Замечания о линейной независимости q-гармонических рядов

П. БУНДШУ
Кёльнский университет, Германия
e-mail: pb@math.uni-koeln.de

УДК 511.462

Ключевые слова: q-дзета-значения, мера линейной независимости, циклотомические полиномы.

Аннотация

При любом целом алгебраическом q, $|q| > 1$, доказывается линейная независимость над $\mathbb{Q}$ чисел 1, $\zeta_q(1)$, $\zeta_{-q}(1)$, где $\zeta_q(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n-1}$ — так называемый q-гармонический ряд, или q-дзета-значение в точке 1. Кроме того, устанавливается оценка меры линейной независимости этих чисел.

Abstract

P. Bundschuh, Remarks on linear independence of q-harmonic series, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 31—39.

For any rational integer q, $|q| > 1$, the linear independence over $\mathbb{Q}$ of the numbers 1, $\zeta_q(1)$, and $\zeta_{-q}(1)$ is proved; here $\zeta_q(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n-1}$ is so-called q-harmonic series or q-zeta-value at the point 1. Besides this, a measure of linear independence of these numbers is established.

Памяти А. О. Гельфонда посвящается

1. Введение

Для комплексных чисел q с условием $|q| > 1$ сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^k - 1}$$

называется *q-гармоническим рядом*, а также *q-дзета-значением* в точке 1 и обозначается через $\zeta_q(1)$. Используя представление $\sum\limits_{k\geqslant 1} \tau(k) q^{-k}$ ряда $\zeta_q(1)$, где τ считает количество делителей, П. Эрдёш [8] привёл первое неэффективное

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 31—39.

доказательство иррациональности значений $\zeta_q(1)$ для всех $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Первое эффективное доказательство, хотя и с весьма слабой оценкой сверху для показателя иррациональности $\mu\bigl(\zeta_q(1)\bigr)$, получено П. Б. Борвейном [1]; оценка была вскоре улучшена до

$$\mu\bigl(\zeta_q(1)\bigr) \leqslant \frac{2\pi^2}{\pi^2 - 2} = 2{,}508284\ldots$$

К. Ваананеном и автором настоящей статьи [4]. Наилучшая на сегодняшний день оценка

$$\mu\bigl(\zeta_q(1)\bigr) \leqslant 2{,}464978\ldots$$

принадлежит В. Зудилину [10].

На самом деле аналитические методы, используемые в работах [1, 4, 10], приводят к несколько более общим результатам. Определим поле K как $\mathbb{Q}$ или мнимое квадратичное поле, через O_K обозначим кольцо целых поля K и будем предполагать, что $q \in O_K$ удовлетворяет условию $|q| > 1$. Тогда можно доказать, что $\zeta_q(1) \notin K$, а показатель «иррациональности» этого числа можно определить и оценить сверху так же, как и в классическом случае $K = \mathbb{Q}$, обсуждавшемся выше.

В такой более общей постановке можно задаться и следующим более общим вопросом. Предположим, что целые $q_\sigma \in O_K$, удовлетворяющие условиям $|q_\sigma| > 1$, $\sigma = 1, \ldots, s$, различны. Верно ли, что числа $1, \zeta_{q_1}(1), \ldots, \zeta_{q_s}(1)$ линейно независимы над K? Частный случай $s = 2$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3$ этой задачи (до сих пор открытый вопрос) приводился ранее в [7]. Мы всё ещё не отваживаемся сформулировать сколь-нибудь общую гипотезу на этот счёт, но случай $s = 2$ и мультипликативно зависимых q_1, q_2 представляется самым простым. Первый результат в этом направлении содержится в [9, следствие 1], из него можно вывести линейную независимость чисел 1, $\zeta_q(1)$, $\zeta_{q^2}(1)$ над K при любом $q \in O_K$, удовлетворяющем $|q| > 1$. Отметим также, что количественная версия этого результата получена в [5, теорема 1].

Главная цель данной заметки — указать ещё один качественный результат для указанной выше задачи.

Теорема 1. *Пусть K и O_K определены так, как описано выше, и пусть $q \in O_K$ удовлетворяет условию $|q| > 1$. Тогда числа 1, $\zeta_q(1)$, $\zeta_{-q}(1)$ линейно независимы над K. Более того, существует такая постоянная $\gamma \in \mathbb{R}_+$, зависящая только от $|q|$, что для любого набора $\mathcal{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2) \in O_K^3$, где $|\mathcal{Q}| := \max(|Q_1|, |Q_2|)$ достаточно велико, справедливо неравенство*

$$|Q_0 + Q_1\zeta_q(1) + Q_2\zeta_{-q}(1)| \geqslant |\mathcal{Q}|^{-\eta-\gamma(\log\log|\mathcal{Q}|)^2/(\log|\mathcal{Q}|)^{1/2}} \qquad (1)$$

с показателем $\eta := (20\pi^2 + 72)/(9\pi^2 - 72) = 16{,}010047\ldots$.

Как несложно убедиться, указанные утверждения справедливы для трёх чисел 1, $\sum\limits_{k\geqslant 1} \tau(k)q^{-k}$, $\sum\limits_{k\geqslant 1} (-1)^k\tau(k)q^{-k}$. Для доказательства приведённой теоремы мы воспользуемся нашим обобщением [5, 6] аналитического метода П. Б. Борвейна [2].

2. Аналитическая часть доказательства

Пусть $q \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $|q| > 1$ и хотя бы одно из чисел $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}$ отлично от нуля. Определим мероморфную функцию

$$V(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Q_1}{q^k - z} + \frac{Q_2}{(-q)^k - z} \right),$$

являющуюся трансцендентной мероморфной функцией во всей z-плоскости. Для этой функции выполнено соотношение $V(1) = Q_1\zeta_q(1) + Q_2\zeta_{-q}(1)$ (выражение, фигурирующее в оценке (1)). Кроме того,

$$V(q^{-2n}) = q^{2n}\left(V(1) - \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{Q_1}{q^k - 1} + \frac{Q_2}{(-q)^k - 1} \right) \right) \tag{2}$$

для всех[1] $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$\frac{1}{j!} V^{(j)}(0) = \frac{Q_1}{q^{j+1} - 1} + \frac{Q_2}{(-q)^{j+1} - 1} \tag{3}$$

для всех $j \in \mathbb{N}_0$. Для достаточно большого *нечётного* параметра $N \in \mathbb{N}$, с выбором которого мы определимся в разделе 3, положим

$$L_1 := \begin{cases} N, & \text{если } |Q_1| \leqslant |Q_2|, \\ N-1, & \text{если } |Q_1| > |Q_2|, \end{cases} \qquad L_2 := \begin{cases} (N-1)/2, & \text{если } |Q_1| \leqslant |Q_2|, \\ (N+1)/2, & \text{если } |Q_1| > |Q_2| \end{cases} \tag{4}$$

(таким образом, в обоих случаях $L_1 + L_2 = (3N-1)/2$), и

$$J^*(N) := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{\prod\limits_{l=1}^{L_1} (q^l - z) \cdot \prod\limits_{l=1}^{L_2} (q^{2l-1} + z)}{z^{2N} \prod\limits_{n=1}^{N} (1 - q^{2n} z)} V(z)\, dz, \tag{5}$$

где путь интегрирования проходит в положительном направлении. Поскольку все полюсы функции $V(z)$ лежат в области $|z| > 1$, несложно убедиться, что 1) полюсы подынтегрального выражения в области $|z| < 1$ — это 0 и точки q^{-2n}, $n \in \mathbb{N}$; 2) полюсы в области $|z| > 1$ — это точки q^k, где $k > L_1$, и точки $-q^{2k-1}$, где $k > L_2$ (при условии, что $Q_1 Q_2 \neq 0$). Применяя интегральную теорему о вычетах и формулы (2) и (3), получаем, что интеграл (5) имеет вид

$$J^*(N) = Q^*(N)V(1) - P^*(N). \tag{6}$$

Здесь

$$Q^*(N) := \sum_{n=1}^{N} S_n \tag{7}$$

[1]Как обычно, пустые суммы и произведения интерпретируются соответственно как 0 и 1.

с ненулевыми

$$S_n := (-1)^{N-n+1}\begin{bmatrix}N-1\\ n-1\end{bmatrix}_{q^2} q^{(N+n)n}\frac{\prod\limits_{l=1+2n}^{L_1+2n}(q^l-1)\cdot\prod\limits_{l=1+n}^{L_2+n}(q^{2l-1}+1)}{\prod\limits_{\nu=1}^{N-1}(q^{2\nu}-1)} \tag{8}$$

при $n=1,\dots,N$ и, в более компактном виде,

$$P^*(N) := \left\{\sum_{n=1}^{N} S_n\sum_{k=1}^{2n}+\sum_{k=1}^{2N}P_k(q)\cdot\right\}\left(\frac{Q_1}{q^k-1}+\frac{Q_2}{(-q)^k-1}\right). \tag{9}$$

Через $\begin{bmatrix}k\\ \kappa\end{bmatrix}_q$, как обычно, обозначен q-биномиальный коэффициент $[k]_q!/([\kappa]_q!\times\times[k-\kappa]_q!)$ при $k\in\mathbb{N}_0$ и $\kappa\in\{0,\dots,k\}$, где $[j]_q!$ есть q-факториал $\prod\limits_{i=1}^{j}(q^i-1)$ при $j\in\mathbb{N}_0$. Хорошо известно, что $\begin{bmatrix}k\\ \kappa\end{bmatrix}_q\in\mathbb{Z}[q]$ для всех $k,\kappa\in\mathbb{N}_0$, $\kappa\leqslant k$. Отметим, что все многочлены $P_k(q)$, $k=1,\dots,2N$, лежат в $\mathbb{Z}[q]$, но их явная форма нам не понадобится. Включения $P_k(q)\in\mathbb{Z}[q]$ на самом деле вытекают из очевидного наблюдения

$$\frac{1}{h!}\left(\frac{d}{dz}\right)^h\left\{\prod_{l=1}^{L_1}(q^l-z)\cdot\prod_{l=1}^{L_2}(q^{2l-1}+z)\right\}\Bigg|_{z=0},\quad \frac{1}{i!}\left(\frac{d}{dz}\right)^i\prod_{n=1}^{N}(1-q^{2n}z)^{-1}\Bigg|_{z=0}\in\mathbb{Z}[q]$$

для всех $h,i\in\mathbb{N}_0$.

Перейдём к выводу асимптотики величины $Q^*(N)$. Из формулы (8) получаем, что

$$|S_n| = |q|^{(1/2)L_1(L_1+1)+L_2^2+(2L_1+2L_2+3N+2)n-N(N+1)-n^2+\mathrm{O}(1)}\quad (n=1,\dots,N),$$

где константа зависит только от $|q|$, но не от N и n. Тогда

$$|S_N| = |q|^{(1/2)L_1(L_1+1)+L_2^2+4N^2+\mathrm{O}(1)}.$$

Кроме того, при $n=2,\dots,N$

$$\left|\frac{S_{n-1}}{S_n}\right| = |q|^{-(2L_1+2L_2+3N-2n)+\mathrm{O}(1)}.$$

Два последних соотношения с учётом (7) и определений L_1 и L_2 в (4) показывают справедливость следующего результата.

Лемма 1. *Для величины $Q^*(N)$ справедлива асимптотическая формула*

$$|Q^*(N)| = |q|^{(19/4)N^2+\mathrm{O}(1)},$$

где постоянная зависит только от $|q|$, но не от N.

На втором шаге аналитической части мы находим представление интеграла в (5) в виде ряда, показывающего, что абсолютная величина $J^*(N)$ ненулевая, но «очень малая». Для $R \in \mathbb{N}$, $R > N$, рассмотрим разность

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=|q|^{R+1/2}} \ldots - J^*(N), \tag{10}$$

где подынтегральное выражение … совпадает с приводимым в (5). Ввиду оценки $|V(z)| \leqslant \gamma_1(|Q_1| + |Q_2|)$ на контуре $|z| = |q|^{R+1/2}$ для любого $R \in \mathbb{N}$, где γ_1 — положительная постоянная[1], зависящая только от $|q|$, имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=|q|^{R+1/2}} \ldots \right| \leqslant \gamma_2(|Q_1| + |Q_2|)|q|^{-(5/2)N^2}$$

для $R \in \mathbb{N}$, $R > N$. Следовательно, интеграл в (10) стремится к нулю при $R \to \infty$, $R \in \mathbb{N}$. Таким образом, мы заключаем из (10), что $-J^*(N)$ является суммой всех вычетов в полюсах подынтегрального выражения, лежащих в области $|z| > 1$. В итоге мы получаем представление

$$J^*(N) = Q_1 J_1(N) + Q_2 J_2(N), \tag{11}$$

где

$$J_1(N) := \sum_{k > L_1} T_k, \quad T_k := \frac{\prod\limits_{l=1}^{L_1}(q^l - q^k) \cdot \prod\limits_{l=1}^{L_2}(q^{2l-1} + q^k)}{q^{2Nk} \prod\limits_{n=1}^{N}(1 - q^{2n+k})}, \tag{12}$$

и

$$J_2(N) := \sum_{\substack{k > L_1 \\ k \text{ чётно}}} T_k + \sum_{\substack{k > 2L_2 \\ k \text{ нечётно}}} \frac{\prod\limits_{l=1}^{L_1}(q^l + q^k) \cdot \prod\limits_{l=1}^{L_2}(q^{2l-1} - q^k)}{q^{2Nk} \prod\limits_{n=1}^{N}(1 + q^{2n+k})}. \tag{13}$$

Во всех трёх возникающих суммах модуль k-го слагаемого асимптотически равен

$$|q|^{-k(3N - L_1 - L_2) - N(N+1) + \mathrm{O}(1)},$$

где $\mathrm{O}(1)$ можно ограничить сверху и снизу независимо от N и k. Поэтому для суммы в (12) выполнено

$$|J_1(N)| = |q|^{-(1/2)(L_1+1)(3N+1) - N(N+1) + \mathrm{O}(1)} \tag{14}$$

и аналогично для второй суммы в (13) выполнено

$$\left| \sum_{\substack{k > 2L_2 \\ k \text{ нечётно}}} \ldots \right| = |q|^{-(1/2)(2L_2+1)(3N+1) - N(N+1) + \mathrm{O}(1)}. \tag{15}$$

[1]В дальнейшем все подобные постоянные мы будем обозначать через $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$.

Для первой суммы в (13) получаем

$$\Bigg|\sum_{\substack{k>L_1\\ k\ \text{чётно}}}\cdots\Bigg| = |q|^{-(1/2)(L_1+\delta)(3N+1)-N(N+1)+\mathrm{O}(1)}, \tag{16}$$

где $\delta = 1$ или $\delta = 2$ в зависимости от того, является L_1 нечётным или чётным.

Рассмотрим сначала случай $|Q_1| \leqslant |Q_2|$ (следовательно, $Q_2 \neq 0$). Тогда $L_1 = N$ нечётно, $2L_2 + 1 = N$ и в соответствии с (13), (15) и (16)

$$|J_2(N)| = |q|^{-(1/2)N(3N+1)-N(N+1)+\mathrm{O}(1)}.$$

Применяя (11) и (14), получаем

$$\left|\frac{J^*(N)}{Q_2 J_2(N)} - 1\right| = \left|\frac{Q_1}{Q_2}\right| \left|\frac{J_1(N)}{J_2(N)}\right| \leqslant |q|^{-(3/2)N+\mathrm{O}(1)},$$

откуда следует, что $|J^*(N)| = |Q_2|\,|J_2(N)|\big(1+\mathrm{o}(1)\big)$, при достаточно больших N.

В случае $|Q_1| > |Q_2|$ (следовательно, $Q_1 \neq 0$) имеем чётное $L_1 = N - 1$ и $2L_2 + 1 = N + 2$. Формулы (13), (15) и (16) дают

$$|J_2(N)| = |q|^{-(1/2)(N+1)(3N+1)-N(N+1)+\mathrm{O}(1)}.$$

Эта асимптотика, формулы (11) и (14) приводят к соотношению

$$\left|\frac{J^*(N)}{Q_1 J_1(N)} - 1\right| = \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right| \left|\frac{J_2(N)}{J_1(N)}\right| \leqslant |q|^{-(3/2)N+\mathrm{O}(1)},$$

откуда следует, что $|J^*(N)| = |Q_1|\,|J_1(N)|\big(1+\mathrm{o}(1)\big)$.

Поскольку в нашей теореме $|\mathcal{Q}| := \max(|Q_1|, |Q_2|)$, мы показали следующее.

Лемма 2. *Если нечётное N достаточно велико, имеет место асимптотическое равенство*

$$|J^*(N)| = |\mathcal{Q}|\,|q|^{-(5/2)N^2-(3/2)N+\mathrm{O}(1)}.$$

Здесь выражение $\mathrm{O}(1)$ ограничено сверху и снизу независимо от N, Q_1, Q_2.

3. Арифметическая часть доказательства

Теперь нам понадобятся арифметические условия на $q, Q_1, Q_2 \in O_K$ из нашей теоремы. Мы также сохраняем условия $|q| > 1$, $(Q_1, Q_2) \neq (0, 0)$ из раздела 2. Согласно формулам (6)—(9) и леммам 1, 2 интеграл $J^*(N)$ — «достаточно малая» линейная форма от $V(1)$ и 1 с «небольшими» коэффициентами $Q^*(N)$, $P^*(N)$ из поля K. Для того чтобы преобразовать эту форму в линейную форму с коэффициентами из O_K, необходимо определить «подходящий» общий знаменатель $D(N) \in O_K \setminus \{0\}$ коэффициентов $Q^*(N)$, $P^*(N)$.

С этой целью рассмотрим сначала отношение, возникающее в правой части (8). Согласно [3, лемма 3, (i) и (iv)] его числитель раскладывается в произведение многочленов деления круга, вычисляемых в точке q, следующим образом:

$$\prod_{d\in\mathbb{N}} \Phi_d(q)^{[(L_1+2n)/d]-[2n/d]} \cdot {\prod_{d\in\mathbb{N}}}' \Phi_{2d}(q)^{[(L_2+n)/d+1/2]-[n/d+1/2]}.$$

Здесь $[\,\cdot\,]$ обозначает целую часть числа, а $\prod'$ показывает, что произведение берётся только по нечётным положительным целым d. Согласно [3, лемма 3 (ii)] знаменатель отношения в (8) аналогичным образом представляется в виде

$${\prod}' \Phi_d(q)^{[(N-1)/d]} \cdot {\prod}' \Phi_{2d}(q)^{[(N-1)/d]} \cdot \prod \Phi_{4d}(q)^{[(N-1)/2d]}.$$

Учитывая неравенство $[x]-[y] \geqslant [x-y]$ для всех вещественных x и y, а также оценку $L_1 \geqslant N-1$ из (4), мы видим, что все множители $\Phi_d(q)$ с нечётными d сокращаются в знаменателе в (8). Аналогично находим, что все множители $\Phi_{2d}(q)$ с нечётным d также пропадают из знаменателя в (8), так как

$$\begin{aligned}\left[\frac{L_1+2n}{2d}\right] - \left[\frac{n}{d}\right] + \left[\frac{L_2+n}{d}+\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{n}{d}+\frac{1}{2}\right] &= \\ = \left[\frac{L_1/2+n}{d}\right] + \left[\frac{L_2+n}{d}+\frac{1}{2}\right] - \left[\frac{2n}{d}\right]&, \qquad (17)\end{aligned}$$

поскольку $[x+1/2]+[x]=[2x]$ для всех x. В свою очередь, это соотношение и оценки $L_1/2, L_2 \geqslant (N-1)/2$ показывают, что (17) не превосходит $[(N-1+2n)/d]-[2n/d] \geqslant [(N-1)/d]$. Таким образом,

$$\prod \Phi_{4d}(q)^{[(N-1)/2d]-[(N-1)/4d]} \qquad (18)$$

является общим знаменателем для всех слагаемых $S_1,\dots,S_N$, а значит, и для $Q^*(N)$. Чтобы найти знаменатель для $P^*(N)$, заметим, что в соответствии с (9) мы должны дополнить произведение (18) общим множителем многочленов q^k-1 ($k=1,\dots,2N$) и многочленов $q^{2l-1}+1$ ($l=1,\dots,N$). Согласно [3, лемма 4, (i) и (vi)] достаточно взять общий множитель произведений $\prod\limits_{d\leqslant 2N}\Phi_d(q)$ и $\prod\limits_{d<2N,\,d\text{ нечётно}}\Phi_{2d}(q)$, например

$${\prod_{d\leqslant 2N}}' \Phi_d(q) \cdot {\prod_{d<2N}}' \Phi_{2d}(q) \cdot \prod_{d\leqslant N/2} \Phi_{4d}(q). \qquad (19)$$

Приведённый анализ показывает следующее. Если $D(N)$ определено как произведение (18) и (19), выражения $Q(N) := D(N)Q^*(N)$ и $P(N) := D(N)P^*(N)$ лежат в O_K и согласно (6) удовлетворяют соотношению

$$J(N) := D(N)J^*(N) = Q(N)V(1) - P(N). \qquad (20)$$

Отметим, что леммы 5 и 6 из [3] дают

$$|D(N)| = |q|^{(1/4+18/\pi^2)N^2+\mathrm{O}(N\log^2 N)}$$

с постоянной в $\mathrm{O}(N\log^2 N)$, зависящей только от $|q|$. Таким образом, из лемм 1 и 2 соответственно имеем

$$|Q(N)| \leqslant |q|^{(5+18/\pi^2)N^2+\gamma_3 N\log^2 N} \tag{21}$$

и

$$|\mathcal{Q}||q|^{-(9/4-18/\pi^2)N^2-\gamma_4 N\log^2 N} \leqslant |J(N)| \leqslant |\mathcal{Q}|\,|q|^{-(9/4-18/\pi^2)N^2+\gamma_4 N\log^2 N}. \tag{22}$$

Обозначая через $\mathcal{L} := Q_0 + Q_1\zeta_q(1) + Q_2\zeta_{-q}(1)$ $(= Q_0 + V(1)$ в соответствии с определением $V(z))$ линейную форму, которую мы должны оценить снизу в (1), из (20) находим

$$Q(N)\mathcal{L} = Q(N)Q_0 + P(N) + J(N). \tag{23}$$

Определим теперь N через $|\mathcal{Q}|$ как единственное положительное нечётное целое, удовлетворяющее соотношениям

$$|q|^{(9/4-18/\pi^2)(N-2)^2-\gamma_4(N-2)\log^2(N-2)} < 2|\mathcal{Q}| \leqslant |q|^{(9/4-18/\pi^2)N^2-\gamma_4 N\log^2 N}. \tag{24}$$

Очевидно, N велико, если $|\mathcal{Q}|$ велико. Из неравенств (22) и (24) следует, что

$$|q|^{-\gamma_5 N\log^2 N} \leqslant |J(N)| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{25}$$

а левое неравенство в (24) приводит к соотношению

$$\left(\frac{9}{4} - \frac{18}{\pi^2}\right) N^2 \log|q| \leqslant \log|\mathcal{Q}| + \gamma_6 N\log^2 N. \tag{26}$$

После этой подготовительной работы мы немедленно получаем утверждение теоремы следующим образом. Если $Q(N)Q_0 + P(N) \neq 0$, то представление (23) и правое неравенство в (25) дают $|Q(N)\mathcal{L}| \geqslant 1/2$. Если же $Q(N)Q_0 + P(N) = 0$, то равенство в (23) и левое неравенство в (25) приводят к оценке $|Q(N)\mathcal{L}| \geqslant \exp(-\gamma_7 N\log^2 N)$. Используя (21) и (26), в любой из указанных ситуаций мы получаем оценку

$$|\mathcal{L}| \geqslant |q|^{-(5+18/\pi^2)N^2-\gamma_8 N\log^2 N} \geqslant \exp(-\eta\log|\mathcal{Q}| - \gamma_9 N\log^2 N) \tag{27}$$

с показателем $\eta = (20\pi^2 + 72)/(9\pi^2 - 72)$, определённым в нашей теореме. Ввиду неравенства $N^2 \leqslant \gamma_{10}\log|\mathcal{Q}|$ и оценки (26), влекущей $\log N \leqslant \log\log|\mathcal{Q}|$, требуемая оценка (1) тут же следует из (27).

Литература

[1] Borwein P. B. On the irrationality of $\sum\bigl(1/(q^n + r)\bigr)$ // J. Number Theory. — 1991. — Vol. 37. — P. 253—259.

[2] Borwein P. B. On the irrationality of certain series // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1992. — Vol. 112. — P. 141—146.

[3] Bundschuh P. Linear independence of values of a certain Lambert series // Results Math. — 2007. — Vol. 51, no. 1-2. — P. 29—42.

[4] Bundschuh P., Väänänen K. Arithmetical investigations of a certain infinite product // Compositio Math. — 1994. — Vol. 91. — P. 175—199.

[5] Bundschuh P., Väänänen K. Linear independence of q-analogues of certain classical constants // Results Math. — 2005. — Vol. 47. — P. 33—44.

[6] Bundschuh P., Väänänen K. Linear independence of certain Lambert and allied series // Acta Arith. — 2005. — Vol. 120. — P. 197—209.

[7] Bundschuh P., Zudilin W. Irrationality measures for certain q-mathematical constants // Math. Scand. — 2007. — Vol. 101. — P. 104—122.

[8] Erdős P. On arithmetical properties of Lambert series // J. Indian Math. Soc. — 1948. — Vol. 12. — P. 63—66.

[9] Tachiya Y. Irrationality of certain Lambert series // Tokyo J. Math. — 2004. — Vol. 27. — P. 75—85.

[10] Zudilin W. Heine's basic transform and a permutation group for q-harmonic series // Acta Arith. — 2004. — Vol. 111. — P. 153—164.