2 = f_2 - f_3 p_2\}, \quad S_2 = \{p_1, p_2\},$$

$$\text{где } p_1 = \ln \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad p_2 = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{f_1}{f_2};$$

40\* а) на карте  $u_1 = \{f_4 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{p_1, p_2\}, \quad S_2 = \{q_1, q_2\},$$

$$\text{где } q_1 = \sqrt{f_4^2 + f_5^2}, \quad q_2 = \arctg \frac{f_5}{f_4},$$

а  $p_1, p_2$  — функции, построенные в разделе 3.4.2;

40\* б) на карте  $u_2 = \{f_5 \neq 0\}$  положим

$$S_1 = \{p_1, p_2\}, \quad S_2 = \{q_1, q_2\},$$

$$\text{где } q_1 = \sqrt{f_4^2 + f_5^2}, \quad p_2 = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{f_4}{f_5},$$

а  $p_1, p_2$  — функции, построенные в разделе 3.4.2.

Здесь звёздочкой обозначены те случаи, когда для построения нужного гамильтониана нужно использовать алгоритм  $\mathcal{T}$ . Применяя алгоритм  $\mathcal{B}$  к указанным функциям  $(p, q)$ , мы получим канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $g_s$ .

**Доказательство.** Утверждение следует из результатов раздела 3.4 и теоремы 1.6.1.  $\square$

**Теорема 3.6.4.** Пусть  $G$  — неразложимая вещественная нильпотентная шестимерная алгебра Ли. Тогда на всех орбитах  $\mathcal{O}_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $g_s$ , отвечающей алгебре Ли

$$G_s = (\dots (G \otimes \mathbb{R}[x_1]/(x_1^2) \otimes \dots) \dots) \otimes \mathbb{R}[x_s]/(x_s^2),$$

определены нетривиальные классы Маслова, где  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+1}$ , если  $\text{ind } G = 4$ , и  $\dim \mathcal{O}_s = 2^{s+2}$ , если  $\text{ind } G = 2$ . На всех этих орбитах имеются вполне интегрируемые гамильтоновы системы, на торах Лиувилля которых индексы Маслова нетривиальны. Гамильтонианы этих систем получаются с помощью алгоритма  $\mathcal{B}$  из следующих систем функций  $S = S_1 \cup S_2$  (в базисе, указанном при исследовании шестимерных алгебр Ли в разделе 3.5):

$$1) \quad S_1 = \{q = f_3\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_1}{f_4}\right\};$$

$$2) \quad S_1 = \{q = f_5\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_1}{f_6}\right\};$$

$$3 \text{ а)} \quad S_1 = \{q = f_3\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_1}{f_4}\right\} \text{ на орбитах, где } f_4 \neq 0;$$

$$3 \text{ б)} \quad S_1 = \{q = f_3\}, \quad S_2 = \left\{p = \frac{f_2}{f_5}\right\} \text{ на орбитах, где } f_5 \neq 0;$$

- 3 в)  $S_1 = \{q = f_2\}$ ,  $S_2 = \left\{p = \frac{f_1}{f_6}\right\}$  на орбитах, где  $f_6 \neq 0$ ;
- 4)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_4\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{f_1}{f_6}$ ,  $p_2 = \frac{f_5 f_3 - f_6 f_2}{f_6^2}$ ;
- 5)  $S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_2\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{a f_6 f_4 - f_5 f_3}{f_5^2 - a f_6^2}$ ,  $p_2 = \frac{f_6 f_3 - f_5 f_4}{f_5^2 - a f_6^2}$ ;
- 6)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_3\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{-f_6 f_3 + f_5 f_1 + f_2 f_4}{f_5^2}$ ,  $p_2 = \frac{f_2}{f_5}$ ;
- 7)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_3\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{f_6 f_1 - f_4 f_2}{f_5 f_6}$ ,  $p_2 = \frac{f_2}{f_6}$ ;
- 8)  $S_1 = \{q_1 = f_5, q_2 = f_3\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{2 f_4 f_2 - f_3^2 - 2 f_5 f_3}{f_4 f_6}$ ,  $p_2 = \frac{f_1}{f_4}$ ;
- 9)  $S_1 = \{q_1 = f_5, q_2 = f_3\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{2 f_6 f_1 + f_3^2 + 2 f_4 f_2}{2 f_6^2}$ ,  $p_2 = \frac{f_2}{f_6}$ ;
- 10)  $S_1 = \{q_1 = f_3, q_2 = f_4\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{f_5 f_1 - f_6 f_2 + f_3 f_4}{f_5^2 - a f_6^2}$ ,  $p_2 = \frac{f_5 f_2 - a f_6 f_1}{f_5^2 - a f_6^2}$ ;
- 11)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_3\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{f_3^2 - 2 f_2 f_4 + 2 f_6 f_1}{2 f_5 f_6}$ ,  $p_2 = \frac{f_2}{f_6}$ ;
- 12)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_5\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{f_1}{f_6}$ ,  $p_2 = \frac{f_2}{f_6}$ ;
- 13)  $S_1 = \{q_1 = f_1, q_2 = f_5\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{f_4}{f_6}$ ,  $p_2 = \frac{f_6 f_2 + f_5 f_4}{f_6^2}$ ;
- 14)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_5\}$ ,  $S_2 = \{p_1, p_2\}$ ,  
 где  $p_1 = \frac{f_1}{a f_6}$ ,  $p_2 = \frac{f_2}{a f_6}$ ;

- 15)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_2\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{2f_6f_1 - f_5^2 - 2f_3f_5}{2f_6^2}, p_2 = \frac{f_5}{f_6};$
- 16)  $S_1 = \{q_1 = f_5, q_2 = f_4\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_5f_2 - f_6f_1}{f_6^2}, p_2 = \frac{f_2}{f_6};$
- 17)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_1\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = -\frac{f_3f_5 + f_6f_2}{f_6^2}, p_2 = -\frac{f_5}{f_6};$
- 18)  $S_1 = \{q_1 = f_4, q_2 = f_5\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{3a^2f_6^2f_1 - f_5^3 - af_4^2f_5 + 3af_3f_6f_5}{3a^2f_6^3}, p_2 = \frac{f_2}{af_6};$
- 19)  $S_1 = \{q_1 = f_5, q_2 = f_3\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{2f_6f_1 + f_3^2 - f_2f_4}{f_6^2}, p_2 = \frac{f_2}{f_6};$
- 20)  $S_1 = \{q_1 = f_5, q_2 = f_4\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{2f_6f_1 + f_3f_4 - 2f_2f_5}{2f_6^2}, p_2 = \frac{f_2}{f_6};$
- 21)  $S_1 = \{q_1 = f_5, q_2 = f_4\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_1}{f_6}, p_2 = \frac{f_3}{f_6};$
- 22)  $S_1 = \{q_1 = f_5, q_2 = f_4\}, S_2 = \{p_1, p_2\},$   
 где  $p_1 = \frac{f_6f_1 + f_5f_4}{f_6^2}, p_2 = \frac{f_3}{f_6}.$

Применяя алгоритм В к указанным функциям  $(p, q)$ , мы получим канонические координаты на всех орбитах общего положения коприсоединённого представления группы Ли  $g_s$ .

**Доказательство.** Утверждение следует из результатов раздела 3.5 и теоремы 1.6.1.  $\square$

## 4. Полная интегрируемость некоторых классов неконсервативных систем

Если в первой части работы рассматривались консервативные системы, для которых имеется техника исследования, опирающаяся на топологические инварианты, то во второй части изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря,

неприменима. Таким образом, для систем из второй части работы необходимо в некотором смысле «в лоб» интегрировать основное уравнение динамики. Мы обобщаем старые, а также получаем новые случаи полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике двух-, трёх- и четырёхмерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил.

Результаты предлагаемой работы являются развитием предыдущих исследований, в том числе и некоторой прикладной задачи из динамики твёрдого тела [1, 49–51, 122, 166–168, 171–176, 179–181, 183, 184, 187, 188, 190, 192–195, 198, 224–229, 232], где были получены полные списки трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Позднее данное обстоятельство позволило провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которые обладали грубостью и сохранялись для систем более общего вида. Полная интегрируемость таких систем была связана с симметриями скрытого типа.

Как известно, понятие интегрируемости, вообще говоря, достаточно расплывчатое. При его построении необходимо учитывать, в каком смысле оно понимается (имеется в виду некий критерий, по которому делается вывод о том, что траектории рассматриваемой динамической системы устроены особенно «привлекательно и просто»), в классе каких функций ищутся первые интегралы и т. д. (см. [19, 21, 177, 178, 186, 189]).

В данной работе принимается подход, который учитывает в качестве класса функций для первых интегралов трансцендентные функции, причём элементарные. Здесь трансцендентность понимается не в смысле теории элементарных функций (например, тригонометрических), а в смысле наличия у них существенно особых точек (согласно классификации, принятой в теории функций комплексного переменного). При этом функции необходимо формально продолжить в комплексную область. Такие системы являются, как правило, сильно неконсервативными (см. также [189, 194]).

#### 4.1. Предварительные рассуждения и результаты

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удаётся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций [19, 21, 177, 178, 186, 189].

Эта работа возникла из плоской задачи движения в сопротивляющейся среде твёрдого тела, поверхностью контакта со средой которого является плоский участок его внешней поверхности. Силовое поле в этом случае строится из соображений воздействия среды на тело при струйном (или отрывном) обтекании в условиях квазистационарности. Оказывается, что изучение движения такого класса тел сводится к системам либо с рассеянием энергии ((чисто) диссипативные системы, или системы в диссипативном силовом поле), либо с её

подкачкой (так называемые системы с антидиссипацией, или системы с разгоняющими силами). Отметим, что подобные задачи уже появлялись в прикладной аэродинамике.

Рассматриваемые ранее задачи стимулировали и стимулируют развитие качественного аппарата исследования, который существенным образом дополняет качественную теорию неконсервативных систем с диссипацией обоих знаков (см. [19, 21, 177, 178, 186, 189]).

Были также качественно исследованы нелинейные эффекты от движения в плоской и пространственной динамике твёрдого тела и обоснована на качественном уровне необходимость введения определений относительной грубости и относительной негрубости различных степеней (см. [170—182, 184, 185]).

Следующий спектр результатов позволил во вполне определённом стиле подготовить данную работу.

1. Были разработаны методы качественного исследования диссипативных систем и систем с антидиссипацией, позволившие получить условия бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых автоколебаний, а также условия отсутствия любых особых траекторий. Метод исследования плоских топографических систем Пуанкаре и систем сравнения удалось распространить на высшие размерности. Были получены достаточные условия устойчивости по Пуассону (всюду плотности возле себя) некоторых классов незамкнутых траекторий динамических систем [224—232].
2. В двумерной и трёхмерной динамике твёрдого тела были обнаружены полные списки первых интегралов диссипативных систем и систем с антидиссипацией, являющихся трансцендентными (в смысле классификации их особенностей) функциями, выражающимися в ряде случаев через элементарные функции. Были введены новые определения свойств относительной грубости и относительной негрубости различных степеней, которыми обладают проинтегрированные системы.
3. Были получены многопараметрические семейства топологически неэквивалентных фазовых портретов, возникающие в чисто диссипативных системах (т. е. системах с переменной диссипацией с ненулевым (положительным) средним). Почти каждый портрет таких семейств (абсолютно) груб.
4. Были обнаружены новые качественные аналогии между свойствами движения свободных тел в сопротивляющейся среде, покоящейся на бесконечности, и тел закреплённых, находящихся в потоке набегающей среды [189, 194].

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на множестве семинаров, в том числе и на семинаре «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени профессора В. В. Трофимова [56] под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина.

## **4.2. Динамические системы с переменной диссипацией как класс систем, допускающих полное интегрирование**

### **4.2.1. Наглядная характеристика динамических систем с переменной диссипацией**

Поскольку при первоначальном моделировании воздействия среды на твёрдое тело использовалась экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания, потребовалось исследовать класс динамических систем, которые обладают свойством (относительной) структурной устойчивости (относительной грубости). Поэтому вполне естественно было ввести эти определения для таких систем. При этом многие из рассматриваемых систем оказались (абсолютно) грубыми по Андронову—Понтрягину [5—14].

После некоторых упрощений (например в двумерной динамике) динамическая часть общей системы уравнений плоскопараллельного движения может быть сведена к маятниковой системе второго порядка, в которой присутствует линейная неконсервативная (знакопеременная диссипативная) сила с коэффициентом, который при разных значениях имеющейся в системе периодической фазовой координаты имеет разный знак.

Таким образом, в данном случае мы будем говорить о системах с так называемой переменной диссипацией, где термин «переменный» относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к возможной смене его знака (поэтому разумнее было бы употреблять термин «знакопеременный»).

В среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация может быть как положительной («чисто» диссипативные системы), так и отрицательной (системы с разгоняющими силами), а также равной нулю (при этом не равной нулю тождественно). В последнем случае будем говорить о системах с переменной диссипацией с нулевым средним (такие системы можно ассоциировать с «почти» консервативными системами).

Как уже отмечалось ранее, были обнаружены важные механические аналогии, возникающие при сравнении качественных свойств стационарного движения свободного тела и равновесия маятника в потоке среды. Такие аналогии носят глубокий опорный смысл, поскольку позволяют перенести свойства нелинейных динамических систем для маятника на динамические системы для свободного тела. И те и другие системы принадлежат к классу так называемых маятниковых динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним.

При дополнительных условиях вышеописанная эквивалентность распространяется и на случай пространственного движения, что позволяет говорить об общем характере симметрий, имеющихся в системе с переменной диссипацией с нулевым средним при плоскопараллельном и при пространственном движении (о плоском и пространственном вариантах маятника в потоке среды см. также [122, 167]).

Ниже будут приведены классы нелинейных систем второго, третьего и высших порядков, интегрируемых в трансцендентных (в смысле теории функций комплексного переменного) элементарных функциях. Для примера, такими являются пятипараметрические динамические системы, включающие в себя большинство систем, исследовавшихся ранее в динамике маломерного (двумерный и трёхмерный случаи) твёрдого тела, взаимодействующего со средой:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= a \sin \alpha + b\omega + \gamma_1 \sin^5 \alpha + \gamma_2 \omega \sin^4 \alpha + \gamma_3 \omega^2 \sin^3 \alpha + \gamma_4 \omega^3 \sin^2 \alpha + \gamma_5 \omega^4 \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= c \sin \alpha \cos \alpha + d\omega \cos \alpha + \gamma_1 \omega \sin^4 \alpha \cos \alpha + \gamma_2 \omega^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + \gamma_3 \omega^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \gamma_4 \omega^4 \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_5 \omega^5 \cos \alpha.\end{aligned}$$

В этой связи ранее были введены определения относительной структурной устойчивости (относительной грубости) и относительной структурной неустойчивости (относительной негрубости) различных степеней. Последние свойства были доказаны для систем, появляющихся, например, в [172, 175].

Чисто диссипативные динамические системы (впрочем, как и (чисто) антидиссипативные), которые в нашем случае могут принадлежать к системам с переменной диссипацией с ненулевым средним, являются, как правило, структурно устойчивыми ((абсолютно) грубыми), а системы с переменной диссипацией с нулевым средним (которые, как правило, обладают дополнительными симметриями) являются либо структурно неустойчивыми (негрубыми), либо только относительно структурно устойчивыми (относительно грубыми). Последнее утверждение доказать в общем случае затруднительно.

Например, динамическая система вида

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \Omega + \beta \sin \alpha, \\ \dot{\Omega} &= -\beta \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

является относительно структурно устойчивой (относительно грубой) и топологически эквивалентной системе, описывающей закреплённый маятник, помещённый в поток набегающей среды [172, 175]. Ниже будет указан её первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки после её продолжения в комплексную область) функцией фазовых переменных, выражающейся через конечную комбинацию элементарных функций [172, 175]. Фазовый цилиндр  $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$  квазискоростей рассматриваемой системы имеет интересную топологическую структуру разбиения на траектории (подробнее см. [183, 186–198]).

Хотя рассматриваемая динамическая система и неконсервативна, во вращательной области (и только в ней) фазовой плоскости  $\mathbb{R}^2\{\alpha, \Omega\}$  она допускает сохранение инвариантной меры с переменной плотностью. Данное свойство характеризует рассматриваемую систему как систему с переменной диссипацией с нулевым средним.

#### 4.2.2. Одно из определений системы с переменной диссипацией с нулевым средним

Будем изучать системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих периодическую фазовую координату. Исследуемые системы обладают такими симметриями, при которых в среднем за период по периодической координате сохраняется их фазовый объём. Так, например, следующая маятниковая система с гладкой и периодической по  $\alpha$  периода  $T$  правой частью  $\mathbf{V}(\alpha, \omega)$  вида

$$\dot{\alpha} = -\omega + f(\alpha), \quad \dot{\omega} = g(\alpha), \quad f(\alpha + T) = f(\alpha), \quad g(\alpha + T) = g(\alpha),$$

сохраняет свою фазовую площадь на фазовом цилиндре за период  $T$ :

$$\int_0^T \operatorname{div} \mathbf{V}(\alpha, \omega) d\alpha = \int_0^T \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} (-\omega + f(\alpha)) + \frac{\partial}{\partial \omega} g(\alpha) \right) d\alpha = \int_0^T f'(\alpha) d\alpha = 0.$$

Рассматриваемая система эквивалентна уравнению маятника

$$\ddot{\alpha} - f'(\alpha)\dot{\alpha} + g(\alpha) = 0,$$

в котором интеграл от коэффициента  $f'(\alpha)$  при диссипативном члене  $\dot{\alpha}$  в среднем за период равен нулю.

Видно, что рассматриваемая система имеет такие симметрии, при которых она становится так называемой системой с *переменной диссипацией с нулевым средним* в смысле следующего определения (см. также [194]).

**Определение 4.2.1.** Рассмотрим гладкую автономную систему  $(n+1)$ -го порядка нормального вида, заданную на цилиндре  $\mathbb{R}^n\{x\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$ , где  $\alpha$  — периодическая координата периода  $T > 0$ . Дивергенцию правой части (которая, вообще говоря, является функцией всех фазовых переменных и не равна тождественно нулю) данной системы обозначим через  $\operatorname{div}(x, \alpha)$ . Назовём такую систему системой с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним, если функция

$$\int_0^T \operatorname{div}(x, \alpha) d\alpha$$

равна (не равна) тождественно нулю. При этом в некоторых случаях (например, когда в отдельных точках окружности  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$  возникают особенности) данный интеграл понимается в смысле главного значения.

Необходимо заметить, что дать общее определение системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним весьма непросто. Приведённое только что определение использует понятие дивергенции (как известно, дивергенция правой части системы нормального вида характеризует изменение фазового объёма в фазовом пространстве данной системы).

### 4.3. Системы с симметриями и переменной диссипацией с нулевым средним

Рассмотрим системы вида (точкой обозначена производная по времени)

$$\dot{\alpha} = f_{\alpha}(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha), \quad \dot{\omega}_k = f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha), \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

заданные на множестве

$$\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus K \times \mathbb{R}^n\{\omega\},$$

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , где функции  $f_{\lambda}(u_1, u_2, u_3)$ ,  $\lambda = \alpha, 1, \dots, n$ , трёх переменных  $u_1, u_2, u_3$  таковы:

$$\begin{aligned} f_{\lambda}(-u_1, -u_2, u_3) &= -f_{\lambda}(u_1, u_2, u_3), & f_{\alpha}(u_1, u_2, -u_3) &= f_{\alpha}(u_1, u_2, u_3), \\ f_k(u_1, u_2, -u_3) &= -f_k(u_1, u_2, u_3). \end{aligned}$$

Множество  $K$  или пусто, или состоит из конечного числа точек окружности  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$ .

Последние две переменные  $u_2, u_3$  в функциях  $f_{\lambda}(u_1, u_2, u_3)$  зависят от одного параметра  $\alpha$ , но выделены в разные группы по следующим причинам. Во-первых, не во всей области определения они однозначно выражаются друг относительно друга, а во-вторых, первая из них нечётная, а вторая — чётная функция  $\alpha$ , что по-разному влияет на симметрии системы (4.1).

Поставим в соответствие этой системе уже неавтономную систему

$$\frac{d\omega_k}{d\alpha} = \frac{f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{f_{\alpha}(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)},$$

подстановкой  $\tau = \sin \alpha$  приводимую к виду ( $k = 1, \dots, n$ )

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_k}{d\tau} &= \frac{f_k(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))}{f_{\alpha}(\omega, \tau, \varphi_{\alpha}(\tau))}, \\ \varphi_{\lambda}(-\tau) &= \varphi_{\lambda}(\tau), \quad \lambda = \alpha, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Последняя система может иметь, в частности, алгебраическую правую часть (т. е. быть отношением двух полиномов), что иногда помогает найти её первые интегралы в явном виде.

Следующее утверждение погружает рассматриваемый класс систем (4.1) в класс динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Обратное вложение, вообще говоря, не выполняется.

**Предложение 4.3.1.** Системы вида (4.1) являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним.

Данное предложение доказывается с использованием вышеперечисленных симметрий системы (4.1).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, поскольку можно предъявить множество динамических систем на двумерном цилиндре, являющихся

системами с переменной диссипацией с нулевым средним, которые не будут обладать вышеперечисленными симметриями.

В данной работе в основном будет затронут случай, когда функции  $f_\lambda(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))$  ( $\lambda = \alpha, 1, \dots, n$ ) — полиномы по  $\omega, \tau$ .

В следующих главах будут рассмотрены, в частности, маятниковые системы на двумерном цилиндре  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$  с параметром  $b > 0$  из динамики твёрдого тела [194, 198]:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\omega + b \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= \sin \alpha \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.4}$$

которым в переменных  $(\omega, \tau)$  можно поставить в соответствие уравнения с алгебраическими правыми частями

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{d\tau} &= \frac{\tau}{-\omega + b\tau}, \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \frac{\tau + b\omega[\omega^2 - \tau^2]}{-\omega + b\tau + b\tau[\omega^2 - \tau^2]}\end{aligned}$$

вида (4.2) соответственно. При этом данные системы являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним, что нетрудно проверить напрямую. Несложно убедиться, что они попадают в класс систем (4.1). Более того, каждая из них обладает первым интегралом, являющимся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного) функцией, выражающейся через конечную комбинацию элементарных функций [194].

Приведём ещё один важный пример системы более высокого порядка, обладающей перечисленными свойствами.

Системе

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -z_2 + b \sin \alpha, \\ \dot{z}_2 &= \sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{z}_1 &= z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\end{aligned}\tag{4.5}$$

с параметром  $b$ , рассматриваемой уже в трёхмерной области (о таких системах см. следующий раздел)

$$\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times \mathbb{R}^2\{z_1, z_2\}$$

(такая система также может быть приведена к эквивалентной системе на касательном расслоении  $T_*\mathbf{S}^2$  двумерной сферы  $\mathbf{S}^2$ ) и описывающей пространственное движение твёрдого тела в сопротивляющейся среде [194], поставим в соответствие систему с алгебраической правой частью

$$\frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\tau - z_1^2/\tau}{-z_2 + \beta\tau}, \quad \frac{dz_1}{d\tau} = \frac{z_1 z_2/\tau}{-z_2 + \beta\tau}.\tag{4.6}$$

Видно, что система (4.5) является системой с переменной диссипацией с нулевым средним; чтобы было полное соответствие с определением, достаточно ввести новую фазовую переменную

$$z_1^* = \ln |z_1|.$$

Более того, она обладает двумя первыми интегралами (т. е. полным списком), являющимися трансцендентными функциями и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций [194], что, как указывалось выше, и стало возможным после постановки ей в соответствие (вообще говоря, неавтономной) системы уравнений с алгебраической (полиномиальной) правой частью (4.6).

Приведённые выше системы (4.3)–(4.5), кроме того что они попадают в класс систем (4.1) и обладают переменной диссипацией с нулевым средним, ещё имеют полный список трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Итак, для поиска первых интегралов рассматриваемых систем лучше привести системы вида (4.1) к системам с полиномиальными правыми частями (4.2), от вида которых зависит возможность интегрирования в элементарных функциях исходной системы. Поэтому пойдём следующим путём: будем искать достаточные условия интегрируемости в элементарных функциях систем уравнений с полиномиальными правыми частями, исследуя при этом системы наиболее общего вида.

#### 4.4. Системы на $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ , или двумерном цилиндре

Ранее было доказано следующее утверждение, касающееся семипараметрических систем обыкновенных дифференциальных уравнений с алгебраической правой частью (см. [193]).

**Предложение 4.4.1.** Семипараметрическое семейство систем уравнений на плоскости  $\mathbb{R}^2\{x, y\}$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + \beta_1 x^3 + \beta_2 x^2 y + \beta_3 x y^2, \\ \dot{y} &= cx + dy + \beta_1 x^2 y + \beta_2 x y^2 + \beta_3 y^3\end{aligned}$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

**Следствие 4.4.2.** Системы вида

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= a \sin \alpha + b\omega + \beta_1 \sin^3 \alpha + \beta_2 \omega \sin^2 \alpha + \beta_3 \omega^2 \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= c \sin \alpha \cos \alpha + d\omega \cos \alpha + \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \beta_2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_3 \omega^3 \cos \alpha\end{aligned}$$

при любых параметрах  $a, b, c, d, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  имеют, вообще говоря трансцендентный, первый интеграл, выражающийся через элементарные функции.

В частности, системы (4.3) и (4.4) получаются из последней системы при  $a = b$ ,  $b = -1$ ,  $c = 1$ ,  $d = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$  и при  $a = b$ ,  $b = -1$ ,  $c = 1$ ,  $d = -b$ ,  $\beta_1 = -b$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_3 = b$  соответственно.

Обобщим предыдущие рассуждения. Рассмотрим возможности полного интегрирования (в элементарных функциях) систем более общего вида. А именно, нелинейность характеризуется произвольной однородной формой нечётной степени  $2n - 1$ .

Тогда справедливо более общее утверждение, чем предложение 4.4.1.

**Предложение 4.4.3.**  $(2n + 3)$ -параметрическое семейство систем уравнений на плоскости  $\mathbb{R}^2\{x, y\}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + \delta_1 x^{2n-1} + \delta_2 x^{2n-2}y + \dots + \delta_{2n-2} x^2 y^{2n-3} + \delta_{2n-1} x y^{2n-2}, \\ \dot{y} &= cx + dy + \delta_1 x^{2n-2}y + \delta_2 x^{2n-3}y^2 + \dots + \delta_{2n-2} x y^{2n-2} + \delta_{2n-1} y^{2n-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

Семейство уравнений (4.7) действительно зависит от  $2n - 1 + 4$  независимых параметров, поскольку общая нелинейность нечётной степени в данном случае характеризуется  $4n$  параметрами, на которые накладываются  $2n + 1$  условий (ещё 4 параметра присутствуют в линейной части).

**Следствие 4.4.4.** Системы вида

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= a \sin \alpha + b\omega + \delta_1 \sin^{2n-1} \alpha + \delta_2 \omega \sin^{2n-2} \alpha + \dots + \delta_{2n-1} \omega^{2n-2} \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= c \sin \alpha \cos \alpha + d\omega \cos \alpha + \delta_1 \omega \sin^{2n-2} \alpha \cos \alpha + \delta_2 \omega^2 \sin^{2n-3} \alpha \cos \alpha + \dots + \\ &\quad + \delta_{2n-1} \omega^{2n-1} \cos \alpha \end{aligned}$$

при любых параметрах  $a, b, c, d, \delta_1, \dots, \delta_{2n-1}$  имеют, вообще говоря трансцендентный, первый интеграл, выражающийся через элементарные функции.

Сделаем важное замечание. Системы (4.3)–(4.5), как указывалось, являются относительно грубыми, но если мы нарушим в данных системах симметрии (например, добавим в их правых частях дополнительные члены), введённые для систем более общего вида (4.1), то количество получившихся топологически различных фазовых портретов может сильно измениться (см. также [198]).

В одной из последних глав работы будет приведено интересное многопараметрическое семейство фазовых портретов некоторой системы с переменной диссипацией с ненулевым средним (типичные портреты которой (абсолютно) грубы), являющейся некоторым возмущением динамической системы с переменной диссипацией с нулевым средним вида (4.4). Данное семейство (как и полученные ранее семейства [184]) содержит бесчисленное множество топологически неэквивалентных фазовых портретов на двумерном фазовом цилиндре.

#### 4.5. Системы на $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times \mathbb{R}^2\{z_1, z_2\}$ , или касательном расслоении к двумерной сфере

Исследуем для примера систему вида (4.5), которая сводится к (4.6), а также систему

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -z_2 + \beta(z_1^2 + z_2^2) \sin \alpha + \beta \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ \dot{z}_2 &= \sin \alpha \cos \alpha + \beta z_2(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \beta z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{z}_1 &= \beta z_1(z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \beta z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\end{aligned}\quad (4.8)$$

также возникающую в трёхмерной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой [194], которая соответствует следующей системе с алгебраической правой частью:

$$\begin{aligned}\frac{dz_2}{d\tau} &= \frac{\tau + \beta z_2(z_1^2 + z_2^2) - \beta z_2 \tau^2 - z_1^2/\tau}{-z_2 + \beta \tau(z_1^2 + z_2^2) + \beta \tau(1 - \tau^2)}, \\ \frac{dz_1}{d\tau} &= \frac{\beta z_1(z_1^2 + z_2^2) - \beta z_1 \tau^2 + z_1 z_2/\tau}{-z_2 + \beta \tau(z_1^2 + z_2^2) + \beta \tau(1 - \tau^2)}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Итак, мы по-прежнему рассматриваем пару систем: первоначальную систему (4.8) и соответствующую ей алгебраическую систему (4.9). Аналогичным образом переходим к однородным координатам  $u_k$ ,  $k = 1, 2$ , по формулам  $z_k = u_k \tau$ . Система (4.6) приводится с помощью последней замены к виду

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{\tau - u_1^2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau}, \quad \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{u_1 u_2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau},$$

соответствующему уравнению

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - \beta u_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1 u_2 - \beta u_1}. \quad (4.10)$$

Данное уравнение интегрируется в элементарных функциях, поскольку интегрируется тождество

$$d \left( \frac{1 - \beta u_2 + u_2^2}{u_1} \right) + du_1 = 0,$$

и имеет в координатах  $(\tau, z_1, z_2)$  первый интеграл вида (ср. [194])

$$\frac{z_1^2 + z_2^2 - \beta z_2 \tau + \tau^2}{z_1 \tau} = \text{const.}$$

Система (4.8) после её приведения соответствует системе

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{\tau + \beta u_2 \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) - \beta u_2 \tau^3 - u_1^2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) + \beta \tau(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{\beta u_1 \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) - \beta u_1 \tau^3 + u_1 u_2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) + \beta \tau(1 - \tau^2)},\end{aligned}$$

которая также приводится к (4.10).

Система вида (4.5) эквивалентна системе

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} \cos \theta + \sin \theta \cos \theta - \dot{\psi}^2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= 0, \\ \ddot{\psi} + \beta \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\theta} \dot{\psi} \left[ \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right] &= 0\end{aligned}$$

на касательном расслоении  $T_*\mathbf{S}^2$  двумерной сферы  $\mathbf{S}^2$ . Её фазовый портрет можно найти в [194].

Зададим вопрос: каковы возможности интегрирования в элементарных функциях системы

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{ax + by + cz + c_1 z^2/x + c_2 zy/x + c_3 y^2/x}{dx + ey + fz}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{gx + hy + iz + i_1 z^2/x + i_2 zy/x + i_3 y^2/x}{dx + ey + fz}\end{aligned}\quad (4.11)$$

более общего вида, включающей в себя рассмотренные выше системы (4.6), (4.9) в трёхмерных фазовых областях, имеющей особенность типа  $1/x$ .

Ранее уже был получен ряд результатов по данному вопросу (см. [194]). Приведём эти результаты и дополним материал оригинальными рассуждениями.

Вводя, как и ранее, подстановки  $y = ux$ ,  $z = vx$ , получим, что система (4.11) приводится к системе

$$\begin{aligned}x \frac{dv}{dx} + v &= \frac{ax + bux + cvx + c_1 v^2 x + c_2 vux + c_3 u^2 x}{dx + eux + fvx}, \\ x \frac{du}{dx} + u &= \frac{gx + hux + ivx + i_1 v^2 x + i_2 vux + i_3 u^2 x}{dx + eux + fvx},\end{aligned}$$

которой поставим в соответствие уравнение с алгебраической правой частью

$$\frac{dv}{du} = \frac{a + bu + cv + c_1 v^2 + c_2 vu + c_3 u^2 - v[d + eu + fv]}{g + hu + iv + i_1 v^2 + i_2 vu + i_3 u^2 - u[d + eu + fv]}.$$

Интегрирование последнего уравнения сводится к интегрированию уравнения в полных дифференциалах:

$$\begin{aligned}[g + hu + iv + i_1 v^2 + i_2 vu + i_3 u^2 - du - eu^2 - fuv] dv &= \\ &= [a + bu + cv + c_1 v^2 + c_2 vu + c_3 u^2 - dv - euv - fv^2] du.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Имеем 15-параметрическое семейство уравнений вида (4.12). Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества как однородного уравнения достаточно наложить 7 соотношений:

$$g = 0, \quad i_3 = e, \quad i_1 = 0, \quad i = 0, \quad c_2 = e, \quad c = h, \quad 2c_1 = i_2 + f. \quad (4.13)$$

Введём 8 параметров  $\beta_1, \dots, \beta_8$  и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\begin{aligned}g &= 0, \quad h = \beta_1, \quad i_1 = 0, \quad i = 0, \quad i_2 = \beta_2, \quad i_3 = \beta_3, \quad d = \beta_4, \quad e = \beta_5, \\ f &= \beta_6, \quad a = \beta_7, \quad b = \beta_7, \quad c = \beta_1, \quad c_1 = \frac{\beta_2 + \beta_5}{2}, \quad c_2 = \beta_3, \quad c_3 = \beta_8.\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (4.12) при выполнении группы условий (4.13) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_6 + \beta_7 u + (\beta_1 - \beta_4)v + (\beta_2 - \beta_5)v^2/2 + \beta_8 u^2}{(\beta_1 - \beta_4)u + (\beta_2 - \beta_5)vu}, \quad (4.14)$$

после чего исследуемое уравнение интегрируется в элементарных функциях.

Действительно, интегрируя тождество (4.12), получаем соотношение

$$d \left[ \frac{(\beta_1 - \beta_4)v}{u} \right] + d \left[ \frac{(\beta_2 - \beta_5)v^2}{2u} \right] + d \left[ \frac{\beta_6}{u} \right] - d[\beta_7 \ln |u|] - d[\beta_8 u] = 0,$$

которое в координатах  $(x, y, z)$  позволяет получить первый интеграл в виде

$$\frac{(\beta_2 - \beta_5)z^2/2 - \beta_8 y^2 + (\beta_1 - \beta_4)zx + \beta_6 x^2}{yx} - \beta_7 \ln \left| \frac{y}{x} \right| = \text{const.} \quad (4.15)$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря неконсервативной, системы третьего порядка, зависящей от 8 параметров:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\beta_6 x + \beta_7 y + \beta_1 z + (\beta_2 - \beta_5)z^2/2x + \beta_3 zy/x + \beta_8 y^2/x}{\beta_4 x + \beta_3 y + \beta_5 z}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\beta_1 y + \beta_2 zy/x + \beta_3 y^2/x}{\beta_4 x + \beta_3 y + \beta_5 z}. \end{aligned}$$

**Следствие 4.5.1.** Система третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \beta_4 \sin \alpha + \beta_3 z_1 + \beta_5 z_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta_6 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_7 z_1 \cos \alpha + \beta_1 z_2 \cos \alpha + \\ &\quad + \frac{\beta_2 + \beta_5}{2} z_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_3 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_8 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \dot{z}_1 &= \beta_1 z_1 \cos \alpha + \beta_2 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_3 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad (4.16)$$

на множестве

$$\mathbf{S}^1 \{ \alpha \bmod 2\pi \} \setminus \{ \alpha = 0, \alpha = \pi \} \times \mathbb{R}^2 \{ z_1, z_2 \},$$

зависящая от 8 параметров, обладает, вообще говоря трансцендентным, первым интегралом, выражающимся через элементарные функции. В частности, система (4.16) при  $\beta_1 = \beta_3 = \beta_7 = 0$ ,  $\beta_2 = \beta_6 = 1$ ,  $\beta_5 = \beta_8 = -1$ ,  $\beta_4 = \beta$  приводится к системе (4.5).

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (4.11) используется найденный первый интеграл (4.15), выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

Итак, рассматриваемые в данной работе динамические системы относятся к системам с переменной диссипацией с нулевым средним по имеющейся периодической координате. Более того, такие системы часто обладают полным списком первых интегралов, выражающихся через элементарные функции.

Метод приведения исходных систем уравнений с правыми частями, содержащими полиномы от тригонометрических функций, к системам с полиномиальными правыми частями позволяет искать первые интегралы (или же доказывать их отсутствие) для систем более общего вида, а не только тех, которые обладают указанными симметриями (см. также [166—189, 189—198, 224—232]).

## 5. Случай полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике и некоторые инвариантные индексы

Результаты этой работы появились в процессе исследования некоторой задачи о движении твёрдого тела в среде с сопротивлением [194], где пришлось иметь дело с первыми интегралами, обладающими нестандартными свойствами. А именно, они не были ни аналитическими, ни гладкими, а на некоторых множествах они были даже разрывными. При этом они выражались через конечную комбинацию элементарных функций. Последние обстоятельства тем не менее позволили-таки провести полный анализ всех фазовых траекторий и указать на те их свойства, которые обладали «грубостью» и сохранялись для систем более общего вида, обладающих некоторыми нетривиальными симметриями скрытого типа. Поэтому представляет интерес исследование достаточно широких классов динамических систем, обладающих аналогичными свойствами и при этом взятыми из динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой.

### 5.1. Системы из плоской динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой

#### 5.1.1. Движение твёрдого тела под действием следающей силы

Рассмотрим плоскопараллельное движение твёрдого тела с передним плоским торцом в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [194]. Если  $(v, \alpha)$  — полярные координаты некоторой характерной точки твёрдого тела,  $\Omega$  — его угловая скорость,  $I, m$  — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения в случае функций Чаплыгина воздействия среды примет вид

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= F_x, \\ \dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} &= 0, \\ I \dot{\Omega} &= ABv^2 \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$F_x = -\frac{Bv^2}{m} \cos \alpha, \quad A, B, \sigma > 0.$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через центр масс и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенства

$$v = \text{const}, \quad (5.2)$$

то в системе (5.1) вместо  $F_x$  будет стоять величина

$$F_x = \frac{(T - B \cos \alpha)v^2}{m}, \quad |\mathbf{T}| = T,$$

при этом благодаря связи (5.2) при некоторых условиях система (5.1) приведётся к следующей системе второго порядка на двумерном цилиндре  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\Omega\}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\Omega + A_1 \sin \alpha, \\ \dot{\Omega} &= A_2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ A_1 &= \frac{\sigma v A B}{I} > 0, \quad A_2 > 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

**Предложение 5.1.1 (см. также [194]).** Система (5.3) обладает первым интегралом, являющимся трансцендентной функцией фазовых переменных, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь необходимо сделать важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т. е. неалгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после её формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

Действительно, система (5.3) имеет вид системы (4.1), обладающей переменной диссипацией с нулевым средним, и с помощью замен

$$\tau = \sin \alpha, \quad y = -\Omega + A_1 \tau$$

может быть приведена к одному уравнению

$$\frac{dy}{d\tau} = -A_2 \frac{\tau}{y} + A_1,$$

в котором подстановкой

$$\xi = \frac{y}{\tau}$$

осуществляется разделение переменных:

$$(\xi^2 - A_1 \xi + A_2) d\tau = -\xi \tau d\tau.$$

Эта квадратура и даёт искомый первый интеграл. В зависимости от параметров имеем три случая:

$$1) A_1^2 - 4A_2 < 0:$$

$$\ln(\xi^2 - A_1\xi + A_2) + \frac{2A_1}{\sqrt{4A_2 - A_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\xi - A_1}{\sqrt{4A_2 - A_1^2}} + \ln \tau^2 = \text{const};$$

$$2) A_1^2 - 4A_2 > 0:$$

$$\ln |\xi^2 - A_1\xi + A_2| + \frac{A_1}{\sqrt{-4A_2 + A_1^2}} \ln \left| \frac{2\xi - A_1 - \sqrt{-4A_2 + A_1^2}}{2\xi - A_1 + \sqrt{-4A_2 + A_1^2}} \right| + \ln \tau^2 = \text{const};$$

$$3) A_1^2 - 4A_2 = 0:$$

$$\ln \left| \xi - \frac{A_1}{2} \right| - \frac{A_1}{2\xi - A_1} + \ln \tau = \text{const}.$$

Переходя к переменным  $\Omega$  и  $\tau$ , имеем

$$1) A_1^2 - 4A_2 < 0:$$

$$[\Omega^2 - A_1\tau\Omega + A_2] \times \exp \left\{ \frac{2A_1}{\sqrt{4A_2 - A_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\Omega - A_1\tau}{\sqrt{4A_2 - A_1^2}\tau} \right\} = \text{const};$$

$$2) A_1^2 - 4A_2 > 0:$$

$$\begin{aligned} & \left| 2\Omega + \left( A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2\tau} \right) \right|^{\sqrt{A_1^2 - 4A_2} - A_1} \times \\ & \times \left| 2\Omega + \left( A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2\tau} \right) \right|^{\sqrt{A_1^2 - 4A_2} + A_1} = \text{const}; \end{aligned}$$

$$3) A_1^2 - 4A_2 = 0:$$

$$|2\Omega + A_1\tau| \times \exp \left\{ -\frac{A_1\tau}{2\Omega + A_1\tau} \right\} = \text{const}.$$

**Следствие 5.1.2.** При  $A_1 = 0$  трансцендентный первый интеграл превращается в аналитический первый интеграл физического маятника.

Хотелось бы также напомнить более общий факт о поведении трансцендентных первых интегралов возле асимптотических (притягивающих и отталкивающих) предельных множеств (см. также [1]).

**Теорема 5.1.3.** Если система в многомерном фазовом пространстве обладает асимптотическими предельными множествами, то она не имеет полного набора непрерывных первых интегралов во всём фазовом пространстве.

Данная теорема имеет важный топологический смысл, она утверждает непрерывность первых интегралов возле предельных множеств [1].

**Следствие 5.1.4.** Как (комплексные) функции первые интегралы имеют в данных асимптотических предельных множествах существенно особые точки.

Некоторые особые точки системы (5.3) являются притягивающими или отталкивающими. Таким образом, если и существует её первый интеграл, то он является трансцендентной функцией.

### 5.1.2. Движение твёрдого тела с постоянной скоростью центра масс в неконсервативном поле

Рассмотрим плоскопараллельное движение твёрдого тела с передним плоским торцом в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [194]. Если  $(v, \alpha)$  — полярные координаты некоторой характерной точки твёрдого тела,  $\Omega$  — его угловая скорость,  $I, m$  — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения в случае функций Чаплыгина воздействия среды примет вид (5.1), где по-прежнему

$$F_x = -\frac{Bv^2}{m} \cos \alpha, \quad A, B, \sigma > 0.$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через центр масс и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенства

$$\mathbf{V}_C = \text{const} \quad (5.4)$$

( $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс, см. также [167]), то в системе (5.1) вместо  $F_x$  будет стоять величина, тождественно равная нулю, обеспечивающая движение тела в среде, при котором на тело действует пара сил. Благодаря связи (5.4) при некоторых условиях система (5.1) приведётся к следующей системе на трёхмерном цилиндре  $W_1 = \mathbb{R}_+^1 \{v\} \times \mathbf{S}^1 \{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1 \{\omega\}$ :

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\omega + \beta \sin \alpha \cos^2 \alpha + \beta \omega^2 \sin \alpha, \\ \dot{\omega} &= \sin \alpha \cos \alpha - \beta \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \beta \omega^3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma \omega^2 \cos \alpha + \sigma n_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha;$$

здесь  $\Omega = \omega v$ ,  $n_0^2 = AB/I$ ,  $\beta = \sigma n_0$ ,  $\langle \cdot \rangle = v \langle' \rangle$ .

В системе (5.5), (5.6) выделилась независимая система второго порядка (5.6).

**Предложение 5.1.5.** Система (5.5), (5.6) обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а другой — трансцендентной функцией фазовых переменных, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, в силу (5.4) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (5.1) при условии  $F_x \equiv 0$ , а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \Omega) = v^2 + \sigma^2 \Omega^2 - 2\sigma \Omega v \sin \alpha = V_C^2 \quad (5.7)$$

постоянна на фазовых траекториях.

Поскольку можно осуществить невырожденную замену независимого переменного, у системы (5.5), (5.6) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v, \alpha, \omega) = v^2(1 + \sigma^2\omega^2 - 2\sigma\omega \sin \alpha) = V_C^2 \quad (5.8)$$

постоянна на фазовых траекториях.

Равенство (5.8) позволяет, не решая системы (5.5), (5.6), найти зависимость скорости центра пластины от других фазовых переменных, а именно при  $V_C \neq 0$  выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + \sigma^2\omega^2 - 2\sigma\omega \sin \alpha}.$$

Поскольку фазовое пространство  $W_1$  системы (5.5), (5.6) трёхмерно, а в нём существуют асимптотические предельные множества, то равенство (5.8) (впрочем, как и (5.7)) задаёт единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (5.5), (5.6) во всём фазовом пространстве.

Разберём подробнее вопрос существования второго (дополнительного) первого интеграла системы (5.5), (5.6). Её фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v, \alpha, \omega) \in W_1 : V_C = \text{const}\}$$

подобно тому, как это происходит в случае (5.2). Для обоснования последнего утверждения поставим в соответствие системе (5.6) дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{-\tau + \beta\omega[\omega^2 - \tau^2]}{\omega + \beta\tau + \beta\tau[\omega^2 - \tau^2]}, \quad \tau = -\sin \alpha.$$

Введём обозначения:  $C_1 = 2 - \beta$ ,  $C_2 = \beta$ ,  $C_3 = 2 + \beta$ . Совершая ряд замен переменных по формулам

$$\omega - \tau = u_1, \quad \omega + \tau = v_1, \quad u_1 = v_1 t_1, \quad v_1^2 = p_1,$$

где  $v_1 \neq 0$ , получим уравнение типа Бернулли:

$$2p_1[C_1 t_1 + C_2 + 2\beta t_1 p_1] = \frac{dp_1}{dt_1}[C_3 + C_1 t_1^2].$$

Известной заменой  $p^{-1} = q_1$  при  $p_1 \neq 0$  приведём последнее уравнение к форме

$$\dot{q}_1 = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1),$$

где

$$a_1(t_1) = \frac{2(C_1 t_1 + C_2)}{C_1 t_1^2 + C_3}, \quad a_2(t_1) = \frac{4\beta t_1}{C_1 t_1^2 + C_3}$$

(точкой здесь обозначена производная по  $t_1$ ).

Общее решение линейного однородного уравнения представляется в виде

$$q_{1\text{одн}}(t_1) = k(C_1 t_1^2 + C_3)Q(t_1), \quad k = \text{const},$$

где функция  $Q$  в зависимости от значения постоянной  $C_1$  имеет вид

$$Q(t_1) = \begin{cases} e^{t_1}, & C_1 = 0, \\ e^{2 \frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_3}} \arctg \sqrt{\frac{C_1}{C_3}} t_1}, & C_1 > 0, \\ \left( \frac{\sqrt{-C_1} t_1 + \sqrt{C_3}}{\sqrt{-C_1} t_1 - \sqrt{C_3}} \right)^{\frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}}}, & C_1 < 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Для получения решения неоднородного уравнения будем считать величину  $k$  функцией  $t_1$ ;  $k$  найдётся квадратурой

$$k(t_1) = 4\beta \int Q^{-1}(t_1) \frac{t_1}{(C_1 t_1^2 + C_3)^2} dt_1.$$

Таким образом, трансцендентный первый интеграл системы (5.5), (5.6) примет следующий структурный вид:

$$Q^{-1}(t_1) q_1 (C_1 t_1^2 + C_3)^{-1} - 4\beta \int_{t_0}^{t_1} Q^{-1}(\tau_1) \frac{\tau_1}{(C_1 \tau_1^2 + C_3)^2} d\tau_1 = C^0,$$

где  $C^0 = \text{const}$ .

Как видно, окончательный вид первого интеграла зависит от знака постоянной  $C_1$  (см. (5.9)), причём возможны три варианта. Разберём каждый из них.

Первый вариант.  $C_1 = 0$ . После элементарного вычисления получим дополнительный интеграл в виде

$$e^{-\frac{u_1}{v_1}} \left( v_1^{-2} + \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{u_1}{v_1} + 1 \right) \right) = \text{const}.$$

Итак, трансцендентный первый интеграл системы (5.5), (5.6) при  $C_1 = 0$  выражается через элементарные функции.

Второй вариант.  $C_1 > 0$ . Интегрирование приводит к функции

$$-\frac{\sigma}{4n_0} e^{-2 \frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \zeta} \left( \frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \sin 2\zeta + \cos 2\zeta \right) + \text{const},$$

где

$$\zeta = \arctg \sqrt{-\frac{C_1}{C_3}} t_1.$$

Как видно, в случае  $C_1 > 0$  дополнительный первый интеграл выражается через элементарные функции.

Третий вариант.  $C_1 < 0$ . Эквивалентными преобразованиями интеграл преобразуется к виду

$$\frac{\sigma}{C_1 C_2 n_0} \left( 2 \frac{\zeta^{1-\gamma}}{\gamma-1} - 3 \frac{\zeta^{-\gamma}}{\gamma} + \frac{\zeta^{-1-\gamma}}{\gamma+1} \right) + \text{const},$$

где

$$\gamma = \frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_3}} > 1, \quad \zeta = \frac{\sqrt{-C_1} t_1 + \sqrt{-C_3}}{\sqrt{-C_1} t_1 - \sqrt{-C_3}}.$$

Поэтому и в случае  $C_1 < 0$  дополнительный первый интеграл выражается через элементарные функции.

Верно следующее следствие из предложения 5.1.5.

**Следствие 5.1.6.** *У системы (5.6) на фазовом цилиндре не существует простых и сложных предельных циклов.*

Сейчас становится уместным следующее важное замечание. Поскольку полученный первый интеграл после формального продолжения в комплексную область имеет существенно особые точки только лишь в точках  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , но никак ни на каких-либо замкнутых гладких путях, исследуемая система не может иметь притягивающих и отталкивающих предельных множеств размерности, большей чем 0.

Итак, мы показали связь трёх свойств, на первый взгляд независимых, но при этом достаточно гармонично сочетающихся на системах из динамики твёрдого тела:

- 1) выделенный класс систем (4.1) с отмеченными симметриями;
- 2) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по переменной  $\alpha$ ), что позволяет рассматривать их как «почти» консервативные системы;
- 3) в некоторых (пусть и достаточно маломерных) случаях обладание ими полным набором (вообще говоря, трансцендентных) первых интегралов.

### 5.1.3. Движение твёрдого тела с постоянной скоростью центра масс в неконсервативном поле при наличии дополнительных диссипативных добавок

Рассмотрим плоскопараллельное движение твёрдого тела с передним плоским торцом в неконсервативном поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [194]. Если  $(v, \alpha)$  — полярные координаты некоторой характерной точки твёрдого тела,  $\Omega$  — его угловая скорость,  $I, m$  — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения в случае функций Чаплыгина воздействия среды примет вид (5.1), где по-прежнему

$$F_x = -\frac{Bv^2}{m} \cos \alpha, \quad A, B, \sigma > 0,$$

при этом динамические функции  $s$  и  $y_N$  примут вид

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad y_N(\alpha, \Omega, v) = A \sin \alpha - h_1 \frac{\Omega}{v}, \quad h_1 > 0,$$

говорящий о том, что в рассматриваемой системе присутствует также дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и опрокидывающий) момент неконсервативной силы.

Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей

через центр масс и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенства (5.4), то в системе (5.1) вместо  $F_x$  будет стоять величина, тождественно равная нулю, обеспечивающая движение тела в среде, при котором на тело действует пара сил. Благодаря связи (5.4) при некоторых условиях система (5.1) приведётся к следующей системе на трёхмерном цилиндре  $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ , более общей, чем система (5.5), (5.6):

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\omega + \sigma n_0^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha - \frac{\sigma h_1 B}{I} \cos^2 \alpha, \\ \dot{\omega} &= n_0^2 \sin \alpha \cos \alpha - \sigma n_0^2 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sigma \omega^3 \cos \alpha + \\ &\quad + \frac{\sigma h_1 B}{I} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{h_1 B}{I} \omega \cos \alpha, \\ \Psi(\alpha, \omega) &= -\sigma \omega^2 \cos \alpha + \sigma n_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{\sigma h_1 B}{I} \omega \sin \alpha \cos \alpha; \end{aligned} \quad (5.11)$$

здесь по-прежнему  $\Omega = \omega v$ ,  $n_0^2 = AB/I$ ,  $\langle \cdot \rangle = v\langle' \rangle$ .

В системе (5.10), (5.11) выделилась независимая система второго порядка (5.11).

**Предложение 5.1.7.** Система (5.11) обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а другой — трансцендентной функцией фазовых переменных, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Действительно, в силу (5.4) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (5.1) при условии  $F_x \equiv 0$ , а именно функция фазовых переменных (5.7) постоянна на фазовых траекториях.

Поскольку можно осуществить невырожденную замену независимого переменного, у системы (5.11) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных (5.8) постоянна на фазовых траекториях.

Равенство (5.8), как и ранее, позволяет, не решая системы (5.11), найти зависимость скорости центра пластины от других фазовых переменных. А именно, при  $V_C \neq 0$  выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + \sigma^2 \omega^2 - 2\sigma \omega \sin \alpha}.$$

Поскольку фазовое пространство  $W_1$  системы (5.11) трёхмерно, а в нём существуют асимптотические предельные множества, то равенство (5.8) (впрочем, как и (5.7)) задаёт единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (5.11) во всём фазовом пространстве.

Разберём подробнее вопрос существования второго (дополнительного) первого интеграла системы (5.11), (5.6). Её фазовое пространство расслаивается на поверхности

$$\{(v, \alpha, \omega) \in W_1 : V_C = \text{const}\}$$

подобно тому, как это происходит в случае (5.2). Для обоснования последнего утверждения поставим в соответствие системе (5.11) дифференциальное уравнение следующего вида, вводя при этом безразмерное дифференцирование  $\langle' \rangle \mapsto n_0 \langle' \rangle$ , а также дополнительные безразмерные параметры  $H_1 = \frac{h_1 B}{I n_0}$ ,  $n_0^2 = \frac{AB}{I}$ ,  $\beta = \sigma n_0$ ,  $\tau = \sin \alpha$ :

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\omega + \beta \sin \alpha \cos^2 \alpha + \beta \omega^2 \sin \alpha - \beta H_1 \omega \cos^2 \alpha, \\ \dot{\omega} &= \sin \alpha \cos \alpha - \beta \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \beta \omega^3 \cos \alpha + \\ &\quad + \beta H_1 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 \omega \cos \alpha, \\ \Psi(\alpha, \omega) &= -\beta \omega^2 \cos \alpha + \beta \sin^2 \alpha \cos \alpha - \beta H_1 \omega \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Полученный выше аналитический первый интеграл привязывает уравнение (5.10) или (5.12). Для поиска дополнительного трансцендентного первого интеграла поставим в соответствие отделившейся системе (5.13) следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau - \beta\omega[\omega^2 - \tau^2] + H_1\omega[\beta\omega\tau - 1]}{-\omega + \beta\tau + \beta\tau[\omega^2 - \tau^2] - \beta H_1\omega[1 - \tau^2]}.$$

После введения однородной замены переменных по формуле

$$\omega = t\tau, \quad d\omega = t d\tau + \tau dt$$

интегрирование последнего уравнения сведётся к интегрированию уравнения Бернулли вида

$$a_1(t) \frac{d\tau}{dt} = a_2(t)\tau + a_3(t)\tau^3,$$

где

$$a_1(t) = -(1 + \beta H_1)t^2 + (\beta + H_1)t - 1, \quad a_2(t) = (1 + \beta H_1)t - \beta, \quad a_3(t) = \beta - \beta H_1 t - \beta t^2.$$

После применения классической замены переменных  $p = \frac{1}{\tau^2}$  исследуемое уравнение сведётся к линейному однородному уравнению вида

$$\frac{dp}{dt} = c_1(t)p + c_2(t),$$

где

$$c_1(t) = \frac{2t(1 + \beta H_1) - 2\beta}{(1 + \beta H_1)t^2 - (\beta + H_1)t + 1}, \quad c_2(t) = \frac{2\beta - 2\beta H_1 t - 2\beta t^2}{(1 + \beta H_1)t^2 - (\beta + H_1)t + 1}.$$

Вид решения  $p_1$  однородной части исследуемого уравнения зависит от  $D$ . Возможны три случая:

$$1) \quad D = (\beta - H_1)^2 - 4 > 0:$$

$$p_1 = k[(1 + \beta H_1)t^2 - (\beta + H_1)t + 1] \cdot \left| \frac{2(1 + \beta H_1)t - (\beta - H_1) - \sqrt{D}}{2(1 + \beta H_1)t - (\beta - H_1) + \sqrt{D}} \right|^{\frac{H_1 - \beta}{\sqrt{D}}};$$

2)  $D = (\beta - H_1)^2 - 4 < 0$ :

$$p_1 = k[(1 + \beta H_1)t^2 - (\beta + H_1)t + 1] \cdot \exp \left\{ \operatorname{arctg} \frac{2(1 + \beta H_1)t - (\beta + H_1)}{\sqrt{-D}} \right\};$$

3)  $D = (\beta - H_1)^2 - 4 = 0$ :

$$p_1 = k[(1 + \beta H_1)t^2 - (\beta + H_1)t + 1] \cdot \exp \left\{ \frac{2L_1}{\sqrt{1 + \beta H_1} \pm 1} \right\},$$

$$L_1 = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta H_1}} \pm 1.$$

Понятно, что для поиска частного решения исследуемого уравнения нужно, применяя метод вариации постоянных, считать величину  $k$  функцией  $t$ . Уравнение разрешимо в классе элементарных функций. Из-за громоздкости вычислений данные выкладки не приводятся.

## 5.2. Системы из пространственной динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой

### 5.2.1. Движение твёрдого тела при наличии следящей силы в неконсервативном поле при наличии дополнительных диссипативных добавок

Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твёрдого тела массы  $m$  с передним круглым торцом в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности. Если  $(v, \alpha, \beta)$  — сферические координаты некоторой характерной точки твёрдого тела,  $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$  — компоненты его угловой скорости,  $I_1, I_2, I_2$  — главные моменты инерции в некоторой системе координат, связанной с телом, то динамическая часть уравнений движения в случае функций Чаплыгина воздействия среды при учёте дополнительного линейного демпфирующего воздействия со стороны среды примет вид

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega_y v \sin \alpha \sin \beta - \Omega_z v \sin \alpha \cos \beta + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) &= F_x, \\ \dot{v} \sin \alpha \cos \beta + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta - \dot{\beta} v \sin \alpha \sin \beta + \Omega_z v \cos \alpha - \\ - \Omega_x v \sin \alpha \sin \beta - \sigma \Omega_x \Omega_y - \sigma \dot{\Omega}_z &= 0, \\ \dot{v} \sin \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta + \dot{\beta} v \sin \alpha \cos \beta + \Omega_x v \sin \alpha \cos \beta - \\ - \Omega_y v \cos \alpha - \sigma \Omega_x \Omega_z + \sigma \dot{\Omega}_y &= 0, \\ \dot{\Omega}_x &= 0, \quad I_2 \dot{\Omega}_y + (I_1 - I_2) \Omega_x \Omega_z = -ABv^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta - \frac{h \Omega_y}{v}, \\ I_2 \dot{\Omega}_z + (I_2 - I_1) \Omega_x \Omega_y &= ABv^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta - \frac{h \Omega_z}{v}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

где

$$F_x = -\frac{Bv^2}{m} \cos \alpha, \quad A, B, \sigma, h > 0.$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через ось симметрии и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенства (5.2), то в системе (5.14) вместо  $F_x$  будет стоять величина

$$\frac{(T - B \cos \alpha)v^2}{m},$$

при этом благодаря связи (5.2) при  $\Omega_x \equiv 0$  система (5.14) приведётся к системе четвёртого порядка.

Действительно, если положить

$$z_1 = \Omega_y \cos \beta + \Omega_z \sin \beta, \quad z_2 = -\Omega_y \sin \beta + \Omega_z \cos \beta$$

и ввести безразмерные переменные  $w_k$ ,  $k = 1, 2$ , и параметры по формулам  $h_1 = hB$ ,  $\frac{\sigma h_1}{I_2} = H_1$ ,  $b = \frac{\sigma^2 AB}{I_2}$ ,  $\sigma z_k = v w_k$  (при этом  $\sigma \dot{\alpha} = v \alpha'$  и т. д.), получаем динамическую систему четвёртого порядка

$$\begin{aligned} \alpha' &= -(1 + H_1)\omega + b \sin \alpha, \\ w_2' &= b \sin \alpha \cos \alpha - (1 + H_1)w_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} w_1' &= (1 + H_1)w_1 w_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - H_1 w_1 \cos \alpha, \\ \beta' &= (1 + H_1)w_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

в которой имеется независимая подсистема третьего порядка (5.15).

При  $\beta = H_1$  дивергенция правой части системы (5.15) ((5.15), (5.16)) после замены переменных  $w_1^* = \ln |w_1|$  тождественно равна нулю, что позволяет считать данную систему (системы) консервативной (консервативными).

**Теорема 5.2.1.** Система (5.15), (5.16) обладает полным набором первых интегралов, являющихся элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных. Два из них образуют полный набор первых интегралов системы (5.15).

Действительно, поставим в соответствие системе (5.15), (5.16) следующую неавтономную систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dw_2}{d\alpha} &= \frac{b \sin \alpha \cos \alpha - (1 + H_1)w_1^2 \operatorname{ctg} \alpha - H_1 w_2 \cos \alpha}{-(1 + H_1)w_2 + b \sin \alpha}, \\ \frac{dw_1}{d\alpha} &= \frac{(1 + H_1)w_1 w_2 \operatorname{ctg} \alpha - H_1 w_1 \cos \alpha}{-(1 + H_1)w_2 + b \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Применяя подстановку  $\tau = \sin \alpha$ , преобразуем систему (5.17) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dw_2}{d\tau} &= \frac{b\tau - (1 + H_1)w_1^2/\tau - H_1 w_2}{-(1 + H_1)w_2 + b\tau}, \\ \frac{dw_1}{d\tau} &= \frac{(1 + H_1)w_1 w_2/\tau - H_1 w_1}{-(1 + H_1)w_2 + b\tau}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Вводя в дальнейшем замену  $w_k = u_k \tau$ ,  $k = 1, 2$ , характерную для однородных систем, поставим в соответствие системе (5.18) неавтономное дифференциальное уравнение

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{b + (1 + H_1)(u_2^2 - u_1^2) - (b + H_1)u_2}{2(1 + H_1)u_1u_2 - (H_1 + b)u_1}. \quad (5.19)$$

Оно обладает первым интегралом вида

$$\frac{(1 + H_1)u_2^2 - (H_1 + b)u_2 + (1 + H_1)u_1^2 + b}{u_1} = C_1. \quad (5.20)$$

Пользуясь (5.19), заключаем, что система (5.15), (5.16) имеет первый интеграл вида

$$\frac{(1 + H_1)w_2^2 - (H_1 + b)w_2 \sin \alpha + (1 + H_1)w_1^2 + b \sin^2 \alpha}{w_1 \sin \alpha} = C_1. \quad (5.21)$$

Как уже отмечалось, при  $b = H_1$  динамическая система (5.15) (впрочем, как и (5.15), (5.16)) является консервативной. Действительно, соотношение (5.21) преобразуется к инвариантному соотношению

$$\frac{w_2^2 + (1 + b)w_1^2 + b[w_2 - \sin \alpha]^2}{w_1 \sin \alpha} = C_1. \quad (5.22)$$

Более того, легко проверить, что и числитель, и знаменатель соотношения (5.22) являются первыми интегралами системы (5.15) при  $b = H_1$ :

$$w_2^2 + (1 + b)w_1^2 + b[w_2 - \sin \alpha]^2 = C_1^*, \quad w_1 \sin \alpha = C_1^*.$$

В случае же  $b \neq H_1$  система (5.15) перестает быть консервативной. При этом ни числитель, ни знаменатель инвариантного соотношения (5.21) первыми интегралами не являются. Последний факт проверять необязательно, поскольку у системы (5.15) имеются притягивающие и отталкивающие предельные множества, что не позволяет исследуемой системе иметь полный набор даже непрерывных первых интегралов.

Дополнительный первый интеграл для системы (5.15) находится из квадратуры

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{[b - (1 + H_1)u_2]du_2}{b - (H_1 + b)u_2 + (1 + H_1)[u_2^2 - U(u_2, C_1)]}, \quad (5.23)$$

где

$$U(u_2, C_1) = \frac{1}{2(1 + H_1)} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4D_1} \right\}$$

на уровне

$$C_1 > 4(1 + H_1)D_1$$

интеграла (5.21), где

$$D_1 = (1 + H_1)u_2^2 - (H_1 + b)u_2 + b.$$

Общий структурный вид дополнительного первого интеграла системы (5.15) можно вывести из (5.23):

$$F_1(w_1, w_2, \sin \alpha) = C_2.$$

В силу (5.16), (5.20) дополнительный первый интеграл для системы (5.15), (5.16) четвёртого порядка найдётся из решения уравнения

$$\frac{du_1}{d\beta} + \frac{b - (1 + H_1)u_2}{1 + H_1} = u_2 - \frac{H_1}{1 + H_1},$$

что приводит к соотношению

$$\sin^2\{2(1 + H_1)^2(\beta + C_3)\} = \frac{[2(1 + H_1)w_1 - 2C_1 \sin \alpha]^2}{[(H_1 + b)^2 - 4b(1 + H_1) + C_1^2] \sin^2 \alpha}.$$

**Замечание.** Вообще говоря, проинтегрированная система (5.15) рассматривается в трёхмерной области  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \setminus \{\alpha = 0, \alpha = \pi\} \times \mathbb{R}^2\{w_1, w_2\}$  (такая система приводится к эквивалентной системе на касательном расслоении  $T_*\mathbf{S}^2$  к двумерной сфере  $\mathbf{S}^2$ ).

Итак, система (5.15) является системой с переменной диссипацией с нулевым средним, она обладает двумя первыми интегралами (т. е. полным списком), являющимися трансцендентными функциями, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее, как указывалось выше, и стало возможным после постановки ей в соответствие (вообще говоря, неавтономной) системы уравнений (5.18) с алгебраической (полиномиальной) правой частью.

### 5.2.2. Движение твёрдого тела с постоянной скоростью центра масс в неконсервативном поле

Рассмотрим пространственное движение однородного осесимметричного твёрдого тела массы  $m$  с передним круглым торцом в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности. Если  $(v, \alpha, \beta)$  — сферические координаты характерной точки твёрдого тела,  $\Omega = \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$  — компоненты его угловой скорости,  $I_1, I_2, I_2$  — главные моменты инерции в некоторой системе координат, связанной с телом, то динамическая часть уравнений движения в случае функций Чаплыгина воздействия среды при учёте дополнительного линейного демпфирующего воздействия со стороны среды примет вид (5.14), где

$$F_4 = -\frac{Bv^2}{m} \cos \alpha, \quad A, B, \sigma > 0, \quad h = 0.$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через ось симметрии и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенства (5.4), то в системе (5.14) вместо  $F_x$  будет стоять величина, тождественно равная нулю, обеспечивающая движение тела в среде, при котором на тело действует пара сил.

При некоторых условиях благодаря связи (5.4) система (5.14) приведётся к системе, в которой произойдёт отделение системы более низкого порядка.

Выбор фазовых переменных позволяет рассматривать систему динамических уравнений шестого порядка как независимую. Более того, как видно из уравнений движения, сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости:

$$\Omega_x = \Omega_{x0} = \text{const.} \quad (5.24)$$

Ограничимся далее движением тела без собственного вращения, т. е. случаем

$$\Omega_{x0} = 0.$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \Omega_y \cos \beta + \Omega_z \sin \beta, & z_2 &= -\Omega_y \sin \beta + \Omega_z \cos \beta, \\ z_i &= Z_i v, \quad i = 1, 2, & \dot{\alpha} &= v\alpha', \quad \dot{\beta} = v\beta', \quad \dot{v} = vv'. \end{aligned}$$

Систему (5.14) в случае (5.4) при  $\Omega_{x0} = 0$  можно преобразовать к виду

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + \sigma n_0^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha, \\ Z_2' &= n_0^2 \sin \alpha \cos \alpha - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ Z_1' &= -Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\beta' = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5.27)$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \sigma n_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}.$$

Рассмотрим (как и выше) вопросы полной интегрируемости (в элементарных функциях) динамической системы (5.25)–(5.27) с аналитическими правыми частями.

Поскольку мы рассматриваем такой класс движений тела, при котором выполнено свойство (5.4), то система (5.25)–(5.27) пятого порядка имеет (наряду с (5.24)) аналитический первый интеграл.

Действительно, скорость центра  $C$  масс в рассматриваемой системе координат можно представить в виде

$$\mathbf{V}_C = \{v \cos \alpha, v \sin \alpha \cos \beta - \sigma \Omega_z, v \sin \alpha \sin \beta + \sigma \Omega_y\}.$$

Тогда следующее соотношение является инвариантным для системы (5.14) при условиях (5.24) ( $\Omega_{x0} = 0$ ) и (5.4):

$$v^2 - 2\sigma v z_2 \sin \alpha + \sigma^2(z_1^2 + z_2^2) = V_{C0}^2. \quad (5.28)$$

Более того, соотношение (5.28), в котором линейная и угловые скорости образуют однородную форму степени 2, позволяет выписать полиномиальный

интеграл по указанным скоростям для системы (5.25)–(5.27):

$$v^2(1 - 2\sigma Z_2 \sin \alpha + \sigma^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = V_{C0}^2, \quad (5.29)$$

и соотношение (5.29) позволяет явно найти зависимость  $v$  от других квазискоростей:

$$v^2 = \frac{V_{C0}^2}{1 - 2\sigma Z_2 \sin \alpha + \sigma^2(Z_1^2 + Z_2^2)}. \quad (5.30)$$

Видно, что соотношение (5.30) позволяет рассматривать вопросы интегрируемости в элементарных функциях системы (5.25)–(5.27) уже более низкого порядка — четвёртого.

Систему третьего порядка (5.26) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha, \\ Z_2' &= \sin \alpha \cos \alpha + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ Z_1' &= bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где  $b = \sigma n_0$ , а также введено новое дифференцирование  $\langle ' \rangle \mapsto n_0 \langle ' \rangle$ .

Применяя часто используемую подстановку  $\tau = \sin \alpha$ , систему (5.31) можно привести к следующей системе с алгебраическими правыми частями:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_2}{d\tau} &= \frac{\tau + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_2\tau^2 - Z_1^2/\tau}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2)}, \\ \frac{dZ_1}{d\tau} &= \frac{bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2) - bZ_1\tau^2 + Z_1 Z_2/\tau}{-Z_2 + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2)}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Произведём переход к однородным координатам  $u_k$ ,  $k = 1, 2$ , по формулам  $u_k = Z_k \tau$ . Тогда система (5.32) приведётся к виду

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1 u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Системе (5.33) можно поставить в соответствие следующее уравнение первого порядка:

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1 u_2 - bu_1}. \quad (5.34)$$

Данное уравнение интегрируется в элементарных функциях, поскольку интегрируется тождество, полученное из уравнения (5.34):

$$d\left(\frac{1 - bu_2 + u_2^2}{u_1}\right) + du_1 = 0.$$

В координатах  $(\tau, Z_1, Z_2)$  оно соответствует трансцендентному первому интегралу вида

$$\frac{Z_1^2 + Z_2^2 - bZ_2\tau + \tau^2}{Z_1\tau} = \text{const.} \quad (5.35)$$

Используя равенство (5.35), заключаем, что система (5.26) обладает трансцендентным первым интегралом, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций:

$$\frac{Z_1^2 + Z_2^2 - bZ_2 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z_1 \sin \alpha} = \text{const.} \quad (5.36)$$

Теперь, пользуясь найденным первым интегралом (5.36), перепишем первое уравнение системы (5.33) в виде

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2 - 2bu_2 + 2u_2^2 - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b - 2b\tau^2 + b\tau^2(C_1 U_1(C_1, u_2) + bu_2)}, \quad (5.37)$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}}{2},$$

или в виде уравнения Бернулли

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau + b\tau^3(C_1 U_1(C_1, u_2) + bu_2 - 2)}{2 - 2bu_2 + 2u_2^2 - C_1 U_1(C_1, u_2)}. \quad (5.38)$$

Уравнение (5.38) (при помощи (5.37)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p - 2b(C_1 U_1(C_1, u_2) + bu_2 - 2)}{2 - 2bu_2 + 2u_2^2 - C_1 U_1(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (5.39)$$

Последний факт означает, что может быть найден ещё один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т. е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (5.39) зависит от произвольной постоянной  $C_2$ . Полные выкладки мы не приводим.

Для поиска последнего дополнительного первого интеграла системы (5.25)–(5.27) (т. е. интеграла, привязывающего уравнение на угол  $\beta$ ) заметим, что поскольку

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{Z_1/\tau}{-Z_2 + b\tau(Z_1^2 + Z_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)},$$

то к равенству

$$\frac{d\beta}{d\tau} = \frac{u_1}{-u_2\tau + b\tau^3(u_1^2 + u_2^2) + b\tau(1 - \tau^2)} \quad (5.40)$$

можно добавить равенство

$$\tau \frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2)}, \quad (5.41)$$

взятое из системы (5.33).

Полученная система (5.40), (5.41) позволяет выписать уравнение для получения искомого интеграла:

$$\frac{du_1}{d\beta} = 2u_1 - \beta. \quad (5.42)$$

Используя теперь первый интеграл уравнения (5.34) ( $C_1$  — его постоянная интегрирования) и уравнение (5.42), можно получить, что

$$\frac{du_1}{d\beta} = \pm \sqrt{b^2 - 4(u_1^2 - C_1 u_1 + 1)}, \quad (5.43)$$

а следовательно, искомая квадратура в силу (5.43) принимает вид

$$\pm \int \frac{du_1}{\sqrt{b^2 - 4(u_1^2 - C_1 u_1 + 1)}} = \beta + C_3, \quad C_3 = \text{const.} \quad (5.44)$$

Левая часть (5.44) (без знака) имеет вид

$$\frac{1}{2} \arcsin \frac{(u_1 - \frac{b}{2})^2}{\sqrt{C_1^2 + (b^2 - 4)}}. \quad (5.45)$$

После подстановок из величины (5.45) имеем искомое инвариантное соотношение

$$\cos^2[2(\beta + C_3)] = \frac{(u_2 - \frac{b}{2})^2 u_1^2}{G_1}, \quad (5.46)$$

где

$$G_1 = [u_2^2 - bu_2]^2 + 2[u_2^2 - bu_2][u_1^2 + 1] + [u_1^2 + 1]^2 + b^2 u_1^2.$$

В частности, если  $b = 2$ , то равенство (5.46) примет вид

$$\cos^2[2(\beta + C_3)] = \frac{(Z_2 - \sin \alpha) Z_1}{(Z_2 - \sin \alpha)^2 + Z_1^2}.$$

Правая часть как нечётная функция от

$$\zeta = \frac{Z_2 - \sin \alpha}{Z_1}$$

имеет при  $\zeta = 1$  глобальный максимум, равный  $1/2$ .

Итак, мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 5.2.2.** Система (5.25)–(5.27) обладает полным набором первых интегралов, один из которых является аналитической функцией, а два других являются элементарными трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

В заключение отметим, что для поиска первых интегралов рассматриваемых систем нужно привести системы вида (4.1) к соответствующим системам (4.2) с полиномиальными правыми частями, от вида которых зависит возможность интегрирования в элементарных функциях исходной системы. Поэтому далее пойдём следующим путём: будем искать достаточные условия интегрируемости в элементарных функциях систем уравнений с полиномиальными правыми частями, исследуя при этом системы наиболее общего вида.

### 5.3. Инвариантные индексы, характеризующие счётные семейства неэквивалентных фазовых портретов

Результаты по «кодированию» счётного числа топологически неэквивалентных фазовых портретов были уже получены ранее для разного рода систем (см., например, [194]). Материал же данного раздела в приведённом виде ранее не публиковался, и поэтому авторы сочли нужным привести его.

Вводимые инвариантные индексы в данном случае появились вновь из конкретных задач динамики (см. также [194]).

Как известно, задача о движении твёрдого тела в безграничном объёме среды из-за своей сложности требует введения целого ряда упрощающих предположений, при этом основным является введение таких гипотез, которые позволили бы изучать движение твёрдого тела отдельно от движения среды, в которую данное тело помещено. Подобные действия были предприняты в классической задаче Кирхгофа, но и она не исчерпывает возможностей моделирования подобного типа.

Данная работа представляет собой исследование задачи плоскопараллельного движения симметричного твёрдого тела, взаимодействующего со средой лишь через плоский участок (кавитатор) его внешней поверхности. При построении силового поля используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности, при этом движение среды не изучается.

В отличие от предыдущих работ (см. [157]), в которых зависимостью момента силы воздействия среды от угловой скорости тела пренебрегалось, в данной работе, в соответствие с экспериментом, учитываются эффекты от влияния вращательных производных момента гидроаэродинамических сил по компонентам угловой скорости тела [194].

С практической точки зрения важен вопрос исследования устойчивости прямолинейного поступательного движения, при котором скорости точек тела перпендикулярны кавитатору (угол атаки при этом тождественно равен нулю).

Необходимость же полного нелинейного исследования подтверждается важностью нахождения таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле прямолинейного поступательного движения, которое является неустойчивым по отношению к углу атаки и угловой скорости.

#### 5.3.1. Динамическая часть уравнений движения

Рассмотрим плоскопараллельное движение симметричного однородного твёрдого тела массы  $m$  с передним плоским торцом (пластиной) в сопротивляющейся среде (см. также [194]). В случае отсутствия касательных сил воздействие среды на тело сводится к силе  $\mathbf{S}$  (приложенной в некоторой точке  $N$ ), ортогональной пластине.

В динамической модели органично вводятся следующие три фазовые координаты:  $v = |\mathbf{v}|$  — величина скорости центра  $D$  пластины относительно среды,

$\alpha$  — угол атаки,  $\Omega$  — алгебраическое значение проекции угловой скорости тела на ось, перпендикулярную движению.

Величина силы  $\mathbf{S}$  квадратично зависит от  $v$ ,

$$S = s_1 v^2,$$

с некоторым коэффициентом  $s_1$  (ньютоновское сопротивление). Воздействие среды на тело определяется двумя знакопеременными функциями фазовых переменных:

$$y_N = DN$$

и

$$s_1 = s \operatorname{sgn} \cos \alpha.$$

Будем считать величину  $s$  функцией  $\alpha$ , а величину  $y_N$  — функцией пары безразмерных переменных  $(\alpha, \omega)$ ,

$$\omega = \frac{\Omega \Delta}{v},$$

где  $\Delta$  — характерный размер.

Фазовое состояние системы определяется с помощью шести функций, три из которых —  $v$ ,  $\alpha$ ,  $\omega$  — рассматриваются в качестве квазискоростей системы, а три другие (кинематические переменные) являются циклическими, что приводит к понижению порядка общей системы уравнений движения. В неё также входят функции  $y_N(\alpha, \omega)$  и  $s(\alpha)$ , определяющие воздействие среды на тело. Как уже отмечалось, функция  $y_N$  зависит от угла атаки и от приведённой угловой скорости  $\omega$ . Если последней зависимостью пренебречь (как было в ряде предыдущих работ), то величина  $y_N$  является функцией лишь угла атаки:  $y_N = y(\alpha)$ , а её зависимость от единственного аргумента определяется с помощью экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания. Тогда в дальнейшем применяется метод «погружения» задачи в более общий класс задач.

Нашей основной целью является учёт влияния вращательных производных момента силы воздействия среды по угловой скорости тела, требующий введения в функции воздействия среды дополнительного аргумента, что само по себе является нетривиальной задачей моделирования. В данной работе ограничимся введением угловой скорости в качестве аргумента лишь в функцию  $y_N$ , а подобным её введением в приведённый коэффициент сопротивления  $s$  пренебрежём.

В дальнейшем величину  $y_N$  будем рассматривать в следующем виде:

$$y_N(\alpha, \omega) = y_N \left( \alpha, \frac{\Omega \Delta}{v} \right) = y(\alpha) - H \frac{\Omega}{v},$$

при этом  $H > 0$  согласно результатам эксперимента. Тогда уравнение об изменении кинетического момента запишется как

$$I \dot{\Omega} = F(\alpha) v^2 - H s(\alpha) \Omega v, \quad F(\alpha) = y(\alpha) s(\alpha),$$

при этом, поменяв дифференцирование, динамическую часть уравнений движения можно привести к виду

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \sigma\omega^2 \sin \alpha + \frac{\sigma}{I}F(\alpha) \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha + \frac{\sigma}{I}h\omega s(\alpha) \cos \alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I}F(\alpha) + \sigma\omega^3 \cos \alpha - \frac{\sigma}{I}\omega F(\alpha) \sin \alpha + \omega \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha - \\ &\quad - \frac{B}{I}h\omega \cos \alpha - \frac{\sigma}{I}h\omega^2 s(\alpha) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (5.48)$$

где

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma\omega^2 \cos \alpha + \frac{\sigma}{I}F(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha + \frac{\sigma}{I}h\omega s(\alpha) \sin \alpha.$$

Два последних уравнения (5.48) системы (5.47), (5.48) образуют независимую подсистему второго порядка на фазовом цилиндре  $\mathbf{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ .

### 5.3.2. «Погружение» задачи в более широкий класс задач

Система (5.47), (5.48) содержит функции  $F(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ , явный вид которых, даже для пластин простой формы, аналитически описать довольно трудно. По этой причине используется приём «погружения» данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций  $F(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ .

Опорным для нас является результат С. А. Чаплыгина, получившего для плоскопараллельного струйного обтекания пластины бесконечной длины функции  $y(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$  в аналитическом виде [165]:

$$y(\alpha) = y_0(\alpha) = A \sin \alpha, \quad A > 0, \quad (5.49)$$

$$s(\alpha) = s_0(\alpha) = B \cos \alpha, \quad B > 0. \quad (5.50)$$

Этот результат помогает построить функциональные классы  $\{y\}$ ,  $\{s\}$ , а затем и  $\{F\}$ . Сочетая (5.49), (5.50) с экспериментальной информацией о свойствах струйного обтекания, опишем необходимые классы, состоящие из функций достаточно гладких,  $2\pi$ -периодических ( $y(\alpha)$  нечётная, а  $s(\alpha)$  чётная), удовлетворяющих следующим условиям:

$$y(\alpha) > 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad y'(0) > 0, \quad y'(\pi) < 0$$

(класс функций  $\{y\}$ ),

$$s(\alpha) > 0, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad s(\alpha) < 0, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad s(0) > 0, \quad s'(\pi) < 0$$

(класс функций  $\{s\}$ ). Как  $y$ , так и  $s$  меняют знак при замене  $\alpha$  на  $\alpha + \pi$ . Таким образом, мы определили, каким образом выполняется вложение

$$y \in \{y\} = Y, \quad s \in \{s\} = \Sigma.$$

Из перечисленных условий следует, что  $F$  — достаточно гладкая нечётная  $\pi$ -периодическая функция, удовлетворяющая условиям

$$F(\alpha) > 0, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad F'(0) > 0, \quad F'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

(класс функций  $\{F\}$ ). Таким образом, мы определили, каким образом выполняется вложение

$$F \in \{F\} = \Phi.$$

В частности, аналитическая функция

$$F(\alpha) = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi \quad (5.51)$$

является типичным представителем класса функций  $\Phi$  (см. [165]).

В связи с отмеченной в [194] неустойчивостью прямолинейного поступательного торможения можно поставить следующий вопрос: существуют ли угловые колебания оси симметрии тела конечной (ограниченной) амплитуды? Сформулируем этот вопрос в более общем виде: существует ли пара функций  $y$  и  $s$  воздействия среды, такая что для некоторого решения динамической части уравнений движения выполняется ограничение

$$0 < \alpha(t) < \alpha^* < \frac{\pi}{2}$$

начиная с некоторого момента времени  $t = t_1$ ?

При простейшем предположении на функции  $y_N$  и  $s$  воздействия среды на тело ранее показано [194], что при квазистационарном описании взаимодействия среды с симметричным телом (когда величины  $y_N$  и  $s$  зависят лишь от угла атаки ( $H = 0$ )) для любой допустимой пары функций  $y(\alpha)$  и  $s(\alpha)$  воздействия среды во всём диапазоне ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) конечных углов атаки в системе отсутствуют какие-либо колебательные решения конечной (ограниченной) амплитуды.

Таким образом, для возможного положительного ответа на вопрос, поставленный выше, необходимо «привлекать» зависимость момента силы воздействия среды от приведённой угловой скорости. Как будет показано далее, при некоторых предположениях в принципе можно ожидать положительный ответ на данный вопрос.

Конечно, с практической точки зрения важен анализ динамических уравнений лишь в окрестности прямолинейного поступательного торможения, поскольку при некоторых углах атаки происходит замык боковой поверхности и настоящая модель воздействия среды на тело перестаёт быть достоверной. Но, во-первых, для тел с боковой поверхностью различной формы величины критических углов атаки, вообще говоря, различны и неизвестны. Поэтому приходится исследовать весь диапазон углов. Во-вторых, исходная система (5.47), (5.48) является механической системой маятникового типа, обладающей интересными нелинейными свойствами, что побуждает проводить полный нелинейный анализ.

Итак, для исследования плоскопараллельного обтекания пластины средой используются классы динамических систем, определённые с помощью пары функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

### 5.3.3. Многопараметрическое семейство фазовых портретов системы на двумерном цилиндре

Динамическая система (5.48) имеет на двумерном фазовом цилиндре следующие положения равновесия:

$$(0, 0), \quad (\pi, 0), \quad (5.52)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \quad (5.53)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma}\right), \quad \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{-1}{\sigma}\right). \quad (5.54)$$

Необходимо заметить, что положения равновесия (5.53) при любых допустимых параметрах задачи являются седлами, а положения равновесия (5.54) — притягивающими.

Для системы вида (5.47), (5.48) удобно ввести следующие три безразмерных параметра:

$$\mu_1 = 2\frac{B}{mn_0}, \quad \mu_2 = \sigma n_0, \quad \mu_3 = \frac{Bh}{In_0}, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad B = s(0), \quad AB = F'(0). \quad (5.55)$$

Введём обозначения для полос на фазовом цилиндре:

$$\Pi = \left\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad \Pi' = \left\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2: \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

**Теорема 5.3.1.** В бесконечномерном пространстве параметров системы (5.48) имеется область  $\mathbf{J}$  положительной меры, которая соответствует следующему поведению траекторий данной системы:

- 1) других положений равновесия, кроме (5.52)—(5.54), система (5.48) не имеет;
- 2) в полосе  $\Pi'$  система (5.48) не имеет замкнутых фазовых характеристик;
- 3) в полосе  $\Pi$  около положения равновесия  $(0, 0)$  при изменении параметров (5.55) может происходить бифуркация рождения единственного устойчивого предельного цикла из слабого фокуса.

Рассмотрим следующую подобласть области  $\mathbf{J}$ :

$$J_1 = \{(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3: 0 < \mu_3 - \mu_2 < 2\}.$$

В данной работе рассматривается лишь следующая бесконечномерная область параметров системы (5.48):

$$\mathbf{J} \cap J_1. \quad (5.56)$$

**Замечание.** Области параметров (5.56) соответствует следующее поведение фазовых траекторий возле положений равновесия (5.52):

- 1) положение равновесия  $(\pi, 0)$  является отталкивающим;

- 2) положение равновесия  $(0, 0)$  является отталкивающим, если  $\mu_1 > \mu_3 - \mu_2$ , и притягивающим, если  $\mu_1 \leq \mu_3 - \mu_2$ , при этом если  $\mu_1 = \mu_3 - \mu_2$ , то положения равновесия является слабым притягивающим фокусом.

Замкнутые кривые, состоящие из фазовых траекторий системы (5.48), для области параметров (5.56) могут существовать лишь в полосе  $\Pi$  [166].

Основным вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических сёдел.

Рассмотрим ключевые вопросы — о глобальном поведении следующих сепаратрис:

- а) выходящей из точки  $(\pi/2, 0)$  в полосу  $\Pi'$ ;
- б) входящей в точку  $(-\pi/2, 0)$  из полосы  $\Pi$ ;
- в) выходящей из точки  $(\pi/2, 0)$  в полосу  $\Pi$ .

Под независимостью поведения данных сепаратрис будем понимать ситуацию, при которой они имеют предельные множества, независимо выбираемые из области определения всех логически возможных их предельных множеств с учётом характера расположения всех изоклин системы и имеющих положений равновесия.

**Теорема 5.3.2.** *Глобальное поведение любых двух сепаратрис а)–в) независимо, т. е. поведение третьей сепаратрисы определяется через поведение двух других.*

Выберем в качестве пары ключевых сепаратрис, поведение которых независимо, сепаратрисы а) и б).

**Определение 5.3.3.** Индексом  $k_1$  сепаратрисы а) назовём рациональное число, выбираемое из множества

$$\left\{ r \in \mathbf{Q} : r = \frac{1}{4} + m, r = \frac{1}{2} + m, m \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Скажем, что  $k_1 = r$ , если сепаратриса а) имеет в качестве  $\omega$ -предельного множества точку

$$\left( 2\pi r, \frac{1}{\sigma} \right),$$

если  $r = 1/4 + m$ , и точку

$$(2\pi r - 0, +\infty),$$

если  $r = 1/2 + m$ .

**Определение 5.3.4.** Индексом  $k_2$  сепаратрисы б) назовём натуральное число  $j$ , выбираемое из множества

$$\{j \in \mathbb{N} : j = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Скажем, что  $k_2 = j$ , если сепаратриса б) имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества точку  $(0, 0)$  или устойчивый предельный цикл ( $j = 1$ ); точку  $(\pi/2, 0)$  ( $j = 2$ ); точку  $(\pi, 0)$  ( $j = 3$ ); точку  $(-\pi, 0)$  ( $j = 4$ ); точку  $(-\pi, 0)$  ( $j = 5$ ).

Таким образом, видно, что глобальное поведение сепаратрисы в) действительно зависит от индексов  $k_1$  и  $k_2$ , т. е. от поведения сепаратрис а) и б) в каждом конкретном случае.

**Замечание.** Если фиксировать индекс  $k_1$ , то индекс  $k_2$  может в некоторых случаях выбираться из более узкого множества, описанного в определении 5.3.4.

**Теорема 5.3.5.** Для любого  $k = (k_1, k_2)$  из (возможно, усечённой) области определения допустимо соответствующее глобальное поведение сепаратрис а) и б).

Итак, определения 5.3.3 и 5.3.4 корректны, и строится бесконечное семейство фазовых портретов, содержащее портреты с предельными циклами, при этом все портреты имеют различные качественные свойства.

Теорема 5.3.5 позволяет сделать следующий вывод: любое достаточно малое возмущение, дающее искомую систему в рассматриваемой области параметров, описывающей физический маятник на плоскости, бесконечно много раз перестраивает глобальный тип гамильтонового фазового портрета физического маятника.

Некоторые из портретов (индекс  $k$  принимает значения  $(1/4, 2)^*$ ,  $(1/4, 4)^*$ ,  $(1/4, 5)$ ,  $(1/2, 3)^*$ ,  $(1/4, 5)^*$ ,  $(1/4, 3)^*$ ,  $(1/4, 3)$ ,  $(1/4, 4)$ ) показаны на рис. 1–8 соответственно. Здесь звёздочкой помечены фазовые портреты, имеющие в полосе  $\Pi$  простые или сложные предельные циклы.

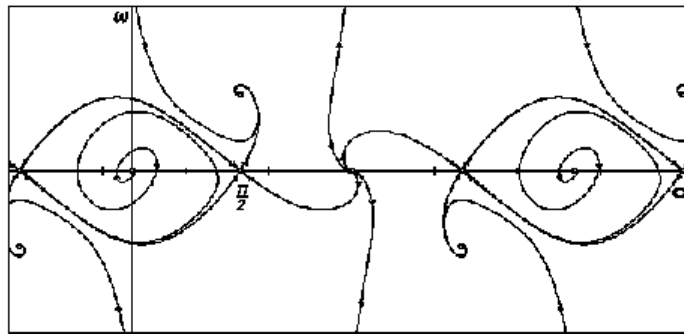


Рис. 1.  $(k_1, k_2) = (1/4, 2)^*$

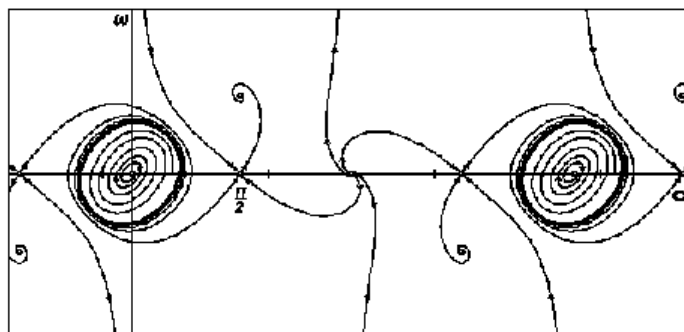


Рис. 2.  $(k_1, k_2) = (1/4, 4)^*$

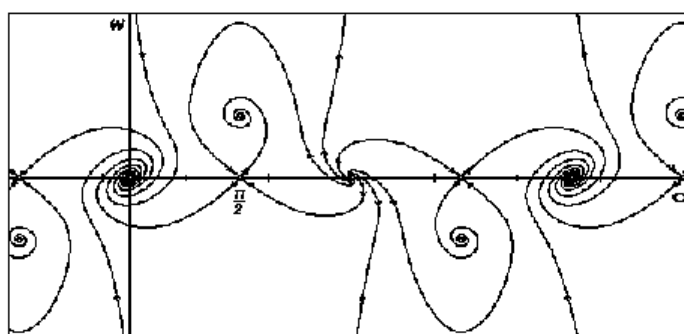


Рис. 3.  $(k_1, k_2) = (1/4, 5)$

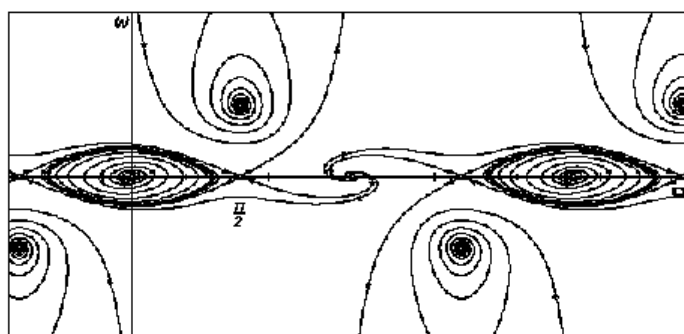
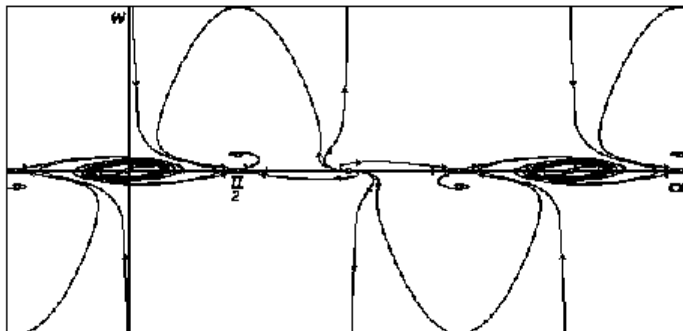
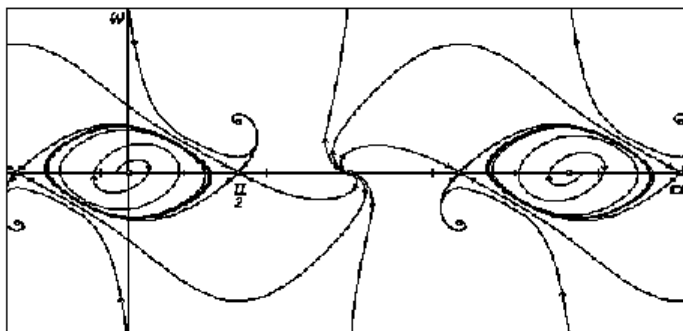
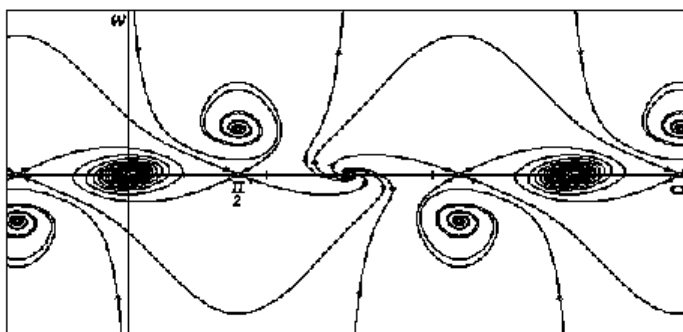


Рис. 4.  $(k_1, k_2) = (1/2, 3)^*$

Рис. 5.  $(k_1, k_2) = (1/4, 5)^*$ Рис. 6.  $(k_1, k_2) = (1/4, 3)^*$ Рис. 7.  $(k_1, k_2) = (1/4, 3)$

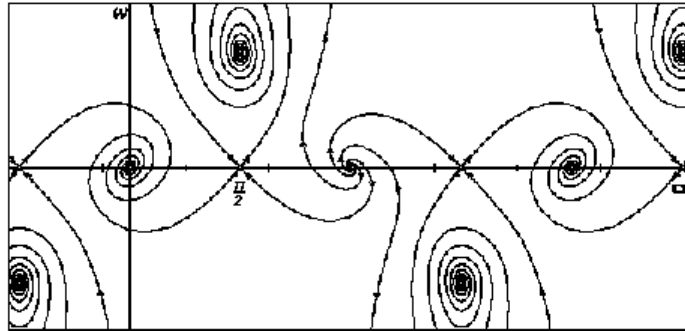


Рис. 8.  $(k_1, k_2) = (1/4, 4)$

Для системы частного вида (5.48) при выполнении условий (5.49), (5.50) (или (5.51)) имеем, таким образом, некоторое трёхпараметрическое семейство фазовых портретов.

Двухпараметрическое семейство, построенное в [171], не содержит предельных циклов, в отличие от только что построенного семейства. Но эти два семейства объединяет тот факт, что каждому значению безразмерных параметров задачи соответствует пара независимых индексов (в данном случае  $k_1, k_2$ ), «кодирующих» топологический тип фазового портрета.

Заметим, что многие утверждения данного раздела справедливы и в более широких областях параметров.

## 6. Случай полной интегрируемости в динамике симметричного четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле

Рассмотрим уравнения движения динамически симметричного четырёхмерного твёрдого тела в двух логически возможных случаях вида его тензора инерции, находящегося в неконсервативном поле сил, построенном из поля силы сопротивления, взятого из динамики трёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой.

### 6.1. Различные варианты движения

Конечно, исследованию случаев полной интегрируемости уравнений движения четырёхмерного твёрдого тела посвящено огромное количество работ. Мы не претендуем в данном вопросе на первенство. Однако при исследовании «маломерных» уравнений движения вполне конкретных (двумерных и трёхмерных

твёрдых тел в неконсервативном поле сил, а именно в поле сил сопротивления) появилась идея обобщить уравнения на случай движения четырёхмерного твёрдого тела в аналогичном поле неконсервативных сил. В результате такого обобщения получились два случая интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырёхмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы, позволяющей методическим образом понизить порядок общей системы динамических уравнений движения.

Более того, на наш взгляд, полученные результаты интересны из-за присутствия в системе (сильно) неконсервативной силы.

Ранее в [122] была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [174] плоская задача была обобщена на пространственный (трёхмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данной работе исследуются уравнения движения динамически симметричного твёрдого тела в двух логически возможных случаях, в зависимости от расстановки главных моментов инерции. Структура таких уравнений движения в некотором смысле сохраняется при переносе на случаи большей размерности.

## 6.2. Два случая динамической симметрии четырёхмерного тела

Пусть четырёхмерное твёрдое тело  $\Theta$  массы  $m$  с гладкой трёхмерной границей  $\partial\Theta$  движется в сопротивляющейся среде, заполняющей четырёхмерную область евклидова пространства. Предположим, что оно является динамически симметричным, при этом имеются две логические возможности представления его тензора инерции: в некоторой связанной с телом системе координат  $Dx_1x_2x_3x_4$  оператор инерции имеет вид

$$\text{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\} \quad (6.1)$$

или вид

$$\text{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}. \quad (6.2)$$

Во втором случае двумерные плоскости  $Dx_1x_2$  и  $Dx_3x_4$  — плоскости динамической симметрии тела.

### 6.3. Физические предположения и уравнения на $\mathfrak{so}(4)$

Предположим, что расстояние от точки  $N$  приложения неконсервативной силы  $\mathbf{S}$  до точки  $D$  является функцией лишь одного параметра — угла  $\alpha$ :

$$DN = R(\alpha)$$

(в случае движения в трёхмерном пространстве это угол атаки). В случае (6.1) этот угол измеряется между скоростью  $\mathbf{v}_D$  точки  $D$  и осью  $Dx_1$ . В случае (6.2) смысл угла будет понятен из уравнений.

Неконсервативная сила (сопротивления)  $\mathbf{S}$  имеет величину

$$S = s(\alpha) \operatorname{sgn} \cos \alpha \cdot v^2, \quad |\mathbf{v}_D| = v,$$

где  $s$  — некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии [194].

Для получения явного вида динамической части уравнений движения определим функции  $R$  и  $S$ , используя при этом информацию о свойствах движения трёхмерных тел, следующим образом (при этом используется также известный аналитический результат С. А. Чаплыгина):

$$R = R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad S = S_v(\alpha) = B v^2 \cos \alpha, \quad A, B > 0.$$

Если  $\Omega$  — тензор угловой скорости четырёхмерного твёрдого тела,  $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$ , то та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре  $\mathfrak{so}(4)$ , имеет вид [191, 194]

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \quad (6.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}, \\ \lambda_1 &= \frac{-I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + I_4}{2}, \\ \lambda_3 &= \frac{I_1 + I_2 - I_3 + I_4}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{I_1 + I_2 + I_3 - I_4}{2}, \end{aligned}$$

$M$  — момент внешних сил, действующих на тело в  $\mathbb{R}^4$ , спроектированный на естественные координаты в алгебре  $\mathfrak{so}(4)$ ,  $[\cdot, \cdot]$  — коммутатор в  $\mathfrak{so}(4)$ . Кососимметрическую матрицу  $\Omega \in \mathfrak{so}(4)$  будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$  — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре  $\mathfrak{so}(4)$ . При этом, очевидно, выполнены равенства

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$$

для любых  $i, j = 1, \dots, 4$ .

При вычислении момента внешней силы необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathfrak{so}(4),$$

переводящее пару векторов из  $\mathbb{R}^4$  в некоторый элемент из алгебры  $\mathfrak{so}(4)$ .

#### 6.4. Динамика в $\mathbb{R}^4$

Поскольку исследуемые системы не являются консервативными, нам потребуется практически «в лоб» исследовать часть основного уравнения динамики, в данном случае уравнение Ньютона. Здесь, конечно же, оно предстаёт перед нами как уравнение движения центра масс.

Что касается уравнения движения центра масс  $C$  четырёхмерного твёрдого тела, то оно представится в виде

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \quad (6.4)$$

где по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2 \mathbf{D}\mathbf{C} + E\mathbf{D}\mathbf{C}, \quad \mathbf{w}_D = \mathbf{v}_D + \Omega \mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega},$$

$\mathbf{F}$  — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае  $\mathbf{F} = \mathbf{S}$ ),  $E$  — тензор углового ускорения.

#### 6.5. Обобщённая задача о движении тела под действием следящей силы

Несколько расширим задачу. Предположим, что по прямой  $Dx_1$  (в случае (6.1)) или в плоскости  $Dx_1x_2$  (в случае (6.2)) действует некоторая следящая сила  $\mathbf{T}$ , линия действия которой проходит через центр масс  $C$ . Введение данной силы используется для рассмотрения интересующих нас классов движений, в результате чего порядок динамической системы может быть понижен (см. также [194]).

#### 6.6. Случай (6.1)

Предполагая, что на тело действует следящая сила  $\mathbf{T}$ , рассмотрим такой класс движений тела, при котором всё время выполнено условие

$$v = \text{const}. \quad (6.5)$$

Вполне определённым выбором величины следящей силы выполнение условия (6.5) может быть достигнуто.

Если  $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  — координаты точки  $N$  в системе  $Dx_1x_2x_3x_4$ ,  $\{-S, 0, 0, 0\}$  — координаты вектора силы сопротивления в той же системе, то для поиска момента силы строится вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ -S & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая позволяет получить в проекциях на координаты в алгебре  $\mathfrak{so}(4)$  момент силы сопротивления:

$$\{0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S\} \in \mathbb{R}^6 \cong M \in \mathfrak{so}(4).$$

Здесь необходимо учесть, что если  $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  — сферические координаты в  $\mathbb{R}^4$ , то

$$x_{2N} = R(\alpha) \cos \beta_1, \quad x_{3N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \cos \beta_2, \quad x_{4N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \sin \beta_2.$$

С учётом всего можно записать уравнение (6.3) в виде

$$\begin{aligned} (\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) &= 0, \\ (\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) &= 0, \\ (\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) &= x_{4N}, \\ (\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) &= 0, \\ (\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) &= -x_{3N}S, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) &= x_{2N}S. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Очевидно, что в случае (6.1) у уравнений (6.6) существуют три циклических первых интеграла:

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \omega_4 = \omega_4^0. \quad (6.7)$$

Рассмотрим для простоты движения на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0.$$

В результате оставшиеся уравнения на алгебре  $\mathfrak{so}(4)$  примут следующий вид (здесь  $n_0^2 = AB/2I_2$ ):

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_3 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2, \\ \dot{\omega}_5 &= -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \\ \dot{\omega}_6 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1. \end{aligned}$$

Если ввести замену угловых скоростей по формулам

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2, \\ z_2 &= -\omega_3 \sin \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_5 \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_6 \sin \beta_1, \\ z_3 &= \omega_3 \sin \beta_2 \sin \beta_1 - \omega_5 \cos \beta_2 \sin \beta_1 + \omega_6 \cos \beta_1, \end{aligned}$$

то «совместные» уравнения движения на касательном расслоении  $T\mathbb{S}^3$  трёхмерной сферы (после учёта четырёх условий (6.5) и (6.7), которые помогают снизить порядок общей системы динамических уравнений движения десятого порядка до шестого) примут симметричный вид ( $\sigma = DC$ ):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\ \dot{z}_3 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha - (z_1^2 + z_2^2) \operatorname{ctg} \alpha, \\ \dot{z}_2 &= z_2 z_3 \operatorname{ctg} \alpha + z_1^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1, \\ \dot{z}_1 &= z_1 z_3 \operatorname{ctg} \alpha - z_1 z_2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_1 &= z_2 \operatorname{ctg} \alpha, \\ \dot{\beta}_2 &= -z_1 \operatorname{ctg} \alpha \csc \beta_1\end{aligned}\tag{6.9}$$

В системе (6.8), (6.9) шестого порядка существует независимая подсистема пятого порядка (6.8). Для полного интегрирования данной системы необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$z_1, z_2 \rightarrow z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad z_* = \frac{z_2}{z_1}$$

система (6.8), (6.9) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\ \dot{z}_3 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha - z^2 \operatorname{ctg} \alpha, \\ \dot{z} &= z z_3 \operatorname{ctg} \alpha,\end{aligned}\tag{6.10}$$

$$\begin{aligned}z_* &= \sqrt{1 + z_*^2} z \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1, \\ \dot{\beta}_1 &= \frac{z z_*}{\sqrt{1 + z_*^2}} \cos \alpha \csc \beta_1,\end{aligned}\tag{6.11}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_1(z, z_*) \operatorname{ctg} \alpha \csc \beta_1.\tag{6.12}$$

Видно, что система (6.8) распалась на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: систему (6.10) третьего порядка и систему (6.11) (конечно, после замены независимого переменного) второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (6.10)–(6.12) достаточно указать два независимых интеграла системы (6.10): один — системы (6.11) и дополнительный интеграл, «привязывающий» уравнение (6.12). При этом заметим, что систему (6.10) можно рассматривать на касательном расслоении  $TS^2$  двумерной сферы.

Система (6.10) появляется в динамике трёхмерного твёрдого тела [187]. Она обладает двумя трансцендентными интегралами:

$$\begin{aligned}\frac{z^2 + z_3^2 - \sigma n_0^2 v z_3 \sin \alpha + n_0^2 v^2 \sin^2 \alpha}{z \sin \alpha} &= C_1 = \operatorname{const}, \\ G\left(\frac{z}{\sin \alpha}, \frac{z_3}{\sin \alpha}, \sin \alpha\right) &= C_2 = \operatorname{const}.\end{aligned}$$

Система (6.11) имеет первый интеграл вида

$$\frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \operatorname{const}.$$

Дополнительный первый интеграл имеет вид

$$\pm \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}, \quad C_4 = \operatorname{const}.$$

Необходимо также заметить, что в приведённых системах в знаменателях содержатся функции  $\sin \alpha$  и  $\sin \beta_1$ , лишь несущие информацию о том, что координаты  $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  являются сферическими, при  $\sin \alpha = 0$  и  $\sin \beta_1 = 0$  они (кинематически) вырождаются.

### 6.7. Случай (6.2)

Неконсервативная сила (сопротивления)  $\mathbf{S} = \{S_1, S_2, 0, 0\}$  и координаты точки её приложения  $N = (0, 0, x_{3N}, x_{4N})$  в системе  $Dx_1x_2x_3x_4$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1 &= S \sin \gamma, & S_2 &= -S \cos \gamma, & \gamma &= \text{const}, \\ x_{3N} &= R \cos \beta_1, & x_{4N} &= R \sin \beta_1 \end{aligned}$$

(при этом  $\gamma$  — угол, измеряемый в плоскости  $Dx_1x_2$ , и  $\beta_1$  — угол, измеряемый в плоскости  $Dx_3x_4$ ). Таким образом, для нахождения момента силы строится вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{3N} & x_{4N} \\ S_1 & S_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если прямая  $CD$  лежит в плоскости  $Dx_1x_2$  и вектор  $\mathbf{DC}$  определяет положение центра масс:

$$\mathbf{DC} = \{\sigma \sin \gamma, -\sigma \cos \gamma, 0, 0\},$$

то вектор скорости  $\mathbf{v}_D$  точки  $D$  можно представить в виде

$$\mathbf{v}_D = \{v \cos \alpha \sin \beta_2, v \cos \alpha \cos \beta_2, v \sin \alpha \cos \beta_1, v \sin \alpha \sin \beta_1\}, \quad |\mathbf{v}_D| = v,$$

где  $\beta_2$  — угол, измеряемый в плоскости  $Dx_1x_2$ .

Теперь можно получить уравнения движения в рассмотренном поле внешней силы, переписав соответствующим образом уравнение (6.3):

$$\begin{aligned} (\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) &= 0, \\ (\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) &= x_{4N}S_2, \\ (\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) &= -x_{4N}S_1, \\ (\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) &= -x_{3N}S_2, \\ (\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) &= x_{3N}S_1, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) &= 0, \end{aligned} \tag{6.13}$$

где

$$\{0, x_{4N}S_2, -x_{4N}S_1, -x_{3N}S_2, x_{3N}S_1, 0\} \in \mathbb{R}^6 \cong M \in \text{so}(4) —$$

момент силы сопротивления.

Очевидно, что система (6.13) допускает наличие двух циклических интегралов:

$$\omega_1 = \omega_1^0 = \text{const}, \quad \omega_6 = \omega_6^0 = \text{const}. \tag{6.14}$$

Будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях интегралов (6.14):

$$\omega_1^0 = \omega_6^0 = 0.$$

Тогда оставшиеся уравнения на алгебре  $\mathfrak{so}(4)$  перепишутся как

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_2 &= -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \gamma, \\ \dot{\omega}_3 &= -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \gamma, \\ \dot{\omega}_4 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1 \cos \gamma, \\ \dot{\omega}_5 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1 \sin \gamma,\end{aligned}$$

при этом  $n_0^2 = AB/(I_1 + I_3)$ .

Мы по-прежнему подразумеваем, что на тело действует следящая сила  $\mathbf{T}$ , и рассмотрим такой класс движений тела, при котором во всё время выполнены условия (неинтегрируемые связи)

$$v = \text{const}, \quad \beta_2 = \text{const}. \quad (6.15)$$

Для этого следящую силу достаточно выбрать так, чтобы первые два уравнения векторного уравнения (6.4) выполнялись тождественно. Это соответствует тому, что результирующая внешняя сила  $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ , действующая на тело, будет обеспечивать выполнение равенств (6.15), которые становятся инвариантными соотношениями. Тем самым порядок независимой системы восьмого порядка вновь снижается до шести.

Итак, выбирая соответствующим образом величину следящей силы, первые два уравнения векторного уравнения (6.4) можно удовлетворить тождественно, при этом, в принципе, могут выполняться инвариантные соотношения (6.15).

Поскольку выполнены равенства

$$\begin{aligned}\Omega \mathbf{v}_D &= v \begin{pmatrix} \omega_5 \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_3 \sin \alpha \sin \beta_1 \\ -\omega_4 \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_2 \sin \alpha \sin \beta_1 \\ -\omega_5 \cos \alpha \sin \beta_2 + \omega_4 \cos \alpha \cos \beta_2 \\ \omega_3 \cos \alpha \sin \beta_2 - \omega_2 \cos \alpha \cos \beta_2 \end{pmatrix}, \\ E \mathbf{D} \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma \dot{\omega}_5 \sin \gamma - \sigma \dot{\omega}_4 \cos \gamma \\ \sigma \dot{\omega}_3 \sin \gamma + \sigma \dot{\omega}_2 \cos \gamma \end{pmatrix}, \\ \Omega^2 \mathbf{D} \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -\sigma \omega_5^2 \sin \gamma - \sigma \omega_4 \omega_5 \cos \gamma - \sigma \omega_3^2 \sin \gamma - \sigma \omega_2 \omega_3 \cos \gamma \\ \sigma \omega_4 \omega_5 \sin \gamma + \sigma \omega_4^2 \cos \gamma + \sigma \omega_2 \omega_3 \sin \gamma + \sigma \omega_2^2 \cos \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

то два последних скалярных уравнения векторного уравнения (6.4) примут вид

$$\begin{aligned}v \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta_1 - v \dot{\beta}_1 \sin \alpha \sin \beta_1 - \\ - \omega_5 v \cos \alpha \sin \beta_2 + \omega_4 v \cos \alpha \cos \beta_2 - \sigma \dot{\omega}_5 \sin \gamma - \sigma \dot{\omega}_4 \cos \gamma = 0,\end{aligned} \quad (6.16)$$

$$v\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta_1 + v\dot{\beta}_1 \sin \alpha \cos \beta_1 + \\ + \omega_3 v \cos \alpha \sin \beta_2 - \omega_2 v \cos \alpha \cos \beta_2 + \sigma \dot{\omega}_3 \sin \gamma + \sigma \dot{\omega}_2 \cos \gamma = 0. \quad (6.17)$$

Уравнения (6.16), (6.17) дополняют оставшиеся четыре уравнения на  $\mathfrak{so}(4)$  до замкнутой динамической системы шестого порядка.

В результате замены угловых скоростей по формулам

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \beta_1 + \omega_5 \sin \beta_1, & z_2 &= \omega_3 \sin \beta_1 - \omega_5 \cos \beta_1, \\ z_3 &= \omega_2 \cos \beta_1 + \omega_4 \sin \beta_1, & z_4 &= \omega_2 \sin \beta_1 - \omega_4 \cos \beta_1, \\ w_1 &= -z_1 \sin \beta_2 + z_3 \cos \beta_2, & w_2 &= z_3 \sin \beta_2 + z_1 \cos \beta_2, \\ w_3 &= z_2 \sin \beta_2 - z_4 \cos \beta_2, & w_4 &= z_4 \sin \beta_2 + z_2 \cos \beta_2 \end{aligned}$$

исследуемая система шестого порядка приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -w_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\ \dot{\beta}_1 &= w_1 \operatorname{ctg} \alpha, \\ \dot{w}_1 &= w_3 w_1 \operatorname{ctg} \alpha, \\ \dot{w}_2 &= -w_4 w_1 \operatorname{ctg} \alpha, \\ \dot{w}_3 &= -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \gamma \sin \beta_2 - \cos \gamma \cos \beta_2) - w_1^2 \operatorname{ctg} \alpha, \\ \dot{w}_4 &= -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha (\cos \gamma \sin \beta_2 + \sin \gamma \cos \beta_2) + w_1 w_2 \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Иными словами, у системы шестого порядка (6.18) появляется независимая подсистема третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -w_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\ \dot{w}_3 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos(\gamma + \beta_2) - w_1^2 \operatorname{ctg} \alpha, \\ \dot{w}_1 &= w_3 w_1 \operatorname{ctg} \alpha, \end{aligned} \quad (6.19)$$

а также могут быть выделены система второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{w}_4 &= -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin(\gamma + \beta_2) + w_1 w_2 \operatorname{ctg} \alpha, \\ \dot{w}_2 &= -w_4 w_1 \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \quad (6.20)$$

и уравнение

$$\dot{\beta}_1 = w_1 \operatorname{ctg} \alpha. \quad (6.21)$$

Как было показано ранее, система (6.19), (6.21) обладает тремя, вообще говоря независимыми, первыми интегралами следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_1(w_1, w_3, \sin \alpha) &= \\ &= \frac{w_1^2 + w_3^2 - \sigma n_0^2 v w_3 \sin \alpha + n_0^2 v^2 \cos(\gamma + \beta_2) \sin^2 \alpha}{w_1 \sin \alpha} = C_1 = \text{const}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\Phi_2(w_1, w_3, \sin \alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (6.23)$$

$$\Phi_3(w_1, w_3, \sin \alpha, \beta_1) = C_3 = \text{const}. \quad (6.24)$$

Все три указанных первых интеграла являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных (с точки зрения комплексного анализа, имеющими

после формального их продолжения в комплексную область существенно особые точки), выражающимися через элементарные функции.

После указанных редукций в рассматриваемой системе шестого порядка для полного её интегрирования достаточно указать ещё один первый интеграл, не зависящий от интегралов (6.22)–(6.24).

После замены переменных

$$w_* = w_3 \sin(\gamma + \beta_2) + w_4 \cos(\gamma + \beta_2), \quad w_{**} = w_1 \sin(\gamma + \beta_2) - w_2 \cos(\gamma + \beta_2)$$

система (6.20) может быть приведена к виду

$$\frac{dw_*}{d\beta_1} = -w_{**}, \quad \frac{dw_{**}}{d\beta_1} = w_*,$$

который предполагает наличие аналитического первого интеграла

$$w_*^2 + w_{**}^2 = C_4 = \text{const.}$$

Итак, исследуемая динамическая система вполне интегрируема в классе (вообще говоря, трансцендентных) функций.

## 7. Заключение

Ранее в основном рассматривались лишь такие движения четырёхмерного тела, когда  $M \equiv 0$  (или имеется ненулевой момент консервативной силы — см., например, работы О. И. Богоявленского [32–34], А. П. Веселова, С. В. Манакова и многих других авторов (нет возможности упомянуть всех)). Данная работа открывает новое направление в исследовании уравнений движения твёрдого тела на  $\text{so}(4) \times \mathbb{R}^4$  при наличии момента неконсервативной внешней силы.

Методика интегрирования рассматриваемых динамических систем часто может быть распространена и на пространство  $\text{so}(n) \times \mathbb{R}^n$  произвольного динамически симметричного  $n$ -мерного твёрдого тела (при данных модельных предположениях).

Автор выражает искреннюю благодарность профессору А. В. Михалёву за обсуждение результатов и ценные замечания.

## Литература

- [1] Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Некоторые актуальные задачи геометрии и механики. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 34.
- [2] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Некоторое уточнение алгоритма Конвея // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2005. — № 3. — С. 53–55.

- [3] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Архимедовы равномерные структуры. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 46—51.
- [4] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Многообразия непрерывных структур. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 71—86.
- [5] Андронов А. А. Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
- [6] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Учёные записки ГГУ. — 1937. — Вып. 6.
- [7] Андронов А. А., Леонтович Е. А. К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории // ДАН СССР. — 1938. — Т. 21, вып. 9.
- [8] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла // Мат. сб. — 1956. — Т. 40, вып. 2.
- [9] Андронов А. А., Леонтович Е. А. О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло—узел // Мат. сб. — 1959. — Т. 48, вып. 3.
- [10] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Динамические системы первой степени негрубости на плоскости // Мат. сб. — 1965. — Т. 68, вып. 3.
- [11] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости // Дифференц. уравн. — 1970. — Т. 6, № 12.
- [12] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
- [13] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1967.
- [14] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // ДАН СССР. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 247—250.
- [15] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. Т. 90. — М.: Наука, 1967.
- [16] Арансон С. Х., Гринес В. З. Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, вып. 1.
- [17] Арнольд В. И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования // Функци. анализ и его прил. — 1967. — Т. 1, № 1. — С. 1—14.
- [18] Арнольд В. И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твёрдого тела в идеальной жидкости // Успехи мат. наук. — 1969. — Т. 24, № 3. — С. 225—226.
- [19] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
- [20] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 1985. — Т. 4. — С. 5—139.
- [21] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 1985. — Т. 3.
- [22] Баггис Г. Ф. Грубые системы двух дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1955. — Т. 10, вып. 4.

- [23] Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. — М.: Наука, 1969.
- [24] Баутин Н. Н. О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокус или центр // Мат. сб. — 1952. — Т. 30 (72), вып. 1.
- [25] Баутин Н. Н. Некоторые методы качественного исследования динамических систем, связанные с поворотом поля // Прикл. математика и механика. — 1973. — Т. 37, вып. 6.
- [26] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
- [27] Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Успехи мат. наук. — 1941. — Т. 9.
- [28] Берже М. Геометрия. — М.: Мир, 1984.
- [29] Бессе А. Л. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981.
- [30] Биркгоф Дж. Динамические системы. — М.; Л.: Гостехиздат, 1941.
- [31] Блисс Дж. А. Лекции по вариационному исчислению. — М.; Л.: Гостехиздат, 1941.
- [32] Богоявленский О. И. Динамика твёрдого тела с  $n$  эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью // ДАН СССР. — 1983. — Т. 272, № 6. — С. 1364—1367.
- [33] Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287, № 5. — С. 1105—1108.
- [34] Богоявленский О. И., Ивах Г. Ф. Топологический анализ интегрируемых случаев В. А. Стеклова // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 4. — С. 145—146.
- [35] Болсинов А. В. Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента // ДАН СССР. — 1988. — Т. 301, № 5. — С. 1037—1040.
- [36] Браилов А. В. Инволютивные наборы на алгебрах Ли и расширение кольца скаляров // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1983. — № 1. — С. 7—51.
- [37] Браилов А. В. Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения // ДАН СССР. — 1983. — Т. 268, № 5. — С. 1043—1046.
- [38] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
- [39] Бурбаки Н. Интегрирование. — М.: Наука, 1970.
- [40] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.
- [41] Буслаев В. С., Налимова В. А. Формула следа в лагранжевой механике // Теор. и матем. физ. — 1984. — Т. 61, № 1. — С. 52—63.
- [42] Бутенина Н. Н. Бифуркации сепаратрис и предельных циклов двумерной динамической системы при повороте поля // Дифференц. уравн. — 1973. — Т. 9, № 8.
- [43] Бутенина Н. Н. К теории бифуркаций динамических систем при повороте поля // Дифференц. уравн. — 1974. — Т. 10, № 7.
- [44] Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе // Функц. анализ и его прил. — 1987. — Т. 21, № 4. — С. 64—65.

- [45] Верников М. Б. К определению связностей, согласованных с симплектической структурой // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1980. — № 7. — С. 77–79.
- [46] Вишик С. В., Должанский С. Ф. Аналоги уравнений Эйлера—Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли // ДАН СССР. — Т. 238, № 5. — С. 1032–1035.
- [47] Вольф Жд. Пространства постоянной кривизны. — М.: Наука, 1982.
- [48] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрия и механика: задачи, подходы, методы. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 301.
- [49] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. О некоторых топологических инвариантах потоков с комплексным потенциалом. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 305.
- [50] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрия и механика: задачи, подходы, и методы. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 16.
- [51] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. О некоторых топологических инвариантах потоков с комплексным потенциалом. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 19.
- [52] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твёрдого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$  // Докл. РАН. — 2001. — Т. 380, № 1. — С. 47–50.
- [53] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. О кинематике твёрдого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ . Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 315.
- [54] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщённые динамические уравнения Эйлера для твёрдого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$  // Докл. РАН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 635–637.
- [55] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в  $\mathbb{R}^n$  // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2003. — № 5. — С. 37–41.
- [56] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Валерий Владимирович Трофимов // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 5–6.
- [57] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. О кинематике твёрдого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ . Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 24–25.
- [58] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщённые динамические уравнения Эйлера для твёрдого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ . Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 30.

- [59] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в  $n$ -мерном пространстве. Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 2007. — Т. 23. — С. 31.
- [60] Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. — М.: Мир, 1981.
- [61] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
- [62] Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки. — М.; Л.: Гостехиздат, 1953.
- [63] Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твёрдого тела. — Киев: Наукова думка, 1978.
- [64] Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшав. унив. изв. — 1916. — Кн. 3. — С. 1—15.
- [65] Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. — М.: Мир, 1981.
- [66] Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. — М.: Мир, 1986.
- [67] Гробман Д. М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. — 1959. — Т. 128, № 5. — С. 880—881.
- [68] Гробман Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в  $n$ -мерном пространстве // Мат. сб. — 1962. — Т. 56, № 1. — С. 77—94.
- [69] Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. — М.: Наука, 1987.
- [70] Диксмье Ж. Универсальные обёртывающие алгебры. — М.: Мир, 1978.
- [71] Диментберг Ф. М. Теория пространственных шарнирных механизмов. — М.: Наука, 1982.
- [72] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы. I // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 1985. — Т. 4. — С. 179—284.
- [73] Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 2. — С. 294—297.
- [74] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
- [75] Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — М.; Л.: Гостехиздат, 1938.
- [76] Карасёв М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. — М.: Наука, 1991.
- [77] Кобаяся Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
- [78] Кобаяся Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. — М.: Наука, 1981.
- [79] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твёрдого тела. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
- [80] Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 3—67.

- [81] Козлов В. В., Колесников Н. Н. Об интегрируемости гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1979. — № 6. — С. 88—91.
- [82] Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика // Международный математический конгресс в Амстердаме. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 187—208.
- [83] Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.
- [84] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
- [85] Ле Нгок Тьеуен. Полные инволютивные наборы функций на расширениях алгебр Ли, связанные с алгебрами Фробениуса // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1985. — Вып. 22. — С. 69—106.
- [86] Ле Хонг Ван. Калибровки, минимальные поверхности и индекс Маслова—Трофимова // Избранные вопросы алгебры, геометрии и дискретной математики. — 1988. — С. 62—79.
- [87] Ле Хонг Ван, Фоменко А. Т. Критерий минимальности лагранжевых подмногообразий в кэлеровых многообразиях // Мат. заметки. — 1987. — Т. 46, № 4. — С. 559—571.
- [88] Леви Ю. И. Об аффинных связностях, присоединённых к кососимметрическому тензору // ДАН СССР. — 1959. — Т. 128, № 4. — С. 668—671.
- [89] Левшеч С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1961.
- [90] Лемлейн В. Г. О пространствах симметричной почти симплектической связности // ДАН СССР. — 1957. — Т. 116, № 4. — С. 655—658.
- [91] Лемлейн В. Г. Тензор кривизны и некоторые типы пространств симметричной почти симплектической связности // ДАН СССР. — 1957. — Т. 117, № 5. — С. 755—758.
- [92] Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
- [93] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // ДАН СССР. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 251—254.
- [94] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // ДАН СССР. — 1955. — Т. 103, № 4.
- [95] Лион Ж., Вернь М. Представление Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды. — М.: Мир, 1983.
- [96] Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твёрдого тела в жидкости // Собрание сочинений. Т. I. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — С. 320—324.
- [97] Манин Ю. И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 1978. — Т. 11. — С. 5—112.
- [98] Мантуров О. В. Однородные пространства и инвариантные тензоры // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1986. — Т. 18. — С. 105—142.
- [99] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. — М.: Мир, 1986.
- [100] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965.

- [101] Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988.
- [102] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.
- [103] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. — М.: Наука, 1978.
- [104] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 386—415.
- [105] Неймарк Ю. И. О движениях, близких к двоякоасимптотическому движению // ДАН СССР. — 1967. — Т. 172, № 5. — С. 1021—1024.
- [106] Неймарк Ю. И. Структура движений динамической системы в окрестности гомоклинической кривой // 5-я летняя мат. школа. — Киев, 1968. — С. 400—435.
- [107] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
- [108] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
- [109] Новак Е. Обобщённый индекс Маслова—Трофимова для некоторых семейств гамильтонианов на алгебрах Ли верхнетреугольных матриц // Алгебра, геометрия и дискретная математика в дискретных задачах. — 1991. — С. 112—135.
- [110] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. — 1982. — Т. 37, № 5. — С. 3—49.
- [111] Новиков С. П., Шмельцер И. Периодические решения уравнения Кирхгофа свободного движения твёрдого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника—Шнирельмана—Морса (ЛМШ). I // Функц. анализ и его прил. — 1981. — Т. 15, № 3. — С. 54—66.
- [112] Пали Дж., Смейл С. Теоремы структурной устойчивости // Сборник переводов «Математика». — 1969. — Т. 13, № 2. — С. 145—155.
- [113] Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986.
- [114] Плисс В. А. О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе // Вестн. ЛГУ. Сер. матем. — 1960. — Т. 13. — С. 15—23.
- [115] Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1967.
- [116] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
- [117] Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике // Избранные труды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1971, 1972.
- [118] Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983.
- [119] Рейман А. Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1980. — Т. 95. — С. 3—54.
- [120] Садэтов С. Т. Условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 3. — С. 56—62.
- [121] Сальникова Т. В. Об интегрируемости уравнений Кирхгофа в симметричном случае // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1985. — № 4. — С. 68—71.
- [122] Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1989. — № 3. — С. 51—54.

- [123] Серр Ж. П. Сингулярные гомологии расслоённых пространств // Расслоённые пространства и их приложения. — М.: Изд. иностр. лит., 1958. — С. 9—114.
- [124] Смейл С. Грубые системы не плотны. — Сборник переводов «Математика». — 1967. — Т. 11, № 4. — С. 107—112.
- [125] Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. — 1970. — Т. 25, № 1. — С. 113—185.
- [126] Стеклов В. А. О движении твёрдого тела в жидкости. — Харьков, 1893.
- [127] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.
- [128] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.
- [129] Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — Т. 43, № 3. — С. 714—732.
- [130] Трофимов В. В. Конечномерные представления алгебр Ли и вполне интегрируемые системы // Мат. сб. — 1980. — Т. 111, № 4. — С. 610—621.
- [131] Трофимов В. В. Теоретико-групповая интерпретация уравнений магнитной гидродинамики идеально проводящей жидкости // Нелинейные колебания и теория управления. — 1981. — № 3. — С. 118—124.
- [132] Трофимов В. В. Вполне интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группах Ли, связанные с коммутативными градуированными алгебрами с двойственностью Пуанкаре // ДАН СССР. — 1982. — Т. 263, № 4. — С. 812—816.
- [133] Трофимов В. В. Вполне интегрируемые системы гидродинамического типа и алгебры с двойственностью Пуанкаре // Школа по теории операторов в функциональных пространствах. — Минск, 1982. — С. 192—193.
- [134] Трофимов В. В. Коммутативные градуированные алгебры с двойственностью Пуанкаре и гамильтоновы системы // Топологические и геометрические методы в математической физике. — Изд-во Воронежского ун-та, 1983. — С. 128—132.
- [135] Трофимов В. В. Расширения алгебр Ли и гамильтоновы системы // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — Т. 47, № 6. — С. 1303—1328.
- [136] Трофимов В. В. Теоретико-групповая интерпретация некоторых классов уравнений классической механики // Дифференциальные уравнения и их приложения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — С. 106—111.
- [137] Трофимов В. В. Новый метод построения вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Качественная теория дифференциальных уравнений и теория управления движением. — Саранск, 1985. — С. 35—39.
- [138] Трофимов В. В. Плоские симметрические пространства с некомпактными группами движений и гамильтоновы системы // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1985. — Вып. 22. — С. 163—174.
- [139] Трофимов В. В. Геометрические инварианты вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Тез. Всесоюзн. конф. по геометрии «в целом». — Новосибирск, 1987. — С. 121.
- [140] Трофимов В. В. Индекс Маслова лагранжевых подмногообразий симплектических многообразий // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1988. — Вып. 23. — С. 190—194.

- [141] Трофимов В. В. О гипотезе Фоменко для вполне геодезических подмногообразий в симплектических многообразиях с почти кэлеровой метрикой // Избранные вопросы алгебры, геометрии и дискретной математики. — 1988. — С. 122—123.
- [142] Трофимов В. В. Обобщённые классы Маслова лагранжевых поверхностей в симплектических многообразиях // Успехи мат. наук. — 1988. — Т. 43, № 4. — С. 169—170.
- [143] Трофимов В. В. Введение в геометрию многообразий с симметриями. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
- [144] Трофимов В. В. Геометрические инварианты лагранжевых слоений // Успехи мат. наук. — 1989. — Т. 44, № 4. — С. 213.
- [145] Трофимов В. В. О геометрических свойствах полного инволютивного семейства функций на симплектическом многообразии // Бакинская междунар. топологическая конф. — Баку, 1989. — С. 173—184.
- [146] Трофимов В. В. Симплектические связности, индекс Маслова и гипотеза Фоменко // ДАН СССР. — 1989. — Т. 304, № 6. — С. 1302—1305.
- [147] Трофимов В. В. Группа голономии и обобщённые классы Маслова подмногообразий в пространствах аффинной связности // Мат. заметки. — 1991. — Т. 49, № 2. — С. 113—123.
- [148] Трофимов В. В. Индекс Маслова в псевдоримановой геометрии // Алгебра, геометрия и дискретная математика в нелинейных задачах. — 1991. — С. 198—203.
- [149] Трофимов В. В. Обобщённые классы Маслова и кобордизмы // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1991. — Вып. 24. — С. 186—198.
- [150] Трофимов В. В. Плоская псевдориманова структура на касательном расслоении плоского многообразия // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, № 3. — С. 177—178.
- [151] Трофимов В. В. Пространство путей и обобщённые классы Маслова лагранжевых подмногообразий // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, № 4. — С. 213—214.
- [152] Трофимов В. В. Псевдоевклидова структура индекса ноль на касательном расслоении плоского многообразия // Избранные вопросы алгебры, геометрии и дискретной математики. — 1992. — С. 158—162.
- [153] Трофимов В. В. О связностях абсолютного параллелизма на симплектическом многообразии // Успехи мат. наук. — 1993. — Т. 48, № 1. — С. 191—192.
- [154] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Динамические системы на орбитах линейных представлений и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем // Функци. анализ и его прил. — 1983. — Т. 17, № 1. — С. 31—39.
- [155] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, № 2. — С. 3—56.
- [156] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Новейшие достижения. — 1986. — Т. 29. — С. 3—108.
- [157] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 1987. — Т. 16. — С. 227—299.

- [158] Трофимов В. В., Шамолин М. В. Диссипативные системы с нетривиальными обобщёнными классами Арнольда—Маслова. Тез. докл. семинара по векторному и тензорному анализу им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2000. — № 2. — С. 62.
- [159] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
- [160] Фоменко А. Т. Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных гамильтоновых систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1991. — Т. 55, № 4. — С. 747—779.
- [161] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.
- [162] Фукс Д. Б. О характеристических классах Маслова—Арнольда // ДАН СССР. — 1968. — Т. 178, № 2. — С. 303—306.
- [163] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
- [164] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
- [165] Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
- [166] Шамолин М. В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1992. — № 2. — С. 52—56.
- [167] Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1992. — № 1. — С. 52—58.
- [168] Шамолин М. В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. математика и механика. — 1993. — Т. 57, вып. 4. — С. 40—49.
- [169] Шамолин М. В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1993. — № 2. — С. 66—70.
- [170] Шамолин М. В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удалённые точки, для динамических систем на плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1993. — № 1. — С. 68—71.
- [171] Шамолин М. В. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 5. — С. 611—614.
- [172] Шамолин М. В. Об относительной грубости динамических систем в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде. Тез. докл. Чебышёвских чтений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1995. — № 6. — С. 17.
- [173] Шамолин М. В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1996. — № 4. — С. 57—69.
- [174] Шамолин М. В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Докл. РАН. — 1996. — Т. 349, № 2. — С. 193—197.
- [175] Шамолин М. В. Определение относительной грубости и двухпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, вып. 1. — С. 175—176.

- [176] Шамолин М. В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 2. — С. 65—68.
- [177] Шамолин М. В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи мат. наук. — 1997. — Т. 52, вып. 3. — С. 177—178.
- [178] Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, вып. 3. — С. 209—210.
- [179] Шамолин М. В. Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1998. — № 6. — С. 29—37.
- [180] Шамолин М. В. Некоторые классы частных решений в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1999. — № 2. — С. 178—189.
- [181] Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 1999. — Т. 364, № 5. — С. 627—629.
- [182] Шамолин М. В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, вып. 5. — С. 181—182.
- [183] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. — 2000. — Т. 375, № 3. — С. 343—346.
- [184] Шамолин М. В. Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 2000. — Т. 371, № 4. — С. 480—483.
- [185] Шамолин М. В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости систем с переменной диссипацией. Тез. докл. семинара по векторному и тензорному анализу им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2000. — № 2. — С. 63.
- [186] Шамолин М. В. О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 55, вып. 3. — С. 187—188.
- [187] Шамолин М. В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2001. — № 5. — С. 22—28.
- [188] Шамолин М. В. Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твёрдого тела // Прикл. механика. — 2001. — Т. 37, № 6. — С. 74—82.
- [189] Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, вып. 1. — С. 169—170.
- [190] Шамолин М. В. Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой // Прикл. механика. — 2004. — Т. 40, № 4. — С. 137—144.
- [191] Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на  $so(4) \times \mathbb{R}^n$  // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, вып. 6. — С. 233—234.
- [192] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учёте вращательных производных момента сил по угловой скорости // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 4. — С. 482—485.

- [193] Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикл. математика и механика. — 2005. — Т. 69, вып. 6. — С. 1003—1010.
- [194] Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твёрдого тела. — М.: Экзамен, 2007.
- [195] Шамолин М. В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учёте вращательных производных момента силы её воздействия // Изв. РАН. МТТ. — 2007. — № 3. — С. 187—192.
- [196] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем // Тез. докл. Междунар. конф. «Классические задачи динамики твёрдого тела» (9—13 июня 2007 г.). — Донецк: Ин-т прикл. мат. и механ. НАН Украины, 2007. — С. 81—82.
- [197] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, вып. 5. — С. 169—170.
- [198] Шамолин М. В. Трёхпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 2008. — Т. 418, № 1. — С. 46—51.
- [199] Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.
- [200] Dazord P. Invariants homotopiques attachés aux fibrés symplectiques // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1979. — Vol. 29, no. 2. — P. 25—78.
- [201] Delanghe R., Sommen F., Sousek V. Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.
- [202] Dodson C. T. G. Categories, Bundles and Spacetime Topology. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1988.
- [203] Fomenko A. T., Trofimov V. V. Integrable Systems on Lie Algebras and Symmetric Spaces. — New York: Gordon and Breach, 1988.
- [204] Fujimoto H. Examples of complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^m$  whose Gauss maps omit  $\frac{m(m+1)}{2}$  hyperplanes in general positions // Sci. Rep. Kanazawa Univ. — 1989. — Vol. 33, no. 2. — P. 37—43.
- [205] De Gosson M. La définition de l'indice de Maslov sans hypothèse de transversalité // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1990. — Vol. 310. — P. 279—282.
- [206] Gromov M. Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds // Invent. Math. — 1985. — Vol. 82. — P. 307—347.
- [207] Guillemin V., Sternberg S. Symplectic Technique in Physics. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.
- [208] Harvey R., Lawson H. B. Calibrated geometry // Acta Math. — 1982. — Vol. 148. — P. 47—157.
- [209] Hess H. Connections on symplectic manifolds and geometric quantizations // Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics (Proc. Conf., Aix-en-Provence/Salamanca, 1979). — (Lect. Notes Math.; Vol. 836). — Berlin: Springer, 1980. — P. 153—166.
- [210] Hvidsten M. D. Volume and energy stability for isometric minimal immersions // Illinois J. Math. — 1989. — Vol. 33, no. 3. — P. 488—494.

- [211] Karasev M., Vorobijev Yu. On analog of Maslov class in non-Lagrangian case // Problems of Geometry, Topology and Mathematical Physics. New Developments in Global Analysis ser. — Voronezh: Voronezh Univ. Press, 1992. — P. 37–48.
- [212] Lichnerowicz A. Deformation of algebras associated with a symplectic manifold // Differential Geometry and Mathematical Physics (Liège, 1980; Leuven, 1981) / M. Cahen et al., eds. — Dordrecht: Reidel, 1983. — P. 69–83.
- [213] Marsden J., Weinstein A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry // Rep. Math. Phys. — 1974. — Vol. 5, no. 1. — P. 121–130.
- [214] Miron R., Oproiu V. Almost cosymplectic and conformal almost cosymplectic connections // Revue Roum. Math. Pures Appl. — 1971. — Vol. 16, no. 6. — P. 893–912.
- [215] Morvan J. M. Classes de Maslov d'une immersion Lagrangienne et minimalité // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1981. — Vol. 292. — P. 633–636.
- [216] Patera J., Sharp R. T., Winternitz P. Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17, no. 6. — P. 986–994.
- [217] Peixoto M. On structural stability // Ann. Math. (2). — 1959. — Vol. 69. — P. 199–222.
- [218] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. — 1962. — Vol. 1, no. 2. — P. 101–120.
- [219] Peixoto M. On an approximation theorem of Kupka and Smale // J. Differ. Equ. — 1966. — Vol. 3. — P. 214–227.
- [220] Reinhart B. L. Cobordism and Euler number // Topology. — 1963. — Vol. 2. — P. 173–178.
- [221] Salamon S. Riemannian Geometry and Holonomy Group. — New York: Wiley, 1989. — (Research Notes Math. Ser.; Vol. 201).
- [222] Saletan E. J. Contraction of Lie groups // J. Math. Phys. — 1961. — Vol. 2, no. 1. — P. 1–22.
- [223] Schoen R., Yau S. T. Complete three dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature // Ann. Math. Studies. — 1982. — P. 209–228.
- [224] Shamolin M. V. Some classical problems in a three-dimensional dynamics of a rigid body interacting with a medium // Proc. of ICTACEM'98, Kharagpur, India, December 1–5, 1998. — CD: Aerospace Engineering Dep., Indian Inst. of Technology, Kharagpur, India, 1998.
- [225] Shamolin M. V. Structural stability in 3D dynamics of a rigid // Proc. of WCSMO-3, Buffalo, NY, May 17–21, 1999. — CD: Buffalo, NY, 1999.
- [226] Shamolin M. V. New families of many-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Abstracts of 16th IMACS World Congress 2000, Lausanne, Switzerland, August 21–25, 2000. — CD: EPFL, 2000.
- [227] Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 110, no. 2. — P. 2526–2555.
- [228] Shamolin M. V. Foundations of differential and topological diagnostics // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 114, no. 1. — P. 976–1024.
- [229] Shamolin M. V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 114, no. 1. — P. 919–975.

- [230] Shamolin M. V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // J. Math. Sci. — 2004. — Vol. 122, no. 1. — P. 2841—2915.
- [231] Shamolin M. V. Structural stable vector fields in rigid body dynamics // Proc. 8th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2005), Lodz, Poland, December 12—15, 2005. Vol. 1. — Tech. Univ. Lodz, 2005. — P. 429—436.
- [232] Shamolin M. V. The cases of integrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Proc. 9th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2007), Lodz, Poland, December 17—20, 2007. Vol. 1. — Tech. Univ. Lodz, 2007. — P. 415—422.
- [233] Takiff S. J. Rings of invariant polynomials for class of Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 160. — P. 249—262.
- [234] Tondeur Ph. Affine Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten mit fast-symplectischer Struktur // Comment. Math. Helv. — 1961. — Vol. 36, F. 1. — P. 234—244.
- [235] Torriani H. H. Extensions of simple Lie algebras, integrable systems of Toda lattice type and the heat equation: Preprint Univ. de São Paulo RT-MAP-9001, 1990.
- [236] Trofimov V. V. On the geometric properties of the complete commutative set of functions on symplectic manifold // Тез. Бакинской Междунар. топологической конф. — 1987. — С. 297.
- [237] Trofimov V. V. On the connection on symplectic manifolds and the topological invariants of Hamiltonian systems on Lie algebras // Тез. Междунар. конф. по алгебре. — Новосибирск, 1989. — С. 102.
- [238] Trofimov V. V. Connections on manifolds and new characteristic classes // Acta Appl. Math. — 1991. — Vol. 22. — P. 283—312.
- [239] Trofimov V. V. Symplectic connections and Maslov—Arnold characteristic classes // Adv. Sov. Math. — 1991. — Vol. 6. — P. 257—265.
- [240] Vey J. Deformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique // Comment. Math. Helv. — 1975. — Vol. 50, F. 4. — P. 421—454.
- [241] Wang M. Y. Parallel spinors and parallel forms // Ann. Global Anal. Geom. — 1989. — Vol. 7, no. 1. — P. 59—68.
- [242] Weinstein A. Local structure of Poisson manifolds // J. Differential Geom. — 1983. — Vol. 18, no. 3. — P. 523—558.

