Замечания о линейной независимости некоторых q-рядов

К. ВААНАНЕН
Оулуский университет, Финляндия
e-mail: keijo.vaananen@oulu.fi

УДК 511.4

Ключевые слова: q-ряды, линейная независимость значений.

Аннотация

Получены оценки снизу для целочисленных линейных форм от значений некоторых q-рядов.

Abstract

K. Väänänen, Remarks on linear independence of certain q-series, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 41—47.

We obtain lower bounds for linear forms in values of certain q-series with integer coefficients.

Памяти А. О. Гельфонда, к 100-летию со дня рождения

1. Введение

В серии работ [4, 5, 10] был развит метод доказательства линейной независимости значений компонентов аналитического решения системы

$$z^s \bar{y}(z) = a(z) C \bar{y}(qz) + \bar{b}(z), \tag{1}$$

где $s \in \mathbb{Z}_+$, C — невырожденная постоянная матрица с алгебраическими элементами, $a(z)$ и компоненты $\bar{b}(z)$ — многочлены с алгебраическими коэффициентами степеней не выше s с условием $a(0) \neq 0$, q, $|q| > 1$, — алгебраическое число, удовлетворяющее ряду дополнительных условий. Цель настоящей заметки — применение этих результатов к специальному случаю недавней работы П. Бундшу [7], в которой изучается линейная независимость значений функции

$$f(z, x) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{mj} \prod_{i=0}^{j-1} P(xq^{-im}),$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 41—47.

где $m \in \mathbb{Z}_+$, P — многочлен степени $l \geqslant 1$ с рациональными коэффициентами, удовлетворяющий условию $P(0) = 1$, и $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. Положим

$$f_h(x) = f(q^{-h}, x), \quad h \in \mathbb{Z}_+.$$

Основная теорема работы [7] даёт нижнюю границу для размерности векторного пространства (над $\mathbb{Q}$), порождённого числами

$$1,\ f_h(1),\ f_h(q^{-1}), \ldots,\ f_h\bigl(q^{-(m-1)}\bigr). \tag{2}$$

В специальном случае $l = 1$ теорема утверждает, что по крайней мере m из этих $m + 1$ чисел линейно независимы. В своём доказательстве П. Бундшу строит линейные формы от чисел (2), искусно используя комплексное интегрирование, и затем применяет критерий линейной независимости Ю. В. Нестеренко [3]. В настоящей работе мы доказываем, что из результатов работ [5, 10] можно получить утверждения о линейной независимости q-рядов, откуда в свою очередь следует линейная независимость всех чисел набора (2) в случае $l = 1$. По-видимому, наш подход неприменим при $l \geqslant 2$, по крайней мере в такой форме. В этом случае мы отсылаем читателя к работе [7], где можно найти другие результаты об оценках размерности.

Также отметим, что предмет нашей статьи связан с двумя работами А. О. Гельфонда [1, 2], в которых рассматриваются целые функции, принимающие целые значения в точках геометрической прогрессии. Точнее, А. О. Гельфонд доказывает, что если $q > 1$ — целое число и $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условиям $f(q^n) \in \mathbb{Z}$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$\log \max_{|z|=r} |f(z)| < \frac{1}{4 \log q} \log^2 r - \frac{1}{2} \log r - \omega(r),$$

где $\lim\limits_{r\to\infty} \omega(r) = \infty$, то $f(z)$ — многочлен.

2. Результаты

Пусть $a_1, \ldots, a_t$ — рациональные числа, удовлетворяющие условиям

$$a_\nu \neq 0, -q^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_\nu \neq a_\mu q^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

при всех ν и $\mu \neq \nu$. Тогда функции

$$g_{\mu\nu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{mj} \prod_{i=0}^{j-1} \left(1 + \frac{a_\nu}{q^{\mu+mi}}\right), \quad \mu = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \nu = 1, \ldots, t, \tag{4}$$

определены при $|z| < 1$. Отметим, что $f_h(q^{-\mu}) = g_{\mu 1}(q^{-h})$ для $P(x) = 1 + a_1 x$, и следовательно, линейная независимость чисел (2) для этого $P(x)$ вытекает из следующего результата.

Теорема. *Пусть $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$, $a_1, \ldots, a_t$ — рациональные числа, удовлетворяющие* (3), *$\beta \neq 0$ — рациональное число, $|\beta| < 1$. Тогда числа*

$$1,\, g_{\mu\nu}(\beta), \quad \mu = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \nu = 1, \ldots, t, \tag{5}$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Более того, существуют положительные постоянные C, D, H_0, зависящие от функций (4) *и β, такие что для произвольного ненулевого набора чисел h_0, $h_{\mu\nu} \in \mathbb{Z}$ выполнено*

$$\left| h_0 + \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{t} h_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(\beta) \right| > C H^{-\Gamma - D/\sqrt{\log H}},$$

где $H = \max\{|h_0|, |h_{\mu\nu}|, H_0\}$ и

$$\Gamma = \frac{8mt}{8mt-1}\left(8m^3t^2 + (m+4)mt + \frac{m}{3} + 2\right).$$

Результаты об иррациональности чисел из (5) можно найти в [6, 8].

При доказательстве теоремы мы пользуемся специальным случаем теоремы 5.1 из [5]. Для того чтобы сформулировать этот результат, отметим, что система (1) имеет единственное решение $\bar{f}(z)$ с компонентами $f_i(z)$, аналитическими в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{C}$ (см. [5]). Используя (1), мы можем доопределить $f_i(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $a(q^{-k}z) \neq 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Тогда теорема 5.1 работы [5] влечёт следующий результат о линейной независимости значений $f_i(z)$.

Теорема AMB. *Допустим, что в* (1) *элементы матрицы C и коэффициенты многочлена $a(z)$ и полиномиальных компонентов $\bar{b}(z)$ рациональны, $q \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет условию $|q| > 1$. Пусть $\bar{f}(z) = \bigl(f_1(z), \ldots, f_M(z)\bigr)^{\mathrm{T}}$ — решение* (1). *Предположим, что функции $1, f_1(z), \ldots, f_M(z)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}(z)$. Если $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ удовлетворяет условиям $a(\alpha q^{-k}) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то числа $1, f_1(\alpha), \ldots, f_M(\alpha)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Более того, существуют положительные постоянные C_1, D_1, H_1, зависящие от системы* (1) *и α, такие что для произвольного ненулевого набора чисел $h_0, h_1, \ldots, h_M \in \mathbb{Z}$ мы имеем*

$$\left| h_0 + \sum_{\mu=1}^{M} h_\mu f_\mu(\alpha) \right| > C_1 H^{-\Gamma - D_1/\sqrt{\log H}},$$

где $H = \max\{|h_\mu|, H_1\}$ и

$$\Gamma = \frac{8M}{8M-1}\left(8sM^2 + (s+4)M + \frac{s}{3} + 2\right).$$

Замечание. Теорема AMB в [5] сформулирована для произвольного поля алгебраических чисел K, а также в неархимедовом случае, однако для простоты мы приводим только нужный нам частный случай. Метод работ [5,10] использует приближения типа Паде второго рода для компонентов решения системы (1), а также идеи теории Зигеля—Шидловского.

3. Доказательство

Сначала приведём некоторые свойства решений функционального уравнения

$$az^s g(z) = p(z)g(qz) - r(z), \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad p, r \in \mathbb{Q}[z], \quad p(0) \neq 0, \tag{6}$$

которое изучалось в [4, 5, 10]. Из [4, с. 393] следует, что если $a \neq 0$ рационально и $g(z)$ — решение, являющееся рациональной функцией, то $g(z)$ — многочлен. Далее, если $\deg p(z) = s$ и степень $r(z) \not\equiv 0$ меньше s, то полиномиальных решений не существует при условии, что $a \neq p_s q^n$, $n \in \mathbb{N}$, где p_s — старший коэффициент $p(z)$. Следовательно, в этом случае уравнение (6) не имеет рациональных решений.

Теперь рассмотрим систему функциональных уравнений

$$a_\nu z^m G_{\mu\nu}(z) = (1 - z^m)G_{\mu\nu}(qz) - (qz)^\mu, \quad \mu = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \nu = 1, \ldots, t. \tag{7}$$

Отметим, что это частный случай (1). Если

$$G_{\mu\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{\mu\nu n} z^n$$

удовлетворяет (7), то

$$q^n g_{\mu\nu n} = (a_\nu + q^{n-m}) g_{\mu\nu, n-m} + \delta_{n\mu} q^\mu, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $\delta_{n\mu}$ — символ Кронекера и $g_{\mu\nu n} = 0$ при $n < 0$. Значит, $g_{\mu\nu n} = 0$ при $n \neq \mu + jm$ и

$$g_{\mu\nu, \mu+jm} = q^{-jm} \prod_{i=0}^{j-1} \left(1 + \frac{a_\nu}{q^{\mu+im}}\right), \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Следовательно, функции

$$G_{\mu\nu}(z) = z^\mu \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{q}\right)^{jm} \prod_{i=0}^{j-1} \left(1 + \frac{a_\nu}{q^{\mu+im}}\right) = z^\mu g_{\mu\nu}\left(\frac{z}{q}\right),$$
$$\mu = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \nu = 1, \ldots, t, \tag{8}$$

согласно (4) дают единственное решение системы (7), аналитическое при $|z| < |q|$. Из сказанного выше и (3) следует, что ни одна из этих функций не является рациональной.

Результат работы [10] можно непосредственно применить к системе (7) только при $m = 1$, поскольку доказательство необнуления из леммы 3 работы [10] не работает в случае $m > 1$. Тем не менее можно применить теорему AMB, если все функции 1, $G_{\mu\nu}(z)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}(z)$. Таким образом, справедливость основной теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Если числа a_ν и q удовлетворяют условиям теоремы, то функции*

$$1,\ G_{\mu\nu}(z), \quad \mu = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \nu = 1, \ldots, t, \tag{9}$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}(z)$.

Доказательство. Из (3) и рассуждений в начале этого раздела мы знаем, что ни одна из функций $G_{\mu\nu}(z)$ не является рациональной, в частности, 1 и $G_{01}(z)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}(z)$.

Допустим, что функции

$$1, G_{01}(z), \ldots, G_{k-1,1}(z) \quad (k < m) \tag{10}$$

линейно независимы, однако при добавлении к ним $G_{k,1}(z)$ эти функции становятся линейно зависимыми над $\mathbb{Q}(z)$. Тогда

$$P_{-1}(z) + \sum_{\mu=0}^{k} P_\mu(z) G_{\mu 1}(z) = 0 \tag{11}$$

тождественно по z, где $P_\mu(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $\mu = -1, 0, \ldots, k$, $P_k(z) \not\equiv 0$. Из (7) и (11) следует

$$(1 - z^m) P_{-1}(qz) + \sum_{\mu=0}^{k} P_\mu(qz)(a_1 z^m G_{\mu 1}(z) + (qz)^\mu) = 0.$$

Исключая $G_{k1}(z)$ из этого уравнения и (11), получаем

$$(1 - z^m) P_k(z) P_{-1}(qz) - a_1 z^m P_k(qz) P_{-1}(z) + \sum_{\mu=0}^{k} P_k(z) P_\mu(qz)(qz)^\mu + \\ + \sum_{\mu=0}^{k-1} a_1 z^m \big(P_k(z) P_\mu(qz) - P_k(qz) P_\mu(z)\big) G_{\mu 1}(z) = 0.$$

Из предположения о линейной независимости функций (10) вытекают соотношения

$$P_k(z) P_\mu(qz) - P_k(qz) P_\mu(z) = 0, \quad \mu = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Если $P_\mu(z) \not\equiv 0$, то

$$\frac{P_\mu(z)}{P_k(z)} = \sum_{n=M}^{\infty} d_n z^n = \frac{P_\mu(qz)}{P_k(qz)}, \quad d_M \neq 0.$$

Следовательно, $M = 0$ для всех μ и $P_\mu(z) = c_\mu P_k(z)$ при $\mu = 0, 1, \ldots, k-1$, где $c_\mu \in \mathbb{Q}$. Подставляя эти равенства в (11), получаем

$$P_{-1}(z) + P_k(z) \sum_{\mu=0}^{k} c_\mu G_{\mu 1}(z) = 0, \quad c_k = 1.$$

Это означает, что функция

$$G(z) = \sum_{\mu=0}^{k} c_\mu G_{\mu 1}(z)$$

является рациональной. С другой стороны, согласно (7)

$$a_1 z^m G(z) = (1 - z^m)G(qz) - \sum_{\mu=0}^{k} c_\mu (qz)^\mu,$$

а из (3) и рассуждений в начале этого раздела следует, что последнее функциональное уравнение не имеет рациональных решений. Полученное противоречие доказывает, по индукции, что функции $1, G_{01}(z), \ldots, G_{m-1,1}(z)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}(z)$.

Теперь для завершения доказательства леммы допустим, что функции 1, $G_{\mu\nu}(z)$, $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, $\nu = 1, \ldots, s-1$ $(2 \leqslant s < t)$, линейно зависимы над $\mathbb{Q}(z)$, и покажем, что отсюда следует их линейная независимость с $G_{\mu s}$, $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$. Допустим, что, напротив, функции

$$1, G_{\mu\nu}(z), G_{0,s}(z), \ldots, G_{k-1,s}(z), \quad \mu = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1, \tag{12}$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}(z)$, однако линейно зависимы с $G_{ks}(z)$. Тогда имеем

$$P_{00}(z) + \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{s-1} P_{\mu\nu}(z) G_{\mu\nu}(z) + \sum_{\mu=0}^{k} P_{\mu s}(z) G_{\mu s}(z) = 0 \tag{13}$$

для некоторых многочленов $P_{\mu\nu} \in \mathbb{Q}[z]$, $P_{ks}(z) \not\equiv 0$. Согласно (7) и (13)

$$(1 - z^m)P_{00}(qz) + \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{s-1} P_{\mu\nu}(qz)(a_\nu z^m G_{\mu\nu}(z) + (qz)^\mu) + \\ + \sum_{\mu=0}^{k} P_{\mu s}(qz)(a_s z^m G_{\mu s}(z) + (qz)^\mu) = 0.$$

Исключая $G_{ks}(z)$ из этого уравнения и (13) и используя наше предположение о линейной независимости функций (12), получаем

$$a_\nu P_{ks}(z) P_{\mu\nu}(qz) - a_s P_{ks}(qz) P_{\mu\nu}(z) = 0, \tag{14}$$

$$\mu = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1,$$

$$P_{ks}(z) P_{\mu s}(qz) - P_{ks}(qz) P_{\mu s}(z) = 0, \quad \mu = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{15}$$

Если $P_{\mu\nu}(z) \not\equiv 0$ в (14), то

$$\frac{P_{\mu\nu}(z)}{P_{ks}(z)} = \sum_{n=M}^{\infty} d_n z^n = \frac{a_\nu}{a_s} \frac{P_{\mu\nu}(qz)}{P_{ks}(qz)}, \quad d_M \neq 0,$$

и следовательно,

$$d_M = \frac{a_\nu}{a_s} q^M d_M,$$

или $a_s = a_\nu q^M$ при некотором $\nu < s$. Согласно (3) это невозможно, поэтому $P_{\mu\nu}(z) \equiv 0$ при всех μ, ν в (14).

Отсюда получаем, что (13) имеет тот же вид, что и (11), и мы снова приходим к противоречию с использованием (15), как и в случае уравнения (11) (просто заменяем a_1 на a_s). Таким образом, лемма доказана. □

Замечание. В случае $m = 1$ функциональные уравнения (7) имеют вид (обозначим $G_{0\nu}(z) = G_\nu(z)$)

$$a_\nu z G_\nu(z) = (1 - z)G_\nu(qz) - 1, \quad \nu = 1, \ldots, t. \tag{16}$$

Как было отмечено в [4], решение (16) связано с q-экспоненциальной функцией

$$E_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q-1)\cdots(q^n-1)}.$$

А именно, используя (16), получаем

$$a_\nu G_\nu(1) + 1 = E_q(a_\nu q), \quad \nu = 1, \ldots, t,$$

и следовательно, согласно (8)

$$E_q(aq) = 1 + a\sum_{j=0}^{\infty} q^{-j} \prod_{i=0}^{j-1}\left(1 + \frac{a}{q^i}\right).$$

Недавно эта связь была использована в [9] для получения точных оценок мер линейной независимости значений $E_q(z)$.

Литература

[1] Гельфонд А. О. О функциях, целочисленных в точках геометрической прогрессии // Мат. сб. — 1933. — Т. 40, № 1. — С. 42—47.

[2] Гельфонд А. О. О функциях, принимающих целые значения // Мат. заметки. — 1967. — Т. 1, № 5. — С. 509—513.

[3] Нестеренко Ю. В. О мере линейной независимости чисел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1985. — № 1. — С. 46—49.

[4] Amou M., Katsurada M., Väänänen K. Arithmetical properties of the values of functions satisfying certain functional equations of Poincaré // Acta Arith. — 2001. — Vol. 49, no. 4. — P. 389—407.

[5] Amou M., Matala-aho T., Väänänen K. On Siegel–Shidlovskii's theory for q-difference equations // Acta Arith. — 2007. — Vol. 127, no. 4. — P. 309—335.

[6] Bundschuh P. Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationalitätsaussagen // Invent. Math. — 1970. — Vol. 9. — P. 175—184.

[7] Bundschuh P. Arithmetical results on certain q-series. I // Int. J. Number Theory. — 2008. — Vol. 4, no. 1. — P. 25—43.

[8] Matala-aho T. Remarks on the arithmetic properties of certain hypergeometric series of Gauss and Heine // Acta Univ. Oulu. Ser. A. Sci. Rerum Natur. — 1991. — Vol. 219. — P. 1—112.

[9] Matala-aho T. On q-analogues of divergent and exponential series // J. Math. Soc. Japan. — 2009. — Vol. 61, no. 1. — P. 291—313.

[10] Väänänen K. On linear independence of the values of generalized Heine series // Math. Ann. — 2003. — Vol. 325. — P. 123—136.