Леммы о кратностях и обращении в нуль для дифференциальных и q-разностных уравнений в теории Зигеля—Шидловского

Д. БЕРТРАН
Парижский университет VI им. Пьера и Марии Кюри, Франция
e-mail: bertrand@math.jussieu.fr

УДК 511.46+512.628

Ключевые слова: теорема Зигеля—Шидловского, E-функции, q-аналоги.

Аннотация

Мы находим общую оценку для кратности нулей линейных форм от решений функциональных уравнений различных типов, обобщающую оценки кратностей нулей, использовавшиеся в недавних работах, относящихся к теореме Зигеля—Шидловского и её q-аналогам. Мы также предлагаем дуальную версию этой оценки и новую интерпретацию самой теоремы Зигеля в терминах периодов иррегулярной теории Ходжа по Делиню.

Abstract

D. Bertrand, Multiplicity and vanishing lemmas for differential and q-difference equations in the Siegel–Shidlovsky theory, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 19—30.

We present a general multiplicity estimate for linear forms in solutions of various types of functional equations, which extends the zero estimates used in some recent works on the Siegel–Shidlovsky theorem and its q-analogues. We also present a dual version of this estimate, as well as a new interpretation of Siegel's theorem itself in terms of periods of Deligne's irregular Hodge theory.

1. Краткий обзор теории Зигеля—Шидловского

Пусть n — положительное целое, $K \subset \mathbb{C}$ — числовое поле степени $\kappa = [K : \mathbb{Q}]$ и $\mathcal{Y} = {}^{\mathrm{t}}(\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_n)$ — вектор из KE-функций, удовлетворяющий системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}\mathcal{Y}_1\\ \vdots\\ \mathcal{Y}_n\end{pmatrix} = A(z)\begin{pmatrix}\mathcal{Y}_1\\ \vdots\\ \mathcal{Y}_n\end{pmatrix}, \tag{$*$}$$

где $A(z) \in \mathfrak{gl}_n\bigl(K(z)\bigr)$. Пусть $n(\mathcal{Y})$ — размерность наименьшего $\mathbb{C}(z)$-векторного подпространства $\mathcal{M} = \bigl(\mathbb{C}(z)\bigr)^n$, проходящего через $\mathcal{Y}$. Пусть γ — отличный от нуля элемент K, не лежащий в множестве $\mathcal{P}(A)$ полюсов A, и пусть $\mathrm{r}_\gamma(\mathcal{Y})$ — размерность наименьшего K-векторного подпространства W_γ пространства K^n, такого что $\mathcal{Y}(\gamma)$ принадлежит $W_\gamma \otimes_K \mathbb{C}$. Тогда имеет место следующая теорема (см. [2]).

Теорема 1.1 (К. Зигель, А. Б. Шидловский). *В этих условиях*

$$\mathrm{r}_\gamma(\mathcal{Y}) \geqslant n(\mathcal{Y})/\kappa.$$

Фундаментальную роль в доказательстве этой теоремы играет лемма Шидловского, связывающая ранг матрицы над $\mathbb{C}(z)$ и величину n. Она сформулирована в следствии 3.1.

В связи с этой классической теоремой мы напомним следующие результаты, полученные за последние десять лет.

— В 1996 г. Ю. В. Нестеренко и А. Б. Шидловский доказали (в более общей ситуации, см. [1]), что

$$\mathrm{r}_\gamma(\mathcal{Y}) = n(\mathcal{Y})$$

для всех точек γ, за исключением конечного множества $S(A, \mathcal{Y})$, зависящего только от A и $\mathcal{Y}$ и, в частности, не зависящего от K.

— В 2000 г. И. Андре [5] получил новое доказательство теоремы 1.1, основываясь на следующей фундаментальной лемме. Пусть f — $\mathbb{Q}E$-функция, и пусть $\mathcal{L} \in \mathbb{C}(z)[d/dz]$ — дифференциальный оператор минимального порядка, такой что $\mathcal{L}(f) = 0$. Если $f(1) = 0$, то все решения $\mathcal{L}$ обращаются в нуль в точке $z = 1$. Как и в методе Гельфонда—Дебе из теории G-функций, И. Андре строит вспомогательную KE-функцию, имеющую нуль высокой кратности в точке $\gamma = 1$ (а не в 0). Беря произведение сопряжённых к ней функций, он получает $\mathbb{Q}E$-функцию, удовлетворяющую лемме, причём множитель $1/\kappa$ всё ещё сохраняется.

— Ещё одно новое доказательство теоремы 1.1 было получено в 2004 г., оно основано на методе интерполяционных детерминантов М. Лорана (см. [7]). Для этого метода требуется новая лемма о кратностях, касающаяся ранга матрицы «большого»размера над $\mathbb{C}$, состоящей из значений в точках 0 и γ, выступающих в данном случае на равноправных условиях. В разделе 3 настоящей заметки рассматривается эта лемма, а также её дуальная версия, впервые предложенная А. Сертом [14] в случае теоремы Линдемана—Вейерштрасса. Здесь мы описываем её в форме леммы об обращении в нуль.

— Последнее, но немаловажное: Ф. Бёкерс [6] доказал в 2006 г., что

$$\mathrm{r}_\gamma(\mathcal{Y}) = n(\mathcal{Y})$$

для *всех* точек $\gamma \neq 0$, не лежащих в множестве $\mathcal{P}(A)$. Рассуждения основаны на лемме Андре и дифференциальной теории Галуа. Доказано, что лемма Андре справедлива для KE-функций, поэтому множитель $1/\kappa$ в окончательной оценке отсутствует.

Пусть теперь q — ненулевое комплексное число, удовлетворяющее условию $|q| < 1$. Тогда q-разностная система

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}(qz) = A(z)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}(z) \tag{$*_q$}$$

где $A(z) \in \mathrm{GL}_n\big(K(z)\big)$, представляет собой аналог дифференциальной системы $(*)$. Определение E-функции имеет несколько q-версий, отражающих различные q-аналоги целых рациональных чисел и факториалов. Обзор их свойств трансцендентности можно найти в [3,5,11]. Здесь же мы ограничиваемся q-аналогами указанных выше оценок кратностей нулей (см. раздел 4) и доказываем в разделе 5 дуальную лемму об обращении в нуль.

Отметим, что в известном смысле разделы 2—5 этой статьи связаны только с аналитическим изучением приближений Паде первого рода. В частности, мы не обсуждаем их арифметические свойства и не рассматриваем дуальный вопрос о приближениях Паде второго рода, как это делается, например, в работах [3,9]. Конечно, было бы интересно объединить эти два подхода.

В последнем разделе этой статьи мы возвращаемся к теории трансцендентных чисел и объясняем, как теория Делиня иррегулярных периодов может открыть новые возможности для приложений теоремы Зигеля—Шидловского.

2. Мотивировка «больших» оценок для кратностей нулей

Пусть выполняются соглашения из начала раздела 1. Положим $\partial = d/dz$ и для простоты обозначений будем считать, что $\gamma = 1$. Тогда W_1 есть K-векторное подпространство K^n размерности $r{:=}\mathrm{r}_1(\mathcal{Y})$. Пусть $\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_r$ — такое множество решений системы $(*)$ $(*)$, что их значения в 1 составляют базис W_1 над K. Пусть $\mathcal{W}_1$ — порождаемое ими $\mathbb{C}$-векторное пространство решений. В этом контексте метод интерполяционных детерминантов М. Лорана может быть описан следующим образом. Зафиксируем параметры $L, T_0, T_1 \in \mathbb{N}$ и рассмотрим отображение оценки

$$\varphi\colon (\mathbb{C}[z]_{\leqslant L})^n \to \mathbb{C}^{T_0} \oplus \mathbb{C}^{rT_1}$$

$\mathbb{C}$-векторного пространства $(\mathbb{C}[z]_{\leqslant L})^n$ размерности $n(L+1)$, элементы которого есть наборы по n многочленов $s = (p_1, \ldots, p_n)$ степени, не превосходящей L, определённое следующим образом:

$$s = (p_1, \ldots, p_n) \mapsto \varphi(s) = (\partial^t(s.\mathcal{Y})(0)_{t<T_0}; \partial^t(s.\mathcal{Z}_\rho)(1)_{t<T_1}).$$

В базисе пространства $(\mathbb{C}[z]_{\leqslant L})^n$, состоящем из мономов z^l, линейное отображение φ может быть представлено $\big((T_0 + rT_1) \times n(L+1)\big)$-матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0 = \big(\partial^t (z^l \mathcal{Y}_\iota)(0)\big)_{0\leqslant t\leqslant T_0-1;\ 1\leqslant\iota\leqslant n,\ 0\leqslant l\leqslant L} \\ \dots \\ \Phi_\rho = \big(\partial^t (z^l \mathcal{Z}_{\rho,\iota})(1)\big)_{0\leqslant t\leqslant T_1-1;\ 1\leqslant\iota\leqslant n,\ 0\leqslant l\leqslant L} \\ \dots \\ \hfill {\scriptstyle (\rho=1,\dots,r)} \end{pmatrix}.$$

Если известно, что эта матрица имеет максимальный ранг, т. е. что

$$(T_0 + rT_1) - n(L+1) \geqslant 0 \implies \text{отображение } \varphi \text{ инъективно}$$
$$(\text{соответственно } n(L+1) - (T_0 + rT_1) \geqslant 0 \implies \text{отображение } \varphi \text{ сюръективно}),$$

то доказательство теоремы 1.1 может быть завершено выбором максимального ненулевого минора $\Delta \in K^*$ матрицы Φ и оценкой его различных абсолютных значений (реализацию этого подхода можно найти в [7]).

В действительности максимальность ранга обеспечивается заменой нуля в правой части этих неравенств достаточно большими константами, зависящими только от A. Это составляет содержание оценок кратностей нулей (и лемм об обращении в нуль), рассматриваемых в следующем разделе.

3. Обобщённые леммы Шидловского

Мы поставим в соответствие системе дифференциальных уравнений $(*)$ оператор $\nabla = \partial - A$, действующий на векторном пространстве $\mathcal{M} = \big(\mathbb{C}(z)\big)^n$. Пусть ∇^* — индуцируемый ∇ оператор на векторном пространстве $\mathcal{M}^*$, дуальном $\mathcal{M}$: для любой $\mathbb{C}(z)$-линейной формы $s = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{M}^*$ и любого вектора $y = {}^{\mathrm{t}}(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{M}$ функция $s.y = p_1 y_1 + \dots + p_n y_n$ удовлетворяет соотношению

$$(\nabla^* s)(y) = \partial(s.y) - s(\nabla y).$$

В частности, $(\nabla^* s)(y) = \partial(s.y)$ для всех y, принадлежащих $\mathbb{C}$-векторному подпространству $\mathcal{M}^\nabla$ решений системы $(*)$ в соответствующем расширении Пикара—Вессио L поля $\mathbb{C}(z)$. Если $\mathcal{M}'$ — $\mathbb{C}(z)$-подпространство пространства $\mathcal{M}$, замкнутое относительно действия ∇, то обозначим через $\mathcal{M}'^\nabla$ определённое над $\mathbb{C}$ и лежащее в $\mathcal{M}'(L)$ подпространство решений $(*)$.

В этом разделе мы рассмотрим конечное множество $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ и зафиксируем для каждого $\alpha \in \mathcal{R}$ некоторое $\mathbb{C}$-подпространство $\mathcal{W}_\alpha \subset \mathcal{M}^\nabla$ решений системы $(*)$, аналитических в точке α. Будем говорить, что линейная форма s из $\mathcal{M}^*(L) := (\mathbb{C}[z]_{\leqslant L})^n$ *обращается в нуль до порядка не ниже T вдоль $\mathcal{W}_\alpha$*, если для всех $\mathcal{Z} \in \mathcal{W}_\alpha$ аналитическая функция $s.\mathcal{Z}$ имеет нуль порядка не ниже T в точке α.

Теорема 3.1 [7, теорема 1]. *Существует постоянная $c(\nabla)$, эффективно вычислимая в терминах коэффициентов A и $\mathrm{card}(\mathcal{R})$, со следующим свойством. Пусть $\{T_\alpha, \alpha \in \mathcal{R};\ L\}$ — набор неотрицательных целых чисел и s — ненулевая линейная форма из $\mathcal{M}^*(L)$, обращающаяся в нуль до порядка не ниже T_α*

вдоль $\mathcal{W}_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$. Пусть $\mathcal{N}$ — максимальное замкнутое относительно оператора ∇ подпространство $\mathrm{Ker}(s)$ *над полем* $\mathbb{C}(z)$. *Тогда*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \dim(\mathcal{W}_\alpha/\mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{N}^\nabla).T_\alpha \leqslant \dim(\mathcal{M}/\mathcal{N}).L + c(\nabla).$$

Заметим, что $\dim(\mathcal{M}/\mathcal{N})$ — это ранг ν наименьшего $\mathbb{C}(z)$-векторного подпространства $\mathcal{M}^*$, содержащего s и замкнутого относительно ∇^*. Выбирая $\mathcal{R} = \{0\}$, мы получаем из этой теоремы оригинальную лемму Шидловского.

Следствие 3.1 (лемма Шидловского). *Если порядок нуля $s.\mathcal{Y}$ в точке 0 конечен, то он ограничен сверху величиной $\nu L + c(\nabla)$. В частности, в случае $n(\mathcal{Y}) = n$, $\mathrm{ord}_0(s.\mathcal{Y}) > (n-1)L + c(\nabla)$ и $s \neq 0$ линейные формы $s, \nabla^* s, (\nabla^*)^2 s, \ldots, (\nabla^*)^{n-1} s$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.*

Как и в разделе 2, рассмотрим теперь случай, когда $\mathcal{R} = \{0,\ \gamma = 1\}$ содержит два элемента, $\mathcal{W}_0 = \mathbb{C}.\mathcal{Y}$ имеет размерность 1 и $r = \dim(\mathcal{W}_1)$. В общем случае мы будем говорить, что $\mathbb{C}$-векторное пространство $\mathcal{W}_\alpha$ *невырожденное*, если для любого $\mathbb{C}(z)$-подпространства $\mathcal{M}' \neq \mathcal{M}$ пространства $\mathcal{M}$, устойчивого относительно действия ∇, мы имеем

$$\frac{\dim(\mathcal{W}_\alpha/\mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{M}'^\nabla)}{\mathrm{rk}(\mathcal{M}/\mathcal{M}')} \geqslant \frac{\dim(\mathcal{W}_\alpha)}{\mathrm{rk}(\mathcal{M})}.$$

Например, $\mathcal{W}_0 = \mathbb{C}.\mathcal{Y}$ невырожденное, если и только если $n(\mathcal{Y}) = n$.

Следствие 3.2 (большая оценка кратности в дифференциальном случае). *Пусть $T_0, T_1, L \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathcal{M}^*(L)$ обращается в нуль до порядка не ниже T_α вдоль $\mathcal{W}_\alpha$, $\alpha = 0, 1$. Предположим, что $\mathcal{W}_0$ и $\mathcal{W}_1$ невырожденные и $T_0 + rT_1 > nL + nc(\nabla)$. Тогда $s = 0$. Другими словами, отображение φ из раздела 2 инъективно.*

Замечание. В этом утверждении и его аналогах далее предположение о невырожденности $\mathcal{W}_1$ может быть заменено на условие $L > T_1$ (см. [7, предложение 1]).

Используя метод, развитый Д. Массером в контексте алгебраических групп (см. [12]), мы можем вывести из этого критерия инъективности отображения φ новый критерий его сюръективности. Он может быть представлен как лемма об обращении в нуль первой группы когомологий некоторых пучков.

Следствие 3.3 (лемма об обращении в нуль в дифференциальном случае). *Существует константа $\hat{c}(\nabla)$, эффективно вычислимая в терминах элементов A, со следующим свойством. Пусть T_0, T_1, L — неотрицательные целые числа, и пусть $\{a_{0,t},\ 0 \leqslant t \leqslant T_0 - 1,\ a_{\rho,t},\ 1 \leqslant \rho \leqslant r,\ 0 \leqslant t \leqslant T_1 - 1\}$ — набор $T_0 + rT_1$ комплексных чисел. Предположим, что прямая $\mathcal{W}_0 = \mathbb{C}.\mathcal{Y}$ и подпространство $\mathcal{W}_1 = \mathbb{C}.\mathcal{Z}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}.\mathcal{Z}_r$ невырожденные и, более того, что $\mathcal{Y}(0) \neq 0$ и 1 не является полюсом A. Тогда если $nL \geqslant T_0 + rT_1 + \hat{c}(\nabla)$, то существует такая линейная форма $s \in \mathcal{M}^*(L)$, что $\partial^t(s.\mathcal{Y})(0) = a_{0,t}$ для всех $t \leqslant T_0 - 1$*

и $\partial^t(s.\mathcal{Z}_\rho)(1) = a_{\rho,t}$ *для всех* $\rho = 1, \ldots, r$, $t \leqslant T_1 - 1$. *Другими словами,* φ *— сюръективное отображение.*

Доказательство этого следствия представлено в [7, предложение 2]. Его q-аналог будет доказан в разделе 5.

4. q-разностная оценка кратности

Сначала мы напомним общую постановку задачи для q-разностных систем $(*_q)$ (см. [8]). Пусть $|q| < 1$. Для любого $\alpha \in \mathbb{C}^*$ положительная (отрицательная) орбита α есть множество $\{q^n\alpha,\, n \geqslant 0\}$ (соответственно $\{q^n\alpha,\, n \leqslant 0\}$).

Под функцией $f(z)$ класса Нильсена (квазиунипотентного типа) мы понимаем многочлен

$$f(z) = \sum_{i,j} f_{i,j}(z) z^{i/N} (\operatorname{Log} z)^j$$

от рациональных степеней z и $\operatorname{Log} z$ с коэффициентами f_{ij} — мероморфными функциями в точке 0. Для заданного $\alpha \in \mathbb{C}^*$ и некоторой ветви $\operatorname{Log} z$, таких что f определена на положительной орбите α, мы положим

$$\operatorname{ord}^q_\alpha(f) = \sup\{t \in \mathbb{N},\ f(\alpha) = \ldots = f(q^{t-1}\alpha) = 0\}.$$

Если $f \neq 0$, это число конечно и может быть названо *порядком* f *в точке* α относительно q-разностного оператора $\delta_q\colon f \to \delta_q f$, где $\delta_q f(z) = \frac{f(qz)-f(z)}{qz-z}$. Если $\alpha = 0$ и функция f аналитична в точке 0, то $\operatorname{ord}^q_0(f) := \operatorname{ord}_0(f)$ будет кратностью нуля f в точке 0 в обычном смысле, т. е. относительно $\delta_q.(0) := \frac{d}{dz}\big|_0$. Действительно, $\frac{d}{dz}f(0)$ — это предел $\delta_q(f)(\alpha)$ при α, стремящемся к 0.

Мы поставим в соответствие q-разностной системе $(*_q)$ полулинейный автоморфизм Ψ на $\mathbb{C}(z)$-векторном пространстве $\mathcal{M} = \big(\mathbb{C}(z)\big)^n$, заданный равенством

$$(\Psi y)(z) = A(z)^{-1} y(qz).$$

Тогда $\Psi(ay) = a(qz)\Psi y$ для всех $a \in \mathbb{C}(z)$, $y \in \mathcal{M}$ и любое решение $(*_q)$ в q-разностном расширении L поля $\mathbb{C}(z)$ может рассматриваться как Ψ-инвариантный вектор пространства $\mathcal{M}(L)$. Если $\mathcal{M}'$ — $\mathbb{C}(z)$-подпространство $\mathcal{M}$, устойчивое относительно действия Ψ, мы будем обозначать через $\mathcal{M}'^\Psi$ подпространство над $\mathbb{C}$ решений системы $(*)$, содержащихся в $\mathcal{M}'(L)$. Обозначим через Ψ^* полулинейное отображение, индуцированное Ψ на дуальном к $\mathcal{M}^*$ пространстве $\mathcal{M}$: для любой линейной формы $s = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{M}^*$ с коэффициентами в $\mathbb{C}(z)$ и любого $y = {}^{\mathrm{t}}(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{M}$ мы имеем

$$(\Psi^* s.y)(z) = (s.\Psi^{-1} y)(qz) = s(qz)A(z).y(z)$$

и, в частности, $(\Psi^* s).y) = (s.y)(qz)$, если y принадлежит $\mathcal{M}^\Psi$.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что Ψ имеет *регулярную особенность в* 0 с квазиунипотентной локальной монодромией, т. е. существует такое калибровочное преобразование $P \in \mathrm{GL}_n\big(\mathbb{C}(z)\big)$, что матрица $\tilde{A}(z) = P(qz)^{-1}A(z)P(z)$ принадлежит $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[[z]])$ и собственные значения $\tilde{A}(0)$ — рациональные степени q. Тогда (см. [13]), решения $(*_q)$ нильсеновского типа образуют $\mathbb{C}$-векторное пространство $\mathcal{M}^\Psi$ размерности n. Мы не делаем каких-либо предположений относительно ∞, а потому покрываем случаи регулярных и конфлюентных q-гипергеометрических уравнений. Далее мы обозначим $\mathcal{P}f(A)$ объединение не равных нулю полюсов матриц A и A^{-1}.

Пусть теперь $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ — конечное множество комплексных чисел α, возможно содержащее 0, но *не пересекающееся с отрицательной q-орбитой $\mathcal{P}f(A)$*. Для каждого $\alpha \in \mathcal{R}$ фиксируем $\mathbb{C}$-подпространство $\mathcal{W}_\alpha \subset \mathcal{M}^\Psi$ решений системы $(*_q)$, предполагая, что если $\mathcal{R}$ содержит точку 0, то функции, содержащиеся в $\mathcal{W}_0$, аналитичны в 0. Для $\alpha \neq 0$ все элементы из $\mathcal{M}^\Psi$ автоматически голоморфны в точках положительной орбиты α, так что для любой линейной формы s из $\mathcal{M}^*(L) := (\mathbb{C}[z]_{\leqslant L})^n$ и любой точки $\alpha \in \mathcal{R}$ порядок

$$\mathrm{ord}^q_{\mathcal{W}_\alpha}(s) = \min(\mathrm{ord}^q_\alpha(s.\mathcal{Z});\ \mathcal{Z} \in \mathcal{W}_\alpha)$$

обращения в нуль s вдоль $\mathcal{W}_\alpha$ корректно определён.

В этих условиях имеем следующий результат.

Теорема 4.1 [8, теорема 1]. *Предположим, что классы элементов из $\mathcal{R}$ по модулю $q^{\mathbb{Z}}$ различны. Тогда существует постоянная $c(\Psi)$, зависящая только от коэффициентов A и $\mathcal{R}$, удовлетворяющая следующему свойству. Пусть $\{T_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{R};\ L\}$ — совокупность неотрицательных целых чисел, и пусть s — ненулевая линейная форма из $\mathcal{M}^*(L)$, обращающаяся в нуль до порядка не ниже T_α вдоль $\mathcal{W}_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}$. Пусть $\mathcal{N}$ — максимальное $\mathbb{C}(z)$-подпространство $\mathrm{Ker}(s)$, устойчивое относительно действия Ψ. Тогда*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{R}} \dim(\mathcal{W}_\alpha/\mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{N}^\Psi).T_\alpha \leqslant \dim(\mathcal{M}/\mathcal{N}).L + c(\Psi).$$

Как и в разделе 3, пусть ν обозначает размерность наименьшего $\mathbb{C}(z)$-векторного подпространства $\mathcal{M}^*$, содержащего s и устойчивого относительно Ψ^*. Выбирая $\mathcal{R} = \{0\}$ и $\mathcal{W}_0 = \mathbb{C}.\mathcal{Y}$, мы получаем из этой теоремы доказанный М. Амоу и К. Ваананеном [4] q-аналог леммы Шидловского.

Следствие 4.1 (М. Амоу, К. Ваананен). *Если порядок $s.\mathcal{Y}$ в точке 0 конечен, то он ограничен сверху величиной $\nu L + c(\Psi)$. В частности, если $\mathrm{ord}_0(s.\mathcal{Y}) > (n-1)L + c(\Psi)$, $n(\mathcal{Y}) = n$ и $s \neq 0$, то линейные формы s, $\Psi^* s$, $(\Psi^*)^2 s, \ldots, (\Psi^*)^{n-1} s$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.*

Рассмотрим теперь случай, когда множество $\mathcal{R} = \{0, \gamma = 1\}$ состоит из двух чисел и $\mathcal{W}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathcal{Y}$ имеет размерность 1. Положим $r = \dim(\mathcal{W}_1)$. Снова будем говорить, что $\mathbb{C}$-векторное пространство $\mathcal{W}_\alpha$ невырожденно, если для любого

$\mathbb{C}(z)$-подпространства $\mathcal{M}' \neq \mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$, устойчивого относительно Ψ, мы имеем

$$\frac{\dim(\mathcal{W}_\alpha/\mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{M}'^{\Psi})}{\mathrm{rk}(\mathcal{M}/\mathcal{M}')} \geqslant \frac{\dim(\mathcal{W}_\alpha)}{\mathrm{rk}(\mathcal{M})}.$$

Например, пространство $\mathcal{W}_0 = \mathbb{C}{\cdot}\mathcal{Y}$ невырожденно, если и только если $n(\mathcal{Y}) = n$.

Следствие 4.2 (большая q-разностная оценка кратности). *Пусть T_0, T_1, $L \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathcal{M}^*(L)$ обращается в нуль до порядка не ниже T_α вдоль $\mathcal{W}_\alpha$, $\alpha = 0, 1$. Предположим, что $\mathcal{W}_0$ и $\mathcal{W}_1$ невырожденны и $T_0 + rT_1 > nL + nc(\Psi)$. Тогда $s = 0$.*

Замечание. В этом и в следующем утверждениях условие невырожденности $\mathcal{W}_1$ опять может быть заменено предположением, что $L > T_1$. Доказательство этого факта такое же, как и в дифференциальном случае (см. [7, предложение 1]).

Пусть $\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_r$ — базис $\mathcal{W}_1$. Следствие 4.2 утверждает, что отображение φ, поставленное в соответствие $\big((T_0 + rT_1) \times n(L+1)\big)$-матрице

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_0 = \big(\partial^t(z^l \mathcal{Y}_\iota)(0)\big)_{0 \leqslant t \leqslant T_0 - 1;\, 1 \leqslant \iota \leqslant n,\, 0 \leqslant l \leqslant L} \\ \cdots \\ \Phi_\rho = \big((z^l \mathcal{Z}_{\rho,\iota})(q^t)\big)_{0 \leqslant t \leqslant T_1 - 1;\, 1 \leqslant \iota \leqslant n,\, 0 \leqslant l \leqslant L} \\ \cdots \\ {\scriptstyle (\rho = 1, \ldots, r)} \end{pmatrix},$$

инъективно.

В дуальной версии следствия 4.2 мы предположим для простоты, что отображение Ψ *фуксово* в 0, т. е. уже построенное калибровочное отображение P таково, что матрица $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[[z]])K \cap \mathrm{GL}_n\big(\mathbb{C}(z)\big)$ определена и обратима в 0 и точка $\gamma = 1$ не лежит в отрицательной орбите $\mathcal{P}f(A)$. Отметим, однако, что если матрица $A(0)$ не является единичной, 0 по-прежнему будет особенностью Ψ и опять потребуется уже встречавшееся в дифференциальном случае дополнительное предположение, что $\mathcal{Y}(0) \neq 0$.

Следствие 4.3 (q-разностная лемма об обращении в нуль). *Существует постоянная $\hat{c}(\Psi)$, эффективно вычислимая в терминах элементов A и $c(\Psi)$, удовлетворяющая следующему свойству. Пусть T_0, T_1, L — неотрицательные целые числа, и пусть $\{a_{0,t},\ 0 \leqslant t \leqslant T_0 - 1,\ a_{\rho,t},\ 1 \leqslant \rho \leqslant r,\ 0 \leqslant t \leqslant T_1 - 1\}$ — совокупность из $(T_0 + rT_1)$ комплексных чисел. Предположим, что прямая $\mathcal{W}_0 = \mathbb{C} \cdot \mathcal{Y}$ и подпространство $\mathcal{W}_1 = \mathbb{C} \cdot \mathcal{Z}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C} \cdot \mathcal{Z}_r$ невырожденны, отображение Ψ фуксово в 0 и, более того, $\mathcal{Y}(0) \neq 0$ (напомним, что $1 \notin q^{-\mathbb{N}}\mathcal{P}f(A)$). Тогда в случае $nL \geqslant T_0 + rT_1 + \hat{c}(\Psi)$ существует такая линейная форма $s \in \mathcal{M}^*(L)$, что $\partial^t(s.\mathcal{Y})(0) = a_{0,t}$ для всех $t \leqslant T_0 - 1$ и $(s.\mathcal{Z}_\rho)(q^t) = a_{\rho,t}$ для всех $\rho = 1, \ldots, r$, $t \leqslant T_1 - 1$. Другими словами, φ сюръективно.*

Перед тем как перейти к доказательству этого следствия, отметим, что в отличие от дифференциального случая, нам не известно, вычислима ли эффективным способом постоянная $c(\Psi)$ из теоремы 4.1 и, следовательно, $\hat{c}(\Psi)$ в терминах матрицы A. Этот вопрос обсуждается в [8, замечание 2.3].

5. Доказательство q-разностной леммы об обращении в нуль

Пусть L — неотрицательное целое. Нам нужно доказать, что в условиях следствия 4.3 $T_0 + rT_1$ линейных форм $\mathbb{C}$-векторного пространства $\mathcal{M}^*(L) = (\mathbb{C}[z]_{\leqslant L})^n$, определённых равенствами

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ev}_{0,t}(s) = \partial^t(s.\mathcal{Y})(0) \quad (t = 0, \ldots, T_0 - 1),\\
&\mathrm{ev}_{i,t}(s) = (s.\mathcal{Z}_i)(1) \qquad (i = 1, \ldots, r;\ t = 0, \ldots, T_1 - 1),
\end{aligned}$$

линейно независимы над $\mathbb{C}$. Согласно предположению существует общий знаменатель $Q \in \mathbb{C}[z]$ элементов матриц $A(z)$ и $A(z)^{-1}$, такой что $Q(0)$ и $Q(1)$ не равны нулю. Обозначим через δ максимальную из степеней элементов Q, QA, QA^{-1}. Рассмотрим полулинейный оператор $\tilde{\Psi} := Q(z)\Psi^*$ на $\mathcal{M}^*$, удовлетворяющий условию

$$\forall s \in \mathcal{M}^*\ \forall y \in \mathcal{M}^{\Psi}\ \tilde{\Psi}s \cdot y = Q(z)(s \cdot y)(qz) = \big(s(qz)\mathbb{Q}A(z)\big) \cdot y(z).$$

В частности, образ $\mathcal{M}^*(L)$ при отображении $\tilde{\Psi}$ лежит в $\mathcal{M}^*(L + \delta)$.

Пусть сначала $T_1 = 0$. Мы построим действительное число $c_0'(\Psi)$, такое что для всех $T_0 \leqslant nL - c_0'(\Psi)$ T_0 линейных форм $\mathrm{ev}_{0,t} := \mathrm{ev}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T_0 - 1$, на $\mathcal{M}(L)^*$ линейно независимы над $\mathbb{C}$.

Так как $\mathcal{Y}(0) \neq 0$, линейная форма ev_0 отлична от 0 и мы можем определить наибольшее целое число $\tau_0 \geqslant 1$, такое что линейные формы ev_t, $0 \leqslant t \leqslant \tau_0 - 1$, линейно независимы. Если элемент s из $\mathcal{M}^*(L)$ обращается в нуль до порядка не ниже τ_0 вдоль $\mathcal{W}_0$, то он будет обращаться в нуль и до порядка не ниже $\tau_0 + 1$. Пусть L' таково, что $\tau_0 + n > n(L' + 1) \geqslant \tau_0$. В линейной алгебре доказывается, что существует ненулевой элемент $\sigma \in \mathcal{M}^*(L')$, обращающийся в нуль на элементах ev_t, $t \leqslant \tau_0 - 1$. Для любого k, такого что $L' + k\delta \leqslant L$, $\tilde{\Psi}^k(\sigma)$ лежит в $\mathcal{M}^*(L)$. Обозначим через k_1 целую часть $(L - L')/\delta$.

Так как $Q(0) \neq 0$, мы выводим из соотношений $\tilde{\Psi}s \cdot \mathcal{Y} = Q(z)(s \cdot \mathcal{Y})(qz)$ и из предположений о ev_{τ_0}, что σ обращается в нуль до порядка не ниже $\tau_0 + k_1$. Оценка кратности следствия 4.2 даёт $\tau_0 + k_1 \leqslant nL' + c(\Psi)$. Поэтому $k_1 \leqslant c(\Psi)$ и $\tau_0 \geqslant nL' \geqslant n(L - (c(\Psi) + 1)\delta)$. Поскольку $T_0 < nL - c_0'(\Psi)$ для $c_0'(\Psi) = n(c(\Psi)+1)\delta$, можно утверждать, что ev_t, $0 \leqslant t \leqslant T_0 - 1$, линейно независимы.

Теперь покажем, что если $rT_1 < nL - c_1'(\Psi)$ для $c_1'(\Psi) = 3nc(\Psi)\delta$, то линейные формы $\mathrm{ev}_{i,t}$, $i = 1, \ldots, r$, $0 \leqslant t \leqslant T_1 - 1$, линейно независимы. Так как точка 1 не принадлежит отрицательной орбите $\mathcal{P}f(A)$, то любой элемент $\mathcal{Z}$ из $\mathcal{M}^{\Psi}$, такой что $\mathcal{Z}(1) = 0$, обращается в нуль на всей положительной орбите 1 и должен поэтому быть равным нулю тождественно, ведь его компоненты принадлежат классу Нильсена. Поэтому $\mathcal{Z}_1(1), \ldots, \mathcal{Z}_r(1)$ и, следовательно,

$\mathrm{ev}_{1,0}, \ldots, \mathrm{ev}_{r,0}$ линейно независимы над $\mathbb{C}$. Теперь можно определить наибольшее целое $\tau_1 \geqslant 1$, такое что все $\mathrm{ev}_{i,t}$, $i = 1, \ldots, r$, $t < \tau_1$, линейно независимы, а, скажем, ev_{1,τ_1} лежит в их $\mathbb{C}$-линейной оболочке. Пусть $c > 2c(\Psi)$ и L' таковы, что $r\tau_1 + (r-1)c \sim nL'$. В линейной алгебре доказывается, что существует ненулевой элемент $\sigma \in \mathcal{M}^*(L')$, который обращается в нуль до порядка не ниже $\tau_1 + c$ вдоль $\mathcal{Z}_i$, $i = 2, \ldots, r$, и до порядка не ниже τ_1 вдоль $\mathcal{Z}_1$. Рассуждая так же, как и ранее, получаем, что σ обращается в нуль до порядка не ниже $\tau_1 + k$ вдоль *всех* $\mathcal{Z}_i$ при $k < c$ и $L' + k\delta \leqslant L$. При этих ограничениях из следствия 4.2 вытекает, что $r(\tau_1 + k) \leqslant nL' + c(\Psi) \leqslant r\tau_1 + (r-1)c + c(\Psi)$, так что $k \leqslant \bigl(1 - \frac{1}{2r}\bigr)c < c$. Поэтому $\bigl[\frac{L-L'}{\delta}\bigr] \leqslant \bigl(2 - \frac{1}{r}\bigr)c(\Psi)$ и $r\tau_1 \geqslant nL - c_1'(\Psi)$. Наше утверждение доказано.

Наконец, проверим, что следствие 4.3 остаётся справедливым при $\hat{c}(\Psi) := \sup\bigl(c_1'(\Psi), c_0'(\Psi)\bigr)$. Если $T_0 + rT_1 \leqslant nL - \hat{c}(\Psi)$, мы, в частности, имеем $rT_1 \leqslant nL - c_1'(\Psi)$ и rT_1 линейно независимых нормирований $\mathcal{M}^*(L)$ вдоль $\mathcal{W}_1$. Пусть τ_0 — наибольшее целое, такое что линейные формы $\mathrm{ev}_{0,t}$, $t \leqslant \tau_0 - 1$, дополняют их до свободного семейства. Для $c = 2c(\Psi)$ и L', для которых $\tau_0 + r(T_1 + c) \sim nL'$, мы можем построить элемент $\sigma \in \mathcal{M}^*(L')$, обращающийся в нуль до порядка не ниже $T_1 + c$ вдоль $\mathcal{W}_1$ и до порядка не ниже τ_0 вдоль $\mathcal{W}_0$. Тогда для любого $k < c$, такого что $L' + k\delta \leqslant L$, имеем $\tau_0 + k + r(T_1 + c) \leqslant nL' + c(\Psi)$. Значит, $k \leqslant c(\Psi)$ и $\tau_0 + rT_1 \geqslant nL - c_0'(\Psi)$. Доказательство леммы об обращении в нуль завершено.

6. Иррегулярные периоды Делиня

Теорема Зигеля—Шидловского говорит о значениях в алгебраической точке γ решений систем дифференциальных уравнений с иррегулярной особенностью в ∞. В то же время периоды $\bar{\mathbb{Q}}$-рациональных абелевых интегралов — это значения в алгебраических точках решений дифференциальных уравнений, имеющих только регулярные особенности. О свойствах алгебраической независимости этих периодов известно очень мало.

Набросок иррегулярной теории Ходжа, предложенный П. Делинем в [10], даёт возможность использовать обобщённое понятие периода, для которого иногда применима теорема Зигеля—Шидловского. Говоря простым языком, эта теория ставит в соответствие некоторым типам экспоненциальных отображений над подполем k поля комплексных чисел k-векторное пространство H^1_{dR} классов когомологий дифференциальных форм и $\mathbf{Q}$-векторное пространство H^B_1 классов когомологий циклов, расширения которых до $\mathbb{C}$ могут быть естественно спарены и потому дают матрицы «периодов». Например, в случае e^{-z^2} имеем

$$
\begin{aligned}
&H^1_{dR} = \{e^{-z^2}\mathbb{Q}[z]\,dz\}/d(\{e^{-z^2}\mathbb{Q}[z]\}) \simeq \mathbb{Q}e^{-z^2}\,dz,\\
&H^B_1 = \mathbb{Z}.\gamma, \quad \gamma \text{ — действительная прямая } \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

(1×1)-матрица периодов задаётся в этом случае соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}$$

(это не период в смысле теории мотивов).

Как и в классическом случае, можно рассмотреть вариации иррегулярных структур Ходжа. Например, семейство экспоненциальных отображений $e^{z+\lambda/z}$, где λ рассматривается как «параметр Лежандра», даёт

$$H^1_{dR} = \left\{e^{z+\lambda/z}\mathbb{Q}\left[z, \frac{1}{z}\right]\frac{dz}{z}\right\} \Big/ d\left(\left\{e^{z+\lambda/z}\mathbb{Q}\left[z, \frac{1}{z}\right]\frac{dz}{z}\right\}\right) \simeq \mathbb{Q}(\lambda)\omega \oplus \mathbb{Q}(\lambda)\eta,$$

где $\omega = e^{z+\lambda/z}\frac{dz}{z}$, $\eta = e^{z+\lambda/z}\,dz$,

$$H_1^B = \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\gamma_2, \quad \gamma_1 = \{|z| = 1\},\ \gamma_2 = \mathbb{R}^- \ (\text{если } \lambda \in \mathbb{R}^+).$$

$\mathbb{Q}(\lambda)$-векторное пространство H^1_{dR} приводит к связности, дуальная к которой допускает γ_1 и γ_2 как горизонтальные векторы. Поэтому семейство периодов

$$\omega_1(\lambda) = \int_{\gamma_1} \omega = \int_{|z|=1} e^{z+\lambda/z}\frac{dz}{z}$$

является решением дифференциального уравнения второго порядка. Действительно,

$$\omega_1(\lambda) = 2i\pi \sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda^n}{(n!)^2} = 2i\pi J_0(\lambda)$$

есть кратное функции Бесселя, чья производная $J_1(\lambda)$, по существу, задаётся соотношением

$$\eta_1(\lambda) = \int_{\gamma_1} K\eta.$$

Второй период

$$\omega_2(\lambda) = \int_{\gamma_2} \omega = \int_{-\infty}^{0} e^{z+\lambda/z}\frac{dz}{z},$$

который, по существу, задаётся $Y_0(\lambda)$, имеет логарифмическую особенность в $\lambda = 0$.

Теперь теорема Зигеля об алгебраической независимости $J_0(\lambda)$ и $J_0'(\lambda)$ приводит к утверждению, что для любого $\lambda \in \bar{\mathbb{Q}}$, $\lambda \neq 0$, периоды $\omega_1(\lambda)$ и $\eta_1(\lambda)$ линейно независимы над $\bar{\mathbb{Q}}$. В частности, $\bar{\mathbb{Q}}$-рациональная дифференциальная форма, период которой вдоль γ_1 равен нулю, должна быть точной.

Полученные результаты естественно приводят к следующим вопросам.

1. Что можно сказать о периодах вдоль γ_2, содержащих E- и G-функции? Заметим, что имеется соотношение Лежандра, так как вронскиан уравнения Бесселя — рациональная функция.
2. Что является аналогом гипотезы Гротендика об алгебраической независимости периодов заданной иррегулярной структуры Ходжа над $\bar{\mathbb{Q}}$?

Теорема Шидловского применительно к конфлюентным гипергеометрическим уравнениям должна открыть путь к изучению многих иррегулярных периодов. В некотором смысле мы имеем здесь теорему, ожидающую свою гипотезу!

Литература

[1] Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б. О линейной независимости значений E-функций // Мат. сб. — 1996. — Т. 187, № 8. — С. 93—108.

[2] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1989.

[3] Amou M., Matala-aho T., Väänänen K. On Siegel–Shidlovskii's theory for q-difference equations // Acta Arith. — 2007. — Vol. 127, no. 4. — P. 309—335.

[4] Amou M., Väänänen K. An analogue of Shidlovskii's lemma for certain q-difference equations // Aequationes Math. — 2003. — Vol. 65. — P. 93—101.

[5] André Y. Séries Gevrey de type arithmétique. I, II // Ann. Math. — 2000. — Vol. 151. — P. 705—740; 741—756.

[6] Beukers F. A refined version of the Siegel–Shidlovskii theorem // Ann. Math. — 2006. — Vol. 163. — P. 369—379.

[7] Bertrand D. Le théorème de Siegel–Shidlovsky revisité // S. Lang volume. — Springer. — To appear.

[8] Bertrand D. Multiplicity estimates for values of q-difference equations // Diophantine Geometry: Proceedings (Publ. Scuola Normale Superiore/CRM Ser.) / U. Zannier, ed. — Pisa: Normale, 2007. — P. 65—71.

[9] Chudnovsky G. On applications of Diophantine approximations // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1984. — Vol. 81. — P. 7261—7265.

[10] Deligne P. Théorie de Hodge irrégulière. I (1984); II (2006) // Correspondance Deligne–Malgrange–Ramis. — Soc. Math. France, 2007.

[11] Di Vizio L. On the arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of the Grothendieck–Katz's conjecture on p-curvatures // Invent. Math. — 2002. — Vol. 150. — P. 517—578.

[12] Fischler S. Interpolation on algebraic groups // Compositio Math. — 2005. — Vol. 141. — P. 907—925.

[13] Sauloy J. Galois theory of Fuchsian q-difference equations // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 2003. — Vol. 36. — P. 925—968.

[14] Sert A. Une version effective du théorème de Lindemann–Weierstrass par les déterminants d'interpolation // J. Number Theory. — 1999. — Vol. 76. — P. 94—119.