Об эквивалентности бёкерсовских и сорокинских кратных интегралов

К. ВИОЛА
Пизанский университет, Италия
e-mail: viola@dm.unipi.it

УДК 511.4

Ключевые слова: иррациональность значений дзета-функции, кратные интегралы, бирациональные преобразования.

Аннотация

Хорошо известно, что тройные интегралы бёкерсовского типа, определённые Ж. Реном и К. Виолой, могут быть преобразованы к виду, рассматривавшемуся В. Н. Сорокиным. В статье обсуждаются возможные обобщения таких преобразований между определёнными подходящим образом в n-мерном случае кратными интегралами типа Бёкерса и Сорокина и исследуются арифметические свойства представлений таких интегралов в виде линейных форм от дзета-значений с рациональными коэффициентами.

Abstract

C. Viola, On the equivalence of Beukers-type and Sorokin-type multiple integrals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 49—59.

It is well known that a triple Beukers-type integral, as defined by G. Rhin and C. Viola, can be transformed into a suitable triple Sorokin-type integral. I will discuss possible extensions to the n-dimensional case of a similar equivalence between suitably defined Beukers-type and Sorokin-type multiple integrals, with consequences on the arithmetical structure of such integrals as linear combinations of zeta-values with rational coefficients.

1. Введение

В поисках оценок меры иррациональности $\zeta(3)$ Ж. Рен и автор [5] изучали интеграл вида

$$B_3 = \int\limits_{(0,1)^3} \frac{X^h(1-X)^l Y^k (1-Y)^s Z^j (1-Z)^q}{(1-(1-XY)Z)^{q+h-r}} \, \frac{\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z}{1-(1-XY)Z}, \tag{1.1}$$

мы называем его бёкерсовским, где параметры h, j, k, l, q, r, s являются неотрицательными целыми числами. Показатель $q+h-r$ в знаменателе не должен превосходить суммы $q+h$ показателей $1-Z$ и X в числителе, что является необходимым условием для сходимости интеграла (1.1). Ввиду симметричности по X и Y знаменателя $1-(1-XY)Z$, как легко убедиться, для сходимости (1.1)

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 49—59.

необходимо, чтобы показатель $q+h-r$ также не превосходил суммы $q+k$ показателей $1-Z$ и Y. Удобно определить дополнительный параметр $m=k+r-h$. Тогда

$$h+m=k+r \tag{1.2}$$

и, как несложно убедиться, интеграл (1.1) сходится тогда и только тогда, когда все восемь целых параметров h, j, k, l, m, q, r, s неотрицательны.

В нашей недавней работе [6] мы рассмотрели естественное многомерное обобщение интеграла (1.1), а именно

$$B_n=\int\limits_{(0,1)^n}\frac{X_1^{a_1}(1-X_1)^{b_1}\cdots X_n^{a_n}(1-X_n)^{b_n}}{(1-(1-X_1\cdots X_{n-1})X_n)^{b_n+a_1-c_1}}\,\frac{\mathrm{d}X_1\ldots\mathrm{d}X_n}{1-(1-X_1\cdots X_{n-1})X_n}, \tag{1.3}$$

где $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$, c_1 — неотрицательные целые числа. По аналогии с трёхмерным случаем можно последовательно определить параметры $c_2,\ldots,c_{n-1}$ с помощью соотношений

$$\begin{gathered}a_1+c_2=a_2+c_1,\\ a_2+c_3=a_3+c_2,\\ \ldots\\ a_{n-2}+c_{n-1}=a_{n-1}+c_{n-2},\end{gathered} \tag{1.4}$$

обобщающих (1.2). Ввиду симметрии знаменателя $1-(1-X_1\cdots X_{n-1})X_n$ по переменным $X_1,\ldots,X_{n-1}$ для сходимости интеграла (1.3) требуется, чтобы

$$a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_{n-1}\geqslant 0. \tag{1.5}$$

Существует, однако, значительная разница между интегралами (1.1) и (1.3) при $n\geqslant 4$. В [5] мы определили трёхмерное бирациональное преобразование $\vartheta\colon(X,Y,Z)\mapsto(x,y,z)$ с периодом 8 соотношениями

$$\vartheta\colon\begin{cases}x=(1-Y)Z,\\ y=\dfrac{(1-X)(1-Z)}{1-(1-XY)Z},\\ z=\dfrac{Y}{1-(1-Y)Z}.\end{cases} \tag{1.6}$$

Оно определяет взаимно-однозначное отображение открытого единичного куба $(0,1)^3$ на себя и удовлетворяет свойству

$$\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-(1-xy)z}=-\frac{\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z}{1-(1-XY)Z}.$$

Используя обратное преобразование ϑ^{-1}, задаваемое формулами

$$\vartheta^{-1}\colon\begin{cases}X=\dfrac{(1-y)(1-z)}{1-(1-xy)z},\\ Y=(1-x)z,\\ Z=\dfrac{x}{1-(1-x)z},\end{cases}$$

как замену переменных в интеграле (1.1), несложно убедиться, что величина B_3 не меняется под действием циклической перестановки

$$(h\ j\ k\ l\ m\ q\ r\ s) \tag{1.7}$$

восьми параметров при условии, что

$$j+q=l+s. \tag{1.8}$$

На самом деле условие (1.8) является необходимым и достаточным для исключения нежелательного множителя $1-(1-x)z$ в интеграле, полученном из (1.1) заменой переменных ϑ^{-1}. Удивительно, но линейные соотношения (1.2) и (1.8) меняются местами под действием перестановки (1.7). Это позволяет воспользоваться действием группы преобразований, чтобы, не накладывая никаких дополнительных ограничений на параметры, показать, что интеграл (1.1) есть $\mathbb{Q}$-линейная комбинация чисел 1 и $\zeta(3)$. После этого выбор параметров, удовлетворяющих (1.2) и (1.8), приводит к хорошим оценкам меры иррациональности числа $\zeta(3)$.

К сожалению, в общем случае интеграл B_n не наделён действием подобной группы и, как следствие, даже при дополнительных ограничениях на показатели интеграл (1.3) при $n \geqslant 4$ не обязан быть $\mathbb{Q}$-линейной комбинацией только 1 и $\zeta(n)$. В [6] мы доказали, что при отсутствии дополнительных условий, за исключением (1.5), интеграл B_n в действительности представляется в виде $\mathbb{Q}$-линейной комбинации $1, \zeta(2), \zeta(3), \ldots, \zeta(n)$ и что в случае $a_n+b_n \leqslant b_1+\ldots+b_{n-1}+n-3$ коэффициент при $\zeta(2)$ в этой комбинации обращается в нуль. Этот результат также может быть получен из некоторых формул Ю. В. Нестеренко [4], связывающих кратные интегралы с интегрированием по единичному кубу с гипергеометрическими интегралами Меллина—Барнса и линейными формами от полилогарифмов.

В отличие от метода Ю. В. Нестеренко, наше доказательство в [6] указанного результата основано на некотором n-мерном бирациональном преобразовании η_n, переводящем интеграл B_n в некоторый n-мерный интеграл (мы называем такие интегралы сорокинскими) с параметрами, удовлетворяющими условиям (1.4) и (1.5). Напомним, что В. Н. Сорокин рассмотрел в [1] тройной интеграл

$$\int\limits_{(0,1)^3} \left(\frac{x(1-x)y(1-y)z(1-z)}{(1-xy)(1-xyz)}\right)^h \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1-xy)(1-xyz)},$$

чтобы дать новое доказательство иррациональности числа $\zeta(3)$. Под n-мерным сорокинским интегралом мы понимаем интеграл

$$S_n = \int\limits_{(0,1)^n} \frac{x_1^{h_1}(1-x_1)^{j_1}\,x_2^{h_2}(1-x_2)^{j_2}\cdots x_n^{h_n}(1-x_n)^{j_n}}{(1-x_1x_2)^{j_1+j_2-k_1}(1-x_1x_2x_3)^{k_1+j_3-k_2}\cdots(1-x_1\cdots x_n)^{k_{n-2}+j_n-k_{n-1}}} \times \\ \times \frac{\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n}{(1-x_1x_2)\cdots(1-x_1\cdots x_n)}, \tag{1.9}$$

где $h_1, \ldots, h_n$, $j_1, \ldots, j_n$ и $k_1, \ldots, k_{n-1}$ — неотрицательные целые числа (несложно убедиться, что последнее гарантирует сходимость интеграла S_n).

Поскольку Ж. Крессон, С. Фишлер и Т. Ривоаль в [2] доказали, что общие кратные сорокинские интегралы являются $\mathbb{Q}$-линейными комбинациями значений обобщённых полилогарифмов (кратных дзета-значений), представляется интересным указать условия, при которых сорокинский интеграл является $\mathbb{Q}$-линейной комбинацией только значений дзета-функции Римана при целых положительных значениях аргумента. Цель настоящей работы — расширить результаты из [6] путём предъявления дальнейших n-мерных бирациональных преобразований, связывающих бёкерсовские и сорокинские n-мерные интегралы, указывая тем самым линейные условия на параметры $h_1, \ldots, h_n$, $j_1, \ldots, j_n$, $k_1, \ldots, k_{n-1}$, при которых кратные дзета-значения в интеграле S_n не появляются.

2. Бирациональные преобразования

С. Фишлер в [3, п. 5.5.2] рассмотрел n-мерное бирациональное преобразование, преобразующее кратный интеграл Васильева в сорокинский интеграл. В случае $n = 3$ преобразование Фишлера, обозначаемое далее через $\alpha_3\colon (x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$, может быть записано в виде

$$\alpha_3\colon \begin{cases} X = 1 - z, \\ Y = \dfrac{(1-x)y}{1-xy}, \\ Z = x. \end{cases}$$

Несложно проверить, что α_3 является взаимно-однозначным отображением куба $(0,1)^3$ на себя, удовлетворяющим свойству

$$\frac{\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z}{1-(1-XY)Z} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1-xy)(1-xyz)}.$$

В [7] автор обобщил преобразование α_3, рассмотрев семейство трёхмерных бирациональных преобразований

$$\lambda\,\alpha_3\nu, \tag{2.1}$$

где ν — это либо преобразование

$$\sigma\colon \begin{cases} X = y, \\ Y = x, \\ Z = z, \end{cases}$$

либо тождественное преобразование, а λ — это любая композиция преобразований, каждое из которых есть σ или ϑ из (1.6) (для произвольных преобразований φ и ψ через $\varphi\psi$ обозначается преобразование, полученное путём последовательного применения сначала ψ, а затем φ). Поскольку преобразование ϑ имеет период 8, группа $\langle\vartheta,\sigma\rangle$ изоморфна группе диэдра $\mathfrak{D}_8$ порядка 16, так что имеется в точности 32 преобразования (2.1), очевидно удовлетворяющих равенству

$$\frac{\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z}{1-(1-XY)Z}=\pm\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1-xy)(1-xyz)}. \tag{2.2}$$

Интересным свойством этих 32 трёхмерных преобразований (2.1) является то, что 16 из них переводят бёкерсовский интеграл (1.1) в трёхмерный сорокинский интеграл только при линейном условии (1.2), в то время как остальные 16 требуют одновременного выполнения (1.2) и (1.8), так как условие (1.8) является необходимым и достаточным для исключения лишнего множителя, возникающего в интеграле в случае 16 преобразований последнего типа. Поскольку обобщения линейного соотношения (1.8) для бёкерсовского интеграла (1.3) высшей размерности не существует, нас будут интересовать только 16 преобразований первого типа. Они имеют следующий вид:

$$\alpha_3\colon\begin{cases}X=1-z,\\ Y=\dfrac{(1-x)y}{1-xy},\\ Z=x,\end{cases}\qquad \beta_3\colon\begin{cases}X=1-z,\\ Y=\dfrac{(1-x)y}{1-xy},\\ Z=\dfrac{1-xy}{1-xyz},\end{cases}$$

$$\eta_3\colon\begin{cases}X=\dfrac{(1-xy)z}{1-xyz},\\ Y=\dfrac{(1-x)y}{1-xy},\\ Z=1-xyz,\end{cases}\qquad \mu_3\colon\begin{cases}X=\dfrac{(1-xy)z}{1-xyz},\\ Y=\dfrac{(1-x)y}{1-xy},\\ Z=x.\end{cases}$$

12 оставшихся преобразований, получающихся из преобразований α_3, β_3, η_3, μ_3 перестановкой x и y, или X и Y, или одновременной перестановкой переменных в обеих парах.

Непосредственная проверка показывает, что выписанные преобразования удовлетворяют (2.2) (α_3 и η_3 — формуле со знаком $+$, β_3 и μ_3 — формуле со знаком $-$) и преобразуют (1.1) в сорокинский интеграл только при линейном ограничении (1.2). Более того, именно эти преобразования допускают естественные обобщения на n-мерный случай при любом $n\geqslant 4$; мы обозначим их соответственно через α_n, β_n, η_n и μ_n. Они имеют следующий вид:

$$\alpha_n\colon \begin{cases} X_1 = 1 - x_n, \\ X_2 = \dfrac{(1 - x_1 \cdots x_{n-2})x_{n-1}}{1 - x_1 \cdots x_{n-1}}, \\ \quad \dots \\ X_{n-1} = \dfrac{(1 - x_1)x_2}{1 - x_1x_2}, \\ X_n = x_1, \end{cases} \qquad \beta_n\colon \begin{cases} X_1 = 1 - x_n, \\ X_2 = \dfrac{(1 - x_1 \cdots x_{n-2})x_{n-1}}{1 - x_1 \cdots x_{n-1}}, \\ \quad \dots \\ X_{n-1} = \dfrac{(1 - x_1)x_2}{1 - x_1x_2}, \\ X_n = \dfrac{1 - x_1 \cdots x_{n-1}}{1 - x_1 \cdots x_n}, \end{cases}$$

$$\eta_n\colon \begin{cases} X_1 = \dfrac{(1 - x_1 \cdots x_{n-1})x_n}{1 - x_1 \cdots x_n}, \\ X_2 = \dfrac{(1 - x_1 \cdots x_{n-2})x_{n-1}}{1 - x_1 \cdots x_{n-1}}, \\ \quad \dots \\ X_{n-1} = \dfrac{(1 - x_1)x_2}{1 - x_1x_2}, \\ X_n = 1 - x_1 \cdots x_n, \end{cases} \qquad \mu_n\colon \begin{cases} X_1 = \dfrac{(1 - x_1 \cdots x_{n-1})x_n}{1 - x_1 \cdots x_n}, \\ X_2 = \dfrac{(1 - x_1 \cdots x_{n-2})x_{n-1}}{1 - x_1 \cdots x_{n-1}}, \\ \quad \dots \\ X_{n-1} = \dfrac{(1 - x_1)x_2}{1 - x_1x_2}, \\ X_n = x_1. \end{cases}$$

Отметим, что η_n и есть преобразование из [6], о котором говорилось в разделе 1.

Непосредственное вычисление формул для α_n^{-1}, β_n^{-1}, η_n^{-1} и μ_n^{-1} показывает, что α_n, β_n, η_n и μ_n являются взаимно-однозначными отображениями куба $(0,1)^n$ на себя. Кроме того, α_n и η_n удовлетворяют равенству

$$\frac{\mathrm{d}X_1 \dots \mathrm{d}X_n}{1 - (1 - X_1 \cdots X_{n-1})X_n} = (-1)^{[n/2]+1} \frac{\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n}{(1 - x_1x_2) \cdots (1 - x_1 \cdots x_n)}, \tag{2.3}$$

а β_n и μ_n — равенству

$$\frac{\mathrm{d}X_1 \dots \mathrm{d}X_n}{1 - (1 - X_1 \cdots X_{n-1})X_n} = (-1)^{[n/2]} \frac{\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n}{(1 - x_1x_2) \cdots (1 - x_1 \cdots x_n)}. \tag{2.4}$$

Чтобы доказать это, удобно в явном виде вычислить якобиан отображения μ_n, а затем посчитать якобианы оставшихся трёх преобразований, используя формулы $\eta_n = \gamma_n\mu_n$, $\alpha_n = \delta_n\mu_n$ и $\beta_n = \gamma_n\alpha_n$, где

$$\gamma_n\colon \begin{cases} X_1 = x_1, \\ \quad \dots \\ X_{n-1} = x_{n-1}, \\ X_n = \dfrac{1 - x_n}{1 - (1 - x_1 \cdots x_{n-1})x_n}, \end{cases} \qquad \delta_n\colon \begin{cases} X_1 = \dfrac{(1 - x_1)(1 - x_n)}{1 - (1 - x_1 \cdots x_{n-1})x_n}, \\ X_2 = x_2, \\ \quad \dots \\ X_n = x_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Для μ_n ввиду $\partial X_r/\partial x_s = 0$ при $r+s>n+1$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(X_1,\dots,X_n)}{\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n)} &= \frac{\partial X_1}{\partial x_n}\left(-\frac{\partial X_2}{\partial x_{n-1}}\right)\frac{\partial X_3}{\partial x_{n-2}}\cdots\left((-1)^{n-1}\frac{\partial X_n}{\partial x_1}\right) = \\ &= (-1)^{[n/2]}\frac{1-x_1\cdots x_{n-1}}{(1-x_1\cdots x_n)^2}\,\frac{1-x_1\cdots x_{n-2}}{(1-x_1\cdots x_{n-1})^2}\cdots\frac{1-x_1}{(1-x_1x_2)^2} = \\ &= (-1)^{[n/2]}\frac{1-x_1}{(1-x_1x_2)\cdots(1-x_1\cdots x_{n-1})(1-x_1\cdots x_n)^2}.\end{aligned}$$

Далее,

$$1-(1-X_1\cdots X_{n-1})X_n = \frac{1-x_1}{1-x_1\cdots x_n},$$

откуда и вытекает соотношение (2.4).

3. Сорокинские интегралы

Применяя к бёкерсовскому интегралу B_n, определённому в (1.3), замены переменных α_n, β_n, η_n, μ_n, в соответствии с (2.3) и (2.4) мы получим четыре сорокинских интеграла, которые обозначим через $S_n^{(\alpha)}$, $S_n^{(\beta)}$, $S_n^{(\eta)}$, $S_n^{(\mu)}$. Непосредственные вычисления с учётом (1.4) показывают, что $S_n^{(\alpha)}$ есть интеграл (1.9) с выбором

$$\begin{gathered} h_1=a_n,\ h_2=a_{n-1},\dots,\ h_{n-1}=a_2,\ h_n=b_1,\\ j_1=c_{n-1},\ j_2=b_{n-1},\dots,\ j_{n-1}=b_2,\ j_n=a_1,\\ k_1=c_{n-2},\dots,\ k_{n-3}=c_2,\ k_{n-2}=b_n,\ k_{n-1}=c_1,\end{gathered}\tag{3.1}$$

$S_n^{(\beta)}$ — интеграл (1.9) с

$$\begin{gathered} h_1=b_n,\ h_2=c_{n-1},\dots,\ h_{n-1}=c_2,\ h_n=b_1,\\ j_1=a_{n-1},\ j_2=b_{n-1},\dots,\ j_{n-1}=b_2,\ j_n=c_1,\\ k_1=a_{n-2},\dots,\ k_{n-3}=a_2,\ k_{n-2}=a_n,\ k_{n-1}=a_1,\end{gathered}\tag{3.2}$$

$S_n^{(\eta)}$ — интеграл (1.9) с

$$\begin{gathered} h_1=b_n,\ h_2=c_{n-1},\dots,\ h_n=c_1,\\ j_1=a_{n-1},\ j_2=b_{n-1},\dots,\ j_n=b_1,\\ k_1=a_{n-2},\dots,\ k_{n-2}=a_1,\ k_{n-1}=a_n\end{gathered}\tag{3.3}$$

и, наконец, $S_n^{(\mu)}$ — интеграл (1.9) с

$$\begin{gathered} h_1=a_n,\ h_2=a_{n-1},\dots,\ h_n=a_1,\\ j_1=c_{n-1},\ j_2=b_{n-1},\dots,\ j_n=b_1,\\ k_1=c_{n-2},\dots,\ k_{n-2}=c_1,\ k_{n-1}=b_n.\end{gathered}\tag{3.4}$$

Таким образом, опять же согласно (1.4), каждый из интегралов $S_n^{(\alpha)}$ и $S_n^{(\beta)}$ имеет вид (1.9) с показателями, удовлетворяющими линейным условиям

$$\begin{aligned} j_n + k_{n-3} &= h_{n-1} + k_{n-1}, \\ h_{n-1} + k_{n-4} &= h_{n-2} + k_{n-3}, \\ &\dots \\ h_4 + k_1 &= h_3 + k_2, \\ h_3 + j_1 &= h_2 + k_1, \end{aligned}$$

а показатели каждого из интегралов $S_n^{(\eta)}$ и $S_n^{(\mu)}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} h_n + k_{n-3} &= h_{n-1} + k_{n-2}, \\ h_{n-1} + k_{n-4} &= h_{n-2} + k_{n-3}, \\ &\dots \\ h_4 + k_1 &= h_3 + k_2, \\ h_3 + j_1 &= h_2 + k_1. \end{aligned}$$

Мы можем сформулировать указанные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 4$, $h_1, \dots, h_n$, $j_1, \dots, j_n$, $k_1, \dots, k_{n-1}$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{cases} h_4 + k_1 = h_3 + k_2, \\ \quad \dots \\ h_{n-1} + k_{n-4} = h_{n-2} + k_{n-3} \end{cases} \tag{3.5}$$

(при $n = 4$ условия (3.5) отсутствуют). Тогда сорокинский интеграл (1.9) равен бёкерсовскому интегралу B_n и, в частности, равен линейной комбинации

$$A_1 + A_2\zeta(2) + A_3\zeta(3) + \dots + A_{n-1}\zeta(n-1) + A_n(n-1)\zeta(n) \tag{3.6}$$

с коэффициентами $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \in \mathbb{Q}$, $A_n \in \mathbb{Z}$ при условии выполнения одного из следующих четырёх дополнительных предположений:

$$\begin{cases} h_3 + j_1 = h_2 + k_1, \\ j_n + k_{n-3} = h_{n-1} + k_{n-1}, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} h_3 + j_1 = h_2 + k_1, \\ h_n + k_{n-3} = h_{n-1} + k_{n-2}, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} h_3 + j_2 = h_1 + k_1, \\ j_n + k_{n-3} = h_{n-1} + k_{n-1}, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} h_3 + j_2 = h_1 + k_1, \\ h_n + k_{n-3} = h_{n-1} + k_{n-2}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Доказательство. Если выполнено условие (3.7), то интеграл (1.9) равен бёкерсовскому интегралу B_n с параметрами (3.1) или (3.2), поэтому равен (3.6) согласно [6, теорема 3.1]. Аналогично, если выполнено (3.8), интеграл (1.9) равен B_n с параметрами (3.3) или (3.4). Если же выполнено одно из условий (3.9) или (3.10), интеграл (1.9) сводится к случаю (3.7) или (3.8) соответственно с помощью перестановки переменных x_1 и x_2. $\square$

4. Заключительные замечания

В разделе 2 мы определили n-мерные бирациональные преобразования, биективно отображающие куб $(0,1)^n$ на себя и удовлетворяющие (2.3) или (2.4), при которых бёкерсовский интеграл (1.3) переходит в сорокинский (1.9) с линейными условиями на параметры и наоборот. Существуют также нетривиальные n-мерные бирациональные преобразования (хотя и не столь продуктивные, как (1.6), не имеющее аналога при $n \geqslant 4$), биективно отображающие куб $(0,1)^n$ на себя и переводящие бёкерсовский интеграл в интеграл того же вида, а сорокинский — в сорокинский. Примером подобного преобразования для бёкерсовских интегралов является инволюция γ_n в (2.5). Как несложно убедиться, она удовлетворяет соотношению

$$\frac{\mathrm{d}X_1 \ldots \mathrm{d}X_n}{1-(1-X_1 \cdots X_{n-1})X_n} = -\frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{1-(1-x_1 \cdots x_{n-1})x_n}$$

и преобразует интеграл B_n в (1.3) как перестановка

$$(a_1\ c_1) \ldots (a_{n-1}\ c_{n-1})(a_n\ b_n) \tag{4.1}$$

параметров (1.5) (см. [6, лемма 3.2]). Отметим, что перестановка (4.1) сохраняет линейные соотношения (1.4).

Преобразования подобного типа для сорокинских интегралов — инволюции

$$\begin{cases} X_1 = x_1, \\ \quad \ldots \\ X_{n-1} = x_{n-1}, \\ X_n = \dfrac{1-x_n}{1-x_1 \cdots x_n} \end{cases} \tag{4.2}$$

и

$$\begin{cases} X_1 = 1 - x_1 \cdots x_n, \\ X_2 = \dfrac{1 - x_1 \cdots x_{n-1}}{1 - x_1 \cdots x_n}, \\ X_3 = \dfrac{1 - x_1 \cdots x_{n-2}}{1 - x_1 \cdots x_{n-1}}, \\ \quad \ldots \\ X_{n-1} = \dfrac{1 - x_1 x_2}{1 - x_1 x_2 x_3}, \\ X_n = \dfrac{1 - x_1}{1 - x_1 x_2}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Инволюция (4.2) очевидно удовлетворяет соотношению

$$\frac{\mathrm{d}X_1 \ldots \mathrm{d}X_n}{(1 - X_1 X_2) \cdots (1 - X_1 \cdots X_n)} = -\frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{(1 - x_1 x_2) \cdots (1 - x_1 \cdots x_n)}$$

и действует на интеграл S_n в (1.9) как перестановка параметров

$$(h_n\ j_n)(k_{n-2}\ k_{n-1}), \tag{4.4}$$

тождественная на линейных соотношениях (3.5) и меняющая местами (3.7) с (3.8) и (3.9) с (3.10).

Стандартные манипуляции с якобианом замены (4.3), которые мы оставляем читателю, показывают, что эта замена удовлетворяет соотношению

$$\frac{\mathrm{d}X_1 \ldots \mathrm{d}X_n}{(1 - X_1 X_2) \cdots (1 - X_1 \cdots X_n)} = (-1)^{[(n+1)/2]} \frac{\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{(1 - x_1 x_2) \cdots (1 - x_1 \cdots x_n)}.$$

Отсюда следует, что (4.3) действует на S_n как перестановка параметров

$$(h_1\ k_{n-1})(h_2\ k_{n-2}) \ldots (h_{n-1}\ k_1)(h_n\ j_1)(j_2\ j_n)(j_3\ j_{n-1}) \ldots, \tag{4.5}$$

заканчивающаяся циклом $(j_{n/2}\ j_{n/2+2})$ в случае чётного n и $(j_{(n+1)/2}\ j_{(n+1)/2+1})$ в случае нечётного n. Перестановка (4.5) меняет порядок следования линейных соотношений (3.5), (3.8), (3.9) и переставляет (3.7) с (3.10).

Литература

[1] Сорокин В. Н. Теорема Апери // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1998. — № 3. — С. 48—53.

[2] Cresson J., Fischler S., Rivoal T. Séries hypergéométriques multiples et polyzêtas // Bull. Soc. Math. France. — 2008. — Vol. 136, no. 1. — P. 97—145.

[3] Fischler S. Groupes de Rhin–Viola et intégrales multiples // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2003. — Vol. 15, no. 2. — P. 479—534.

[4] Nesterenko Yu. V. Integral identities and constructions of approximations to zeta-values // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2003. — Vol. 15. — P. 535—550.

[5] Rhin G., Viola C. The group structure for $\zeta(3)$ // Acta Arith. — 2001. — Vol. 97, no. 3. — P. 269—293.

[6] Rhin G., Viola C. Multiple integrals and linear forms in zeta-values // Funct. Approx. — 2007. — Vol. 37. — P. 429—444.

[7] Viola C. The arithmetic of Euler's integrals // Riv. Mat. Univ. Parma (7). — 2004. — Vol. 3*. — P. 119—149.