Совместные неоднородные диофантовы приближения на многообразиях*

В. В. БЕРЕСНЕВИЧ
Йоркский университет, Великобритания
e-mail: vb8@york.ac.uk

С. Л. ВЕЛАНИ
Йоркский университет, Великобритания
e-mail: slv3@york.ac.uk

УДК 511.72

Ключевые слова: диофантовы приближения, гипотеза Спринджука, неоднородный принцип переноса.

Аннотация

В 1998 году Д. Я. Клейнбок и Г. А. Маргулис доказали гипотезу Спринджука в метрической теории диофантовых приближений (на самом деле они доказали несколько более общее предположение Бейкера—Спринджука). По существу, эта гипотеза предполагала, что для почти каждой точки $\mathbf{x}$ на невырожденном подмногообразии $\mathcal{M}$ пространства $\mathbb{R}^n$ значение показателя для совместных диофантовых приближений $w_0(\mathbf{x})$ равно $1/n$. В настоящей работе доказывается аналог гипотезы Спринджука в задаче о неоднородных совместных приближениях. Точнее, для произвольного «неоднородного» вектора $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ мы доказываем, что для почти всех точек $\mathbf{x}$ на $\mathcal{M}$ для показателя в совместной неоднородной диофантовой задаче выполнено $w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = 1/n$. Ключевым соображением является *неоднородный принцип переноса*, который позволяет доказать, что для однородного показателя для почти всех $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ выполнено $w_0(\mathbf{x}) = 1/n$ в том и только том случае, когда для каждого $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ для неоднородного показателя выполнено $w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = 1/n$. Неоднородный принцип переноса, предлагаемый в настоящей работе, сильно упрощает рассуждения из недавней работы работы авторов. Новая упрощённая версия делает более ясными основные идеи, в то время как абстрактных и технических моментов с помощью неоднородного принципа переноса удаётся избежать.

Abstract

V. V. Beresnevich, S. L. Velani, Simultaneous inhomogeneous Diophantine approximation on manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 3—17.

In 1998, Kleinbock and Margulis proved Sprindzuk's conjecture pertaining to metrical Diophantine approximation (and indeed the stronger Baker–Sprindzuk conjecture). In essence, the conjecture stated that the simultaneous homogeneous Diophantine exponent $w_0(\mathbf{x}) = 1/n$ for almost every point $\mathbf{x}$ on a nondegenerate submanifold $\mathcal{M}$ of $\mathbb{R}^n$. In this paper, the simultaneous inhomogeneous analogue of Sprindzuk's conjecture is established.

*Первый автор поддержан Исследовательским советом по инженерным и физическим наукам (Великобритания), проект EP/C54076X/1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 3—17.

More precisely, for any "inhomogeneous" vector $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ we prove that the simultaneous inhomogeneous Diophantine exponent $w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ is $1/n$ for almost every point $\mathbf{x}$ on $\mathcal{M}$. The key result is an *inhomogeneous transference principle* which enables us to deduce that the homogeneous exponent $w_0(\mathbf{x})$ is $1/n$ for almost all $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ if and only if, for any $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$, the inhomogeneous exponent $w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = 1/n$ for almost all $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$. The inhomogeneous transference principle introduced in this paper is an extremely simplified version of that recently discovered by us. Nevertheless, it should be emphasised that the simplified version has the great advantage of bringing to the forefront the main ideas while omitting the abstract and technical notions that come with describing the inhomogeneous transference principle in all its glory.

Посвящается 100-летию со дня рождения А. О. Гельфонда

1. Введение

Метрическая теория диофантовых приближений на многообразиях восходит к гипотезе Малера в теории трансцендентных чисел, сформулированной в 1932 году [12]. Как оказалось, эта гипотеза эквивалентна некоторой задаче метрической теории диофантовых приближений на кривых Веронезе. Проблема Малера оставалась ключевой задачей метрической теории чисел в течение 30 лет. Она была решена В. Г. Спринджуком в 1964 году [1]. Более того, полученное В. Г. Спринджуком в [2] решение этой проблемы позволило сформулировать важное общее предположение, о котором мы сейчас будем говорить. Для вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ положим

$$w_0(\mathbf{x}) := \sup\{w \colon \|q\mathbf{x}\| < q^{-w} \text{ для б. м. } q \in \mathbb{N}\}$$

и

$$w_{n-1}(\mathbf{x}) := \sup\bigl\{w \colon \|\mathbf{q}.\mathbf{x}\| < |\mathbf{q}|^{-w} \text{ для б. м. } \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\bigr\}.$$

Здесь и всюду ниже сокращение «для б. м.» означает, что неравенство выполняется для бесконечно многих значений переменной, $|\mathbf{q}| := \max\{|q_1|, \dots, |q_n|\}$ — супремум-норма, $\mathbf{q}.\mathbf{x} := q_1x_1 + \ldots + q_nx_n$ — стандартное скалярное произведение, $\|\cdot\|$ — расстояние до ближайшего целого числа. По понятным соображениям величина $w_0(\mathbf{x})$ называется *совместным диофантовым показателем*, а величина $w_{n-1}(\mathbf{x})$ — *дуальным диофантовым показателем*.

Тривиальным следствием теоремы Дирихле (или просто принципа Дирихле) являются утверждения

$$w_0(\mathbf{x}) \geqslant \frac{1}{n}, \quad w_{n-1}(\mathbf{x}) \geqslant n \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Вообще говоря, диофантовы показатели $w_0(\mathbf{x})$ и $w_{n-1}(\mathbf{x})$ могут равняться бесконечности. Это происходит, например, тогда, когда $n = 1$, а x является числом Лиувилля. Тем не менее простым следствием леммы Бореля—Кантелли в теории вероятностей является тот факт, что для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (в смысле меры

Лебега) в формуле (1) неравенства обращены в противоположную сторону. Значит,

$$w_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}, \quad w_{n-1}(\mathbf{x}) = n \quad \text{для почти всех} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

В. Г. Спинджук предположил, что аналогичное утверждение имеет место для любого невырожденного подмногообразия $\mathcal{M}$ пространства $\mathbb{R}^n$. причём в качестве меры на многообразии следует рассматривать меру Лебега, индуцированную на $\mathcal{M}$. По сути, рассматриваемые невырожденные многообразия $\mathbb{R}^n$ достаточно «искривлённые», причём отклоняются от всякой гиперплоскости по «степенному закону» (см. [3]). Формальное определение таково. Дифференцируемое многообразие $\mathcal{M}$ размерности d, вложенное в $\mathbb{R}^n$, называется невырожденным, ели найдётся такой атлас $\{\mathcal{M}_i, \mathbf{g}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, что каждое отображение (карта) $\mathbf{g}_i\colon \mathcal{M}_i \to U_i$, где U_i — открытое подмножество $\mathbb{R}^d$, является диффеоморфизмом, причём отображение $\mathbf{f}_i := \mathbf{g}_i^{-1}$ невырожденно. Отображение

$$\mathbf{f}\colon U \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \bigl(f_1(\mathbf{u}), \ldots, f_n(\mathbf{u})\bigr)$$

называется невырожденным в точке $\mathbf{u} \in U$, если найдётся некоторое $l \in \mathbb{N}$, такое что $\mathbf{f}$ является l раз непрерывно дифференцируемым в некотором достаточно малом шаре с центром $\mathbf{u}$ и частные производные $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{u}$ вплоть до порядка l порождают всё $\mathbb{R}^n$. Отображение $\mathbf{f}$ называется невырожденным, если оно невырожденно в почти каждой (в смысле d-мерной меры Лебега) точке из U. Всякое вещественное связное аналитическое многообразие, не содержащееся ни в какой гиперплоскости из $\mathbb{R}^n$, как легко убедиться, является невырожденным. Для плоской кривой невырожденность попросту эквивалентна условию, что кривизна почти всюду не обращается в ноль. Короче говоря, невырожденность — это естественное обобщение условия необращения в ноль кривизны, которое позволяет исключить тривиальные контрпримеры к гипотезе Спринджука, которую мы сейчас сформулируем.

Гипотеза Спринджука. Пусть $\mathcal{M}$ — невырожденное подмногообразие $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$w_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}, \quad w_{n-1}(\mathbf{x}) = n \quad \text{для почти всех} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}. \tag{2}$$

В случае $\mathcal{M} := \{(x, x^2, \ldots, x^n)\colon x \in \mathbb{R}\}$ гипотеза Спринджука превращается в проблему Малера. Многообразия, удовлетворяющие (2), принято называть *экстремальными*. Таким образом, гипотеза Спринджука просто утверждает, что всякое невырожденное подмногообразие $\mathbb{R}^n$ является экстремальным. Если быть абсолютно точным, сформулированное выше определение невырожденности было дано Д. Я. Клейнбоком и Г. А. Маргулисом, а не В. Г. Спринджуком. Сам В. Г. Спринджук рассматривал случай аналитического многообразия.

Замечание. Следует отметить, что равенства в (2), касающиеся совместного диофантова показателя $w_0(\mathbf{x})$ и дуального диофантова показателя $w_{n-1}(\mathbf{x})$, связаны между собою классическим принципом переноса (см. раздел 2). Поэтому чтобы установить справедливость сформулированной выше гипотезы, достаточно доказать хотя бы одно из этих неравенств. Другими словами, понятие экстремальности, по сути, не зависит от типа рассматриваемого диофантова показателя, и мы можем работать в рамках той задачи, где удобнее. Вообще говоря, априори не ясно, имеет ли место аналогичная ситуация в неоднородном аналоге гипотезы Спринджука.

Случай $n = 2$ (плоские кривые) был рассмотрен В. М. Шмидтом [13] ещё до того, как В. Г. Спринджук сформулировал свою гипотезу. Но до 1998 года все продвижения в направлении этой гипотезы ограничивались специальными классами многообразий; наиболее значительным был результат В. В. Бересневича и В. И. Берника [4], доказавших гипотезу для кривых в $\mathbb{R}^3$. В своей прорывной работе [11] Д. Я. Клейнбок и Г. А. Маргулис указали полное решение гипотезы Спринджука. Более того, они дали ответ на более общий вопрос А. Бейкера, касающийся более сильного определения экстремальности. Этот вопрос известен как гипотеза Бейкера—Спринджука, в настоящей статье он обсуждаться не будет. Однако неоднородной версии задачи Бейкера—Спринджука посвящена наша работа [7].

Теорема A (Д. Я. Клейнбок, Г. А. Маргулис). *Пусть $\mathcal{M}$ — невырожденное подмногообразие $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{M}$ экстремально.*

Для доказательства своей теоремы Д. Я. Клейнбок и Г. А. Маргулис использовали идеи, почерпнутые из теории динамических систем, в частности из теории потоков на однородных пространствах. Независимо В. В. Бересневич [3] применил классические методы метрической теории чисел, чтобы установить критерий сходимости (типа Хинчина—Грошева), из которого теорема A легко следует. Недавно Д. Я. Клейнбок [10] обобщил теорему A на невырожденные подмногообразия линейных подпространств из $\mathbb{R}^n$. Это естественно вывело класс экстремальных многообразий за рамки обычной невырожденности. Например, аффинные подмногообразия $\mathbb{R}^n$ являются вырожденными, следовательно, результат для невырожденных многообразий для них неприменим.

Теорема B (Д. Я. Клейнбок). *Пусть L — аффинное подпространство $\mathbb{R}^n$.*

1. *Если L является экстремальным и $\mathcal{M}$ — невырожденное подмногообразие в L, то $\mathcal{M}$ экстремально.*
2. *Если L не экстремально, то никакое подмножество L не является экстремальным.*

Поскольку $\mathbb{R}^n$ само является экстремальным, то теорема A содержится в первой части теоремы B.

В настоящей работе мы формулируем неоднородный аналог гипотезы Спринджука для совместных диофантовых приближений. Естественно, мы начинаем с определения совместного неоднородного диофантова показателя. Для $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ положим

$$w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) := \sup\bigl\{w \geqslant 0 \colon \|q\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}\| < |q|^{-w} \text{ для б. м. } q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\bigr\}.$$

Многообразие $\mathcal{M}$ будем называть *совместно неоднородно экстремальным*, если для каждого $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \quad \text{для почти всех} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}. \tag{3}$$

Основным результатом настоящей работы является следующий аналог принципа переноса.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — дифференцируемое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\mathcal{M} \text{ экстремально} \iff \mathcal{M} \text{ является совместно неоднородно экстремальным.}$$

Тривиальной частью теоремы 1 является то, что всякое совместно неоднородно экстремальное многообразие является экстремальным. Это просто следует из равенства $w_0(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}, \mathbf{0})$. Содержательную часть теоремы 1 составляет обратная импликация. Действительно, удивительно, что однородное утверждение ($\mathcal{M}$ является экстремальным) влечёт неоднородное ($\mathcal{M}$ является совместно неоднородно экстремальным). Отметим, что рассуждения, стоящие за неоднородным принципом переноса, связаны с недавно открытым принципом переноса масс [5, 6] в метрической теории чисел.

Следующие утверждения являются простыми следствиями теоремы 1 и представляют собою неоднородные аналоги теорем A и B.

Следствие A. *Пусть $\mathcal{M}$ — невырожденное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{M}$ является совместно неоднородно экстремальным.*

Следствие B. *Пусть L — экстремальное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\mathcal{M}$ — невырожденное подмногообразие в L. Тогда и L и $\mathcal{M}$ являются совместно неоднородно экстремальными.*

Подчеркнём, что следствие A само по себе не даёт неоднородного аналога гипотезы Спринджука. Мы должны сформулировать аналог следствия A для дуальной формы приближений. Для $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ положим

$$w_{n-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) := \sup\bigl\{w > 0 \colon \|\mathbf{q}.\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}\| < |\mathbf{q}|^{-w} \text{ для б. м. } \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\bigr\}.$$

Многообразие $\mathcal{M}$ назовём *дуально неоднородно экстремальным*, если для любого $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$w_{n-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = n \quad \text{для почти всех} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}.$$

Кроме того, многообразие $\mathcal{M}$ назовём просто *неоднородно экстремальным*, если оно одновременно является совместно неоднородно экстремальным и дуально неоднородно экстремальным. Следующее утверждение представляет собой естественный неоднородный аналог гипотезы Спринджука.

Гипотеза НЭ. Пусть $\mathcal{M}$ — невырожденное подмногообразие из $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{M}$ неоднородно экстремально.

Мы приведём простое следствие общего метода, развитого в работе [7], которое вместе со следствием A устанавливает справедливость сформулированной гипотезы.

Следствие A$'$. *Пусть $\mathcal{M}$ — невырожденное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{M}$ является дуально неоднородно экстремальным.*

В неоднородном случае, в отличие от однородного, нет классического принципа переноса, который позволил бы вывести следствие 1 из следствия A и наоборот. Проблема в том, что две формы неоднородной экстремальности, а именно совместная неоднородная экстремальность и дуальная неоднородная экстремальность, должны априори рассматриваться раздельно. Оказывается, что установить дуальную форму неоднородной экстремальности технически гораздо сложнее, чем установить совместную форму. Метод, предложенный в [7], естественно работает с обеими формами экстремальности и даже с более сильными понятиями экстремальности, связанными с аналогами гипотезы Бейкера—Спринджука. В частности, общий неоднородный принцип переноса из [7] позволяет установить следующее утверждение о переносе для невырожденных многообразий:

$$\mathcal{M} \text{ экстремально} \iff \mathcal{M} \text{ неоднородно экстремально.}$$

Это утверждение вместе с теоремой A доказывает неоднородную гипотезу об экстремальности, а также позволяет получить следующий результат:

$$\mathcal{M} \text{ является совместно неоднородно экстремальным} \iff$$
$$\iff \mathcal{M} \text{ является дуально неоднородно экстремальным.}$$

Другими словами, принцип переноса между двумя формами неоднородной экстремальности всё-таки существует, по крайней мере для класса невырожденных многообразий.

Как было сказано выше, неоднородный принцип переноса, предлагающийся в настоящей статье (теорема 1), представляет собой крайне упрощённую версию результата из работы [7]. Однако очень важно отметить преимущества упрощённой версии: она выделяет основные идеи работы [7] и в то же время позволяет дать ясное и самодостаточное доказательство неоднородного аналога гипотезы Спринджука в случае совместных приближений — следствия A.

2. Диофантовы показатели и неравенства переноса

Неравенства переноса в теории диофантовых приближений восходят к результатам А. Я. Хинчина, установившего первые неравенства, касающиеся дуальных и совместных диофантовых показателей. Недавно Я. Бюжо и М. Лоран [8] обнаружили новые неравенства переноса, именно эти неравенства нам будет удобно использовать при доказательстве теоремы 1. В этом разделе мы дадим краткий обзор новых и классических неравенств переноса.

Сначала мы напомним классический *принцип переноса Хинчина*. Для каждого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ этот принцип связывает диофантовы экспоненты $w_0(\mathbf{x})$ и $w_{n-1}(\mathbf{x})$

следующим образом:

$$\frac{w_{n-1}(\mathbf{x})}{(n-1)w_{n-1}(\mathbf{x})+n} \leqslant w_0(\mathbf{x}) \leqslant \frac{w_{n-1}(\mathbf{x})-n+1}{n}.$$

Из этих неравенств немедленно следует, что

$$w_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \iff w_{n-1}(\mathbf{x}) = n.$$

В частности, чтобы доказать гипотезу Спринджука, достаточно установить любое из двух написанных выше равенств. То есть в однородном случае нет необходимости различать две формы экстремальности (дуальную и совместную), поскольку одна из них влечёт другую. Как уже было сказано, в неоднородном случае ситуация другая. Тем не менее имеются различные неравенства переноса для однородных и неоднородных диофантовых показателей (см. [9]), которые мы можем использовать. Недавно найденные Я. Бюжо и М. Лораном неравенства, связывающие диофантовы показатели с их равномерными аналогами, оказываются весьма уместными при доказательстве теоремы 1.

Равномерные диофантовы показатели определяются следующим образом. Пусть $\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$. *Совместный равномерный неоднородный диофантов показатель* $\hat{w}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ — это супремум таких вещественных чисел w, что для любого достаточно большого целого Q найдётся целое q, такое что

$$\|q\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}\| \leqslant Q^{-w}, \quad 0 < |q| \leqslant Q.$$

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\theta \in \mathbb{R}$. *Дуальный равномерный неоднородный показатель* $\hat{w}_{n-1}(\mathbf{x}, \theta)$ — это супремум таких вещественных чисел w', что для любого достаточно большого целого Q найдётся целая точка $\mathbf{q}$, такая что

$$\|\mathbf{q}.\mathbf{x} + \theta\| \leqslant Q^{-w'}, \quad 0 < |\mathbf{q}| \leqslant Q.$$

Если $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \bmod 1$, то определённые выше показатели естественно называть однородными равномерными диофантовыми показателями; в этом случае мы пишем $\hat{w}_0(\mathbf{x})$ вместо $\hat{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ и $\hat{w}_{n-1}(\mathbf{x})$ вместо $\hat{w}_{n-1}(\mathbf{x}, 0)$.

Тривиальным следствием теоремы Дирихле являются соотношения

$$\hat{w}_0(\mathbf{x}) \geqslant \frac{1}{n}, \quad \hat{w}_{n-1}(\mathbf{x}) \geqslant n \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Также легко убедиться, что

$$\begin{aligned} &w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \geqslant \hat{w}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \geqslant 0, \\ &w_{n-1}(\mathbf{x}, \theta) \geqslant \hat{w}_{n-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Из последних трёх неравенств следует, что однородные диофантовы показатели отделены от нуля для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Для неоднородных показателей это не так. Действительно, если $x \in \mathbb{R}$ — число Лиувилля, то $\hat{w}_0(x, \theta)$ обращается в ноль для почти всех $\theta \in \mathbb{R}$ (см. [8] или [9]). Упрощённый вариант основного результата из [8] состоит в следующем.

Теорема C (Я. Бюжо, М. Лоран). *Пусть* $\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \geqslant \frac{1}{\hat{w}_{n-1}(\mathbf{x})}, \quad \hat{w}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \geqslant \frac{1}{w_{n-1}(\mathbf{x})}, \tag{6}$$

причём для почти всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ *в* (6) *имеют место равенства.*

Следующее утверждение является следствием теоремы C.

Следствие 1. *Пусть* $\mathcal{M}$ *является экстремальным подмногообразием в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда для каждого* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ *выполнено*

$$w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \geqslant \frac{1}{n} \quad \text{для почти всех} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}. \tag{7}$$

Доказательство. По определению для экстремального многообразия $\mathcal{M}$ выполнено $w_{n-1}(\mathbf{x}) = n$ для почти всех $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$. Этот факт вместе с неравенствами (4) и (5) даёт, что $\hat{w}_{n-1}(\mathbf{x}) = n$ выполняется для почти всех $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$. Значит, для любого $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$

$$w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \overset{(6)}{\geqslant} \frac{1}{\hat{w}_{n-1}(\mathbf{x})} = \frac{1}{n} \quad \text{для почти всех} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}. \qquad \square$$

Из следствия 1 и того, что $w_0(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, вытекает, что для доказательства теоремы 1 достаточно установить следующее.

Теорема 1*. *Пусть* $\mathcal{M}$ *— дифференцируемое подмногообразие в* $\mathbb{R}^n$. *Если* $\mathcal{M}$ *экстремально, то для любого* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ *выполнено*

$$w_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{для почти всех} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{M}.$$

Важное замечание. Следует отметить, что следствие 1, которое позволяет свести теорему 1 к теореме 1*, вообще говоря, может быть доказано без применения теоремы C. Действительно, доказательство можно провести, используя только классические принципы переноса, а именно теорему VI из главы 5 книги [9]. Таким образом, для доказательства теоремы 1, вообще говоря, не требуются новые достижения в теории переноса. Однако было бы нелепо не использовать теорему C, если она есть. Более того, теорема C даёт больше, чем неравенство (7), для нашего основного результата (теоремы 1): она позволяет показать, что неравенство (7) является равенством для почти всех $\boldsymbol{\theta}$. Следовательно, теорема 1 фактически утверждает, что (3) выполнено для *всех* $\boldsymbol{\theta}$, а не для *почти всех* $\boldsymbol{\theta}$.

3. Доказательство теоремы 1^*

Далее μ обозначает индуцированную меру Лебега на дифференцируемом подмногообразии $\mathcal{M}$ из $\mathbb{R}^n$. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\mathcal{S}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \colon \|q\mathbf{y} + \boldsymbol{\theta}\| < |q|^{-1/n-\varepsilon} \quad \text{для б. м.} \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

и

$$\mathcal{S}_n(\varepsilon) := \mathcal{S}_n^{\mathbf{0}}(\varepsilon).$$

Теорема 1^* будет доказана, если мы установим, что

$$\mu(\mathcal{S}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}) = 0 \ \text{ для любого } \ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n \ \text{ и любого } \ \varepsilon > 0, \tag{8}$$

предположив, что $\mathcal{M}$ является экстремальным, т. е.

$$\mu(\mathcal{S}_n(\varepsilon) \cap \mathcal{M}) = 0 \ \text{ для любого } \ \varepsilon > 0. \tag{9}$$

3.1. Сведение к экстремальным кривым

В этом пункте мы покажем, что достаточно доказать теорему 1 и, следовательно, теорему 1^* для экстремальных дифференцируемых кривых.

Пусть $\mathcal{M}$ — экстремальное дифференцируемое подмногообразие из $\mathbb{R}^n$ размерности $d > 1$. Рассмотрим локальную параметризацию $\mathcal{M}$, заданную следующим образом:

$$\mathbf{f}\colon U \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{M},$$

где U — шар в $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{f}$ — диффеоморфизм. Поскольку $\mathcal{M}$ экстремально, а множества полной и нулевой меры сохраняют меру под действием диффеоморфизма, то множество

$$\mathcal{E} := \left\{ \mathbf{x} \in U\colon w_0\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big) = \frac{1}{n} \right\}$$

является множеством полной меры Лебега в U. Теперь для каждого $\mathbf{x}' = (x'_2, \ldots, x'_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ рассмотрим прямую $L_{\mathbf{x}'}$ в $\mathbb{R}^d$, заданную условиями

$$L_{\mathbf{x}'} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\colon x_2 = x'_2, \ldots,\ x_d = x'_d\}.$$

Определим также

$$\mathcal{E}_{\mathbf{x}'} = \mathcal{E} \cap L_{\mathbf{x}'}, \quad U_{\mathbf{x}'} = U \cap L_{\mathbf{x}'}.$$

Ясно, что $U_{\mathbf{x}'}$ — это или интервал, или пустое множество и что $\mathcal{E}_{\mathbf{x}'} \subset U_{\mathbf{x}'}$. По очевидным соображениям мы рассмотрим лишь случай $U_{\mathbf{x}'} \neq \varnothing$. Поскольку $\mathcal{E}$ имеет полную меру в U, то по теореме Фубини для почти каждого $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{d-1}$ множество $\mathcal{E}_{\mathbf{x}'}$ имеет полную меру в $U_{\mathbf{x}'}$. Обозначим через $\mathbf{f}_{\mathbf{x}'}$ отображение $\mathbf{f}$, ограниченное на $U_{\mathbf{x}'}$. Ясно, что $\mathbf{f}_{\mathbf{x}'}$ — диффеоморфизм из $U_{\mathbf{x}'}$ на $\mathcal{M}_{\mathbf{x}'} = \mathbf{f}(U_{\mathbf{x}'})$. Поскольку $\mathcal{E}_{\mathbf{x}'}$ имеет полную меру в $U_{\mathbf{x}'}$ и $\mathbf{f}_{\mathbf{x}'}$ — диффеоморфизм, то $\mathcal{M}_{\mathbf{x}'}$ экстремально для почти всех $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Следовательно, в предположении, что теорема 1 верна для кривых, мы имеем, что многообразие $\mathcal{M}_{\mathbf{x}'}$ совместно неоднородно экстремальное. Итак, нам надо доказать теорему 1^* только для случая, когда $\mathcal{M}$ является экстремальной дифференцируемой кривой.

Далее $\mathcal{M}$ — экстремальная дифференцируемая кривая в $\mathbb{R}^n$ и $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ фиксировано. Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)\colon I \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфная параметризация для $\mathcal{M}$, где I — некоторый конечный интервал и $\mathbf{f}(I) \subset \mathcal{M}$. Отметим, что $\mathbf{f}(I)$

не обязательно составляет всю кривую $\mathcal{M}$, но нам достаточно доказать теорему 1* для каждой части кривой $\mathcal{M}$. Поскольку $\mathbf{f}$ — диффеоморфизм, теорема о неявной функции позволяет сделать замену переменных так, чтобы

$$f_1(x) = x. \tag{10}$$

Это стандартная *параметризация Монжа*. Поскольку мы можем действовать локально (т. е. на частях $\mathcal{M}$), можно предположить, что

$$C := \sup_{x \in I} |\mathbf{f}'(x)| < \infty; \tag{11}$$

в противном случае мы можем ограничить $\mathbf{f}$ на такой интервал J, что замыкание J содержится в I. По тем же соображениям не ограничивает общности предположение, что кривая $\mathcal{M}$ является ограниченной.

3.2. Вспомогательные леммы

Для $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ определим шар

$$B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \colon |q\mathbf{y} + \mathbf{p} + \boldsymbol{\theta}| < |q|^{-1/n-\varepsilon} \right\}.$$

В общем случае $B = B(\mathbf{x}, r)$ обозначает шар с центром $\mathbf{x}$ радиуса $r > 0$. Для произвольного $\lambda > 0$ обозначим через λB шар, гомотетичный шару B с коэффициентом λ, т. е. $\lambda B := B(\mathbf{x}, \lambda r)$. В этих обозначениях

$$B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) = B\left(\frac{\mathbf{p} + \boldsymbol{\theta}}{q}, |q|^{-1-1/n-\varepsilon} \right).$$

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{M} = \{\mathbf{f}(x) \colon x \in I\}$ — кривая, удовлетворяющая условиям* (10) *и* (11). *Тогда при любом выборе $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\varepsilon > 0$ и $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ будет выполнено*

$$\mu(B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}) \leqslant 2\, n\, C\, |q|^{-1-1/n-\varepsilon}. \tag{12}$$

Более того, если

$$\frac{1}{2} B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) \cap \mathcal{M} \neq \varnothing,$$

то

$$\mu(B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}) \geqslant \frac{1}{2} \min\{C^{-1}, |I|\} |q|^{-1-1/n-\varepsilon}. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $x, x' \in I$ таковы, что $\mathbf{f}(x), \mathbf{f}(x') \in B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)$. Тогда по определению $B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)$, учитывая (10), (11), мы имеем, что $|qx + p_1 + \theta_1| < |q|^{-1-\varepsilon}$ и $|qx' + p_1 + \theta_1| < |q|^{-1/n-\varepsilon}$. Рассматривая разность, находим, что $|q(x - x')| < 2\,|q|^{-1/n-\varepsilon}$. Следовательно,

$$|x - x'| < 2\,|q|^{-1-1/n-\varepsilon}. \tag{14}$$

Обозначим через J наименьший интервал, содержащий все такие x, что $\mathbf{f}(x) \in B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)$. Тогда с учётом (14) получаем, что $|J| \leqslant 2\,|q|^{-1-1/n-\varepsilon}$. Следовательно,

$$\mu(B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}) \leqslant \int\limits_J |\mathbf{f}'(x)|_2\, dx \overset{(11)}{\leqslant} \int\limits_J n\, C\, dx \leqslant n\, C\, |J| \leqslant 2\, n\, C\, |q|^{-1-1/n-\varepsilon},$$

т. е. имеем (12). Для того чтобы доказать (13), зафиксируем такую точку $x \in I$, что
$$\mathbf{f}(x) \in \frac{1}{2} B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon).$$

Тогда
$$|q\mathbf{f}(x) + \mathbf{p} + \boldsymbol{\theta}| < \frac{1}{2}|q|^{-1/n-\varepsilon}. \tag{15}$$

Теперь возьмём произвольную точку $x' \in I$, такую что $|x - x'| < \delta\,|q|^{-1-1/n-\varepsilon}$, где $\delta := (1/2)\min\{C^{-1}, |I|\}$. По теореме о среднем с учётом (11) получаем, что
$$|\mathbf{f}(x') - \mathbf{f}(x)| \leqslant C\,\delta\,|q|^{-1-1/n-\varepsilon} \leqslant \frac{1}{2}|q|^{-1-1/n-\varepsilon}. \tag{16}$$

Объединяя (15) и (16), получаем
$$|q\mathbf{f}(x') + \mathbf{p} + \boldsymbol{\theta}| = \bigl|(q\mathbf{f}(x) + \mathbf{p} + \boldsymbol{\theta}) - q\bigl(\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x')\bigr)\bigr| < \\ < \frac{1}{2}|q|^{-1/n-\varepsilon} + \frac{1}{2}|q|^{-1/n-\varepsilon} = |q|^{-1/n-\varepsilon}.$$

Следовательно, для каждого
$$x' \in J' := \{x' \in I\colon |x - x'| < \delta\,|q|^{-1-1/n-\varepsilon}\}$$
мы имеем $\mathbf{f}(x') \in B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)$. Поскольку $\delta < |I|/2$, то $|J'| \geqslant \delta q^{-1-1/n-\varepsilon}$. Следовательно,
$$\mu(B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}) \geqslant \int_{J'} |\mathbf{f}'(x)|_2\,dx \overset{f_1(x)=x}{\geqslant} \int_{J'} dx = |J'| \geqslant \delta\,|q|^{-1-1/n-\varepsilon}.$$

Мы получили (13), и лемма доказана. □

Следующее утверждение является непосредственным следствием леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{M} = \{\mathbf{f}(x)\colon x \in I\}$ — *кривая, удовлетворяющая условиям* (10) *и* (11). *Тогда для любых* $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $q \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon > 0$ *и* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$, *таких что*
$$|q| > \frac{2}{\varepsilon} \tag{17}$$
и $B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) \cap \mathcal{M} \neq \varnothing$, *справедливо*
$$\mu(B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}) \leqslant \frac{4nC}{\min\{C^{-1}, |I|\}}\,|q|^{-\varepsilon/2}\,\mu\left(B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathcal{M}\right).$$

Доказательство. Просто заметим, что из неравенства (17) следует, что
$$B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) \subset \frac{1}{2} B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$
и применим лемму 1. □

3.3. Отделённые и неотделённые шары

Следующее разложение $\mathcal{S}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}$ является ключевым в доказательстве теоремы 1*. Как мы убедимся, оно очень простое, но эффективное.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Множество $\mathcal{S}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}$ может быть записано в следующем виде (подчёркивающем его природу верхнего предела):

$$\Lambda_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) := \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{q \geqslant s} \bigcup_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n} B_{\mathbf{p},q}^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}. \tag{18}$$

Поскольку $\mathcal{M}$ является ограниченным, для каждого q объединение по $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ конечно. Теперь мы отметим важное различие между двумя типами шаров, появляющихся в (18).

Зафиксируем $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ и $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ясно, что найдётся единственное целое $t = t(q)$, такое что $2^t \leqslant |q| < 2^{t+1}$. Шар $B_{\mathbf{p},q}^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon)$ назовём *отделённым*, если для каждого $q' \in \mathbb{Z}$, $2^t \leqslant |q'| < 2^{t+1}$, и каждого $\mathbf{p}' \in \mathbb{Z}^n$

$$B_{\mathbf{p},q}^{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_{\mathbf{p}',q'}^{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathcal{M} = \varnothing.$$

В противном случае шар $B_{\mathbf{p},q}^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon)$ назовём *неотделённым*.

Естественно, множество $\Lambda_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon)$ распадается на два верхнепредельных множества:

$$\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) := \bigcap_{s=0}^{\infty} \bigcup_{t \geqslant s} \bigcup_{2^t \leqslant |q| < 2^{t+1}} \bigcup_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n, \\ B_{\mathbf{p},q}^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) \text{ отделённый}}} B_{\mathbf{p},q}^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}$$

и

$$\mathcal{N}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) = \bigcap_{s=0}^{\infty} \bigcup_{t \geqslant s} \bigcup_{2^t \leqslant |q| < 2^{t+1}} \bigcup_{\substack{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n, \\ B_{\mathbf{p},q}^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) \text{ неотделённый}}} B_{\mathbf{p},q}^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) \cap \mathcal{M}.$$

Формально

$$\mathcal{S}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) \cap \mathcal{M} = \Lambda_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) = \mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon) \cup \mathcal{N}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon).$$

3.4. Окончание доказательства

Наша цель — установить (8). Ввиду разложения $\Lambda_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon)$ из предыдущего пункта достаточно показать, что

$$\mu\big(\mathcal{N}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon)\big) = \mu\big(\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\theta}}(\varepsilon)\big) = 0.$$

Естественно, мы разберём по отдельности отделённый и неотделённый случаи.

Отделённый случай. По определению отделённых шаров для каждого фиксированного t имеем

$$\sum_{2^t\leqslant|q|<2^{t+1}} \sum_{\substack{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^n,\\ B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)\ \text{отделённый}}} \mu\left(B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap\mathcal{M}\right) =$$

$$= \mu\left(\bigcup_{2^t\leqslant|q|<2^{t+1}} \bigcup_{\substack{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^n,\\ B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)\ \text{отделённый}}} B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap\mathcal{M}\right) \leqslant \mu(\mathcal{M}) < \infty.$$

Это соотношение и лемма 2 показывают, что для $2^t > 2/\varepsilon$ выполнено

$$\sum_{2^t\leqslant|q|<2^{t+1}} \sum_{\substack{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^n,\\ B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)\ \text{отделённый}}} \mu(B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)\cap\mathcal{M}) \ll 2^{-t\varepsilon/2}.$$

Константы в символе Виноградова $\ll$ не зависят от t. Следовательно,

$$\sum_{t\geqslant s}\sum_{2^t\leqslant|q|<2^{t+1}} \sum_{\substack{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^n,\\ B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)\ \text{отделённый}}} \mu(B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)\cap\mathcal{M}) \ll \sum_{t\geqslant s} 2^{-t\varepsilon/2} \to 0 \quad \text{при} \quad s\to\infty. \tag{19}$$

По определению

$$\mathcal{D}^{\boldsymbol\theta}_n(\varepsilon) \subset \bigcup_{t\geqslant s}\bigcup_{2^t\leqslant|q|<2^{t+1}} \bigcup_{\substack{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^n,\\ B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)\ \text{отделённый}}} B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)\cap\mathcal{M} \tag{20}$$

для произвольного s, а согласно соотношению (19) мера правой части (20) стремится к 0 при $s\to\infty$. Значит, левая часть в соотношении (20) должна иметь нулевую меру, т. е.

$$\mu\big(\mathcal{D}^{\boldsymbol\theta}_n(\varepsilon)\big) = 0.$$

Неотделённый случай. Пусть $B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon)$ — неотделённый шар, и пусть $t = t(q)$ определено так, как указано выше. Ясно, что

$$B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon) \subset B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

По определению неотделённого шара имеется другой шар $B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p}',q'}(\varepsilon/2)$, где $2^t \leqslant |q'| < 2^{t+1}$, такой что

$$B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p}',q'}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathcal{M} \neq \varnothing. \tag{21}$$

Легко убедиться, что $q' \neq q$, поскольку в противном случае мы бы имели

$$B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p},q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B^{\boldsymbol\theta}_{\mathbf{p}',q}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varnothing.$$

Возьмём произвольную точку $\mathbf{y}$ в непустом множестве из (21). Из определений $B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},q}(\varepsilon/2)$ и $B^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p}',q'}(\varepsilon/2)$ следует, что

$$|q\mathbf{y}+\mathbf{p}+\boldsymbol{\theta}| < |q|^{-1-\varepsilon/2} \leqslant 2^{t(-1/n-\varepsilon/2)}$$

и

$$|q'\mathbf{y}+\mathbf{p}'+\boldsymbol{\theta}| < |q'|^{-1-\varepsilon/2} \leqslant 2^{t(-1/n-\varepsilon/2)}.$$

Комбинируя эти соотношения, получаем, что

$$\Bigl|\underbrace{(q-q')}_{q''}\mathbf{y}+\underbrace{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')}_{\mathbf{p}''}\Bigr| < 2\cdot 2^{t(-1/n-\varepsilon/2)} < 2^{(t+2)(-1/n-\varepsilon/3)} \tag{22}$$

для всех достаточно больших t. Более того, $0<|q''|\leqslant 2^{t+2}$, что вместе с (22) даёт

$$|q''\mathbf{y}+\mathbf{p}''| < |q''|^{-1/n-\varepsilon/3}.$$

Если последнее неравенство выполнено для бесконечного количества различных $q''\in\mathbb{Z}$, то $\mathbf{y}\in\mathcal{S}_n(\varepsilon/3)\cap\mathcal{M}$. В противном случае найдётся такая пара $(\mathbf{p}'',q'')\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ для которой (22) выполнено для бесконечно многих t. Следовательно, $q''\mathbf{y}+\mathbf{p}''=0$, и значит, $\mathbf{y}$ — рациональная точка. В результате в неотделённом случае получаем

$$\mathcal{N}^{\boldsymbol{\theta}}_n(\varepsilon)\subset\Bigl(\mathcal{S}_n\Bigl(\frac{\varepsilon}{3}\Bigr)\cap\mathcal{M}\Bigr)\cup(\mathbb{Q}^n\cap\mathcal{M}),$$

где $\mathbb{Q}^n$ — множество рациональных точек из $\mathbb{R}^n$. Ввиду (9), поскольку $\mathbb{Q}^n$ является счётным, получаем, что

$$\mu\bigl(\mathcal{N}^{\boldsymbol{\theta}}_n(\varepsilon)\bigr)=0.$$

Это равенство вместе с аналогичным утверждением для $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\theta}}_n(\varepsilon)$ обеспечивает выполнение соотношения (8). Таким образом, теорема 1* доказана.

Мы хотим поблагодарить организаторов конференции «Диофантовы и аналитические проблемы в теории чисел», проходившей в Московском университете с 29 января по 2 февраля 2007 года, за удовольствие выступить с докладом. Второй автор благодарит Министерство внутренних дел за приглашение приехать в Россию, а также Лондонское королевское общество и Математический институт Клэя за финансовую поддержку. Также второй автор считает своим долгом поблагодарить своих девочек Аишу и Айону. Они действительно очень хотели приехать в Москву, чтобы купить матрёшек и играть в снегу. Обещаю, что это случится — когда-нибудь в следующий раз.

Литература

[1] Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. — Минск: Наука и техника, 1967.

[2] Спринджук В. Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 4. — С. 3—68.

[3] Beresnevich V. V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Hungar. — 2002. — Vol. 94, no. 1-2. — P. 99—130.

[4] Beresnevich V. V., Bernik V. I. On a metrical theorem of W. Schmidt // Acta Arith. — 1996. — Vol. 75, no. 3. — P. 219—233.

[5] Beresnevich V. V., Velani S. L. A Mass Transference Principle and the Duffin–Schaeffer conjecture for Hausdorff measures // Ann. Math. — 2006. — Vol. 164. — P. 971—992.

[6] Beresnevich V. V., Velani S. L. Schmidt's theorem, Hausdorff measures and slicing // Int. Math. Res. Notices. — 2006. — ID 48794.

[7] Beresnevich V. V., Velani S. L. An inhomogeneous transference principle and Diophantine approximation // Proc. London Math. Soc. — 2010. — Vol. 101, no. 3. — P. 821—851.

[8] Bugeaud Y., Laurent M. On exponents of homogeneous and inhomogeneous Diophantine approximation // Moscow Math. J. — 2005. — Vol. 5, no. 4. — P. 747—766, 972.

[9] Cassels J. W. S. An introduction to Diophantine Approximation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957.

[10] Kleinbock D. Extremal subspaces and their submanifolds // Geom. Funct. Anal. — 2003. — Vol. 13, no. 2. — P. 437—466.

[11] Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. Math. — 1998. — Vol. 148. — P. 339—360.

[12] Mahler K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen // Math. Ann. — 1932. — Vol. 106. — P. 131—139.

[13] Schmidt W. M. Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Größen // Monatsh. Math. — 1964. — Vol. 63. — P. 154—166.