Биномиальные уравнения Туэ, тернарные уравнения и степени среди значений полиномов*

К. ДЬЁРИ
Дебреценский университет, Венгрия
e-mail: gyory@math.klte.hu

А. ПИНТЕР
Дебреценский университет, Венгрия
e-mail: apinter@math.klte.hu

УДК 511.52

Ключевые слова: биномиальные уравнения Туэ, суперэллиптические уравнения, тернарные уравнения, экспоненциальные уравнения, явные решения.

Аннотация

Мы в явном виде решаем уравнение $Ax^n - By^n = \pm 1$. Кроме того, мы получаем ряд новых результатов для семейств уравнений вида $Ax^n - By^n = z^m$ с $m \in \{3, n\}$, где x, y, z, A, B, n — неизвестные ненулевые целые числа, такие что $n \geqslant 3$, $AB = p^\alpha q^\beta$ с натуральными α, β, $2 \leqslant p < q < 30$ — простые числа. В доказательствах используется ряд глубоких методов, в том числе модулярный подход и современные оценки линейных форм от логарифмов. В некоторых случаях используются локальный анализ и компьютерное решение уравнений Туэ малых степеней.

Abstract

K. Győry, Á. Pintér, Binomial Thue equations, ternary equations, and power values of polynomials, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 61—77.

We explicitly solve the equation $Ax^n - By^n = \pm 1$ and, along the way, we obtain new results for a collection of equations $Ax^n - By^n = z^m$ with $m \in \{3, n\}$, where x, y, z, A, B, and n are unknown nonzero integers such that $n \geqslant 3$, $AB = p^\alpha q^\beta$ with nonnegative integers α and β and with primes $2 \leqslant p < q < 30$. The proofs require a combination of several powerful methods, including the modular approach, recent lower bounds for linear forms in logarithms, somewhat involved local considerations, and computational techniques for solving Thue equations of low degree.

*Первый автор был поддержан грантом T67580 Венгерского национального фонда научных исследований. Второй автор был поддержан грантами T48791 и T67580 Венгерского национального фонда научных исследований.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 61—77.

1. Естественное обобщение уравнения в S-единицах и биномиальное уравнение Туэ с неизвестным показателем

Рассмотрим конечное множество простых чисел $S = \{p_1, \dots, p_s\}$. Обозначим через $\mathscr{S}$ множество всех таких натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, не принадлежащих множеству S. Другими словами, множество $\mathscr{S}$ состоит из тех целых рациональных чисел, которые являются S-единицами в $\mathbb{Q}$. Рассмотрим уравнение

$$Ax^n - By^n = C \text{ с неизвестными } x,\ y,\ A,\ B,\ C,\ n, \quad \text{такими что } |xy| \geqslant 1,\ A, B, C \in \mathscr{S},\ n \geqslant 3. \qquad (1)$$

Мы можем предполагать, что

$$\text{НОД}(Ax, By, C) = 1. \qquad (2)$$

Уравнение (1) является естественным обобщением уравнения в S-единицах над $\mathbb{Q}$ и биномиального уравнения Туэ с неизвестным показателем. Действительно, при фиксированных значениях A, B, C уравнение (1) — биномиальное уравнение Туэ. В то же время при фиксированных x, y и n рассматриваемое уравнение является уравнением в S-единицах. В обоих этих частных случаях известны различные эффективные границы для решений соответствующих уравнений. Обзор такого рода результатов и их различных приложений можно найти в [5, 8, 10—13, 21, 23] (см. также библиографию в этих работах).

Пусть

$$Q_S = p_1 \cdots p_s.$$

В [14, 15] мы доказали следующую эффективную теорему об ограниченности решений.

Теорема. *Для всякого решения x, y, A, B, C, n уравнения (1) с условием (2) величины $|Ax^n|$, $|By^n|$, $|C|$ ограничены сверху некоторой эффективно вычислимой постоянной, зависящей только от Q_S.*

В [14] также было доказано, что из соотношений (1), (2) при условии $|xy| > 1$ вытекает неравенство $n \leqslant c_1 Q_S^3$. Отметим, что в этом случае эффективный вариант ABC-гипотезы даёт оценку $n \leqslant c_2 \log Q_S$. Здесь c_1, c_2 (а в дальнейшем и c_3) обозначают эффективно вычислимые абсолютные постоянные. Легко показать, что последняя верхняя оценка является точной по порядку относительно величины Q_S. Действительно, для любого n можно подобрать соответствующее конечное множество простых чисел S и числа $A, B, C \in \mathscr{S}$, такие что уравнение (1) имеет решение, для которого выполнены соотношения (2), $|xy| > 1$ и $n \geqslant c_3 \log Q_S$.

При доказательстве сформулированной теоремы основным инструментом является теория линейных форм от логарифмов. Получить эффективную границу для решений не так сложно. Однако такого рода граница оказывается слишком большой для того, чтобы выписать все решения уравнения (1) в конкретных случаях.

2. Решение уравнения (1) в конкретных случаях

Для уравнения (1) с неизвестным $n \geqslant 3$ и с неизвестными S-единичными коэффициентами A, B решение было получено в различных случаях. Но всякий раз предполагалось, что $C = \pm 1$, т. е. рассматривалось уравнение

$$Ax^n - By^n = \pm 1 \text{ с неизвестными } x,\ y,\ A,\ B,\ n, \quad \text{такими что } |xy| \geqslant 1,\ A, B \in \mathscr{S},\ n \geqslant 3, \tag{3}$$

где можно предполагать, что $1 \leqslant A < B$, а x, y — положительные целые числа.

Для случая $S = \{p\}$ с простым

$$p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 53, 59\}$$

из работ А. Вайлса [24], К. Рибета [19]] и Г. Дармона и Л. Мерела [7] об уравнениях типа Ферма (см. также раздел 4) следует, что рассматриваемое уравнение (3) не имеет иных решений, кроме решения $(A, B) = (1, 2)$, $x = y = 1$. Доказательства этих авторов основаны на модулярном методе. Для $S = \{2, 3\}$ уравнение (3) было решено М. А. Беннетом [2]. Этот результат был обобщён в [3] на случай $S = \{p, q\}$, где $2 \leqslant p < q \leqslant 13$. Независимо Я. Бюжо, М. Миньотт и С. Сиксек [6] решили уравнение (3) в случае, когда $A = 2^\alpha$, $B = q^\beta$, где q — некоторое простое число, $3 \leqslant q < 100$, и когда $A = p^\alpha$, $B = q^\beta$, где p, q — простые числа, $3 \leqslant p < q \leqslant 31$. В [2, 3, 6] модулярный подход сочетался с использованием современных оценок линейных форм от логарифмов.

Наша теорема 1 обобщает упомянутые работы [2, 3], связанные с уравнением (3).

Теорема 1. *Пусть $S = \{p, q\}$, где p и q — простые числа, $2 \leqslant p, q < 30$. Пусть A, B, x, y, n — натуральные числа, причём A, B — S-единицы, $A < B$ и $n \geqslant 3$. Тогда единственными решениями уравнения* (3) *будут*

$$n \geqslant 3, \quad A \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 16\}, \quad x = y = 1,$$

и

$$\begin{aligned}
n = 3, &\quad (A, x) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 8), (1, 9), (1, 18), (1, 19), (1, 23),\\
&\qquad\qquad\quad (2, 2), (3, 2), (5, 3), (5, 11), (11, 6),\\
n = 4, &\quad (A, x) = (1, 2), (1, 3), (1, 5), (3, 2),\\
n = 5, &\quad (A, x) = (1, 2), (1, 3), (9, 2),\\
n = 6, &\quad (A, x) = (1, 2).
\end{aligned}$$

В случае $q \leqslant 13$ сформулированное утверждение содержит теорему 1.1 из [3]. Для $p, q < 30$ наша теорема 1 обобщает результат работы [6] на случай $A = 1$, $B = p^\alpha q^\beta$ с неотрицательными целыми α, β. Наконец, теорема 1 находит все решения x, y, n уравнения (3) для каждой пары A, B, $1 \leqslant A < B < 30$, что является обобщением теоремы 3 из [15].

3. Применение к суперэллиптическим уравнениям

К суперэллиптическим уравнениям могут быть применены не только результаты работы [6], но и перечисленные выше результаты, касающиеся уравнений (1) и (3). Например, из сформулированной нами выше основной теоремы вытекает, что для всякого решения уравнения

$$x(x+1) = wy^n \text{ в целых } x,\ w,\ y,\ n, \text{ где } w \in \mathscr{S},\ n \geqslant 3 \tag{4}$$

величины $|x|$ и $|wy^n|$ ограничены эффективно вычислимой постоянной, зависящей только от Q_S. Результаты работ [2] и [3], касающиеся уравнения (3), позволили решить уравнение (4) для $S = \{2, 3\}$ и в более общей ситуации для $S = \{p, q\}$ с $2 \leqslant p < q \leqslant 13$ соответственно. Наша теорема 1 эквивалентна следующему обобщению этих результатов.

Теорема 2. *Пусть S то же, что и в теореме* 1. *Если x — такое натуральное число, что уравнение* (4) *имеет решение в целых y, n, w, где w — некоторая S-единица и $n \geqslant 3$, то*

$$x \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 15, 16, 17, 24, 26, 27, 32, 48, 63, 64, 80, 135, 242, 287,\\ 512, 624, 728, 2375, 5831, 6655, 6859, 12167\}.$$

Этот результат включает в себя как частный случай теорему 1.2 из [3].

4. Тернарные уравнения и кривые Фрея

Для $S = \{p, q\}$ с различными простыми $2 \leqslant p, q < 30$ мы определим все те натуральные решения x, y, A, B, n уравнения (3), для которых $xy > 1$, а A и B — S-единицы. Прежде всего нам необходима разумная верхняя граница для n. Чтобы получить её, рассмотрим общее уравнение вида

$$Ax^n - By^n = z^m \quad \text{где} \quad m \in \{3, n\}, \tag{5}$$

где z также неизвестное целое число.

Подходы к решению подобного рода уравнений, аналогичные подходу, который был применён А. Вайлсом [24] для доказательства последней теоремы Ферма, можно найти в различных недавних работах (см., например, [2—4, 7, 16, 17, 19, 20]. В этих подходах используется связь между решением тернарного уравнения вида (5), кривыми Фрея и некоторыми модулярными формами.

При помощи модулярного метода мы получаем новые результаты об уравнении (5) в обоих случаях $m = n$ и $m = 3$. Сформулированные ниже теоремы 3—5 будут использованы при $z = \pm 1$ в доказательстве теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $AB = 2^\alpha q^\beta$, где q — простое число, $3 \leqslant q < 30$, α, β — неотрицательные целые числа. Если $n > 11$ — простое число, то уравнение*

$$Ax^n - By^n = z^n \tag{6}$$

не имеет целочисленных решений (x, y, z) с $|xy| > 1$ и с попарно взаимно простыми Ax, By и z, кроме, быть может, случая

$$(q, \alpha) \in \{(3,1), (3,2), (3,3), (5,2), (5,3), (7,2), (7,3), (17,4)\}, \quad xy \text{ нечётно.}$$

Для $q \leqslant 13$, $n > 11$ из этого результата следует теорема 2.2 из [3]. Кроме того, нашу теорему 3 можно сравнить с соответствующими результатами из [2, 19, 20, 24].

Теорема 4. *Пусть $AB = p^\alpha q^\beta$, где p, q — простые числа, $5 \leqslant p < q < 30$, α, β — неотрицательные целые числа. Если $n > 11$ — простое число, то уравнение (6) не имеет целочисленных решений (x, y, z) с $|xy| > 1$ с попарно взаимно простыми Ax, By и z, кроме, быть может, случаев $(p, q, n) = (19, 29, 13)$ и*

$$(p, q) \in \{(5,7), (5,13), (7,11), (7,13), (7,17), (7,23), (13,17), (13,19), (17,23)\}.$$

Теорема 4 является первым результатом, когда в явном виде решается уравнение вида (6) в случае, когда A и B тоже неизвестные и произведение AB делится на два различных простых числа.

Для $m = 3$ мы получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть $AB = p^\alpha q^\beta$, где α, β — неотрицательные целые числа и p, q — простые числа, $3 \leqslant p < q < 30$. Пусть либо $p \leqslant 7$, либо*

$$(p, q) \in \{(11,13), (11,17), (11,19), (13,17), (13,19), (17,23)\}.$$

Если $n > 11$ — простое число, то уравнение

$$Ax^n - By^n = z^3 \tag{7}$$

не имеет целочисленных решений (x, y, z) с $|xy| > 1$, чётным xy и попарно взаимно простыми Ax, By и z, кроме, быть может, случаев

$$\begin{gathered}(p, q, n) \in \{(3,23,13), (5,19,13), (5,23,23), (5,29,13),\\ (5,29,23), (7,17,17), (7,17,19), (7,19,13), (11,13,13),\\ (11,17,23), (11,19,13), (11,19,31), (13,17,17), (13,19,13)\}.\end{gathered}$$

Для $q \leqslant 13$, $n > 11$ из этого результата вытекает теорема 2.1 из [3].

5. Вспомогательные результаты

Следующее предложение A включает в себя недавние результаты, полученные А. Краусом [17] и М. А. Беннетом, В. Ватсалом, С. Яздани [4], касающиеся тернарного уравнения вида (5), где A и B — заданные ненулевые целые, $n > 3$, x, y, z — неизвестные целые числа. Обзор этой тематики имеется в [1, 22].

Для заданного простого q и ненулевого целого u положим

$$\mathrm{Rad}_q(u) = \prod_{p \mid u,\, p \neq q} p,$$

где произведение взято по всем простым p. Будем обозначать через $\mathrm{ord}_q(u)$ наибольшее неотрицательное целое k, такое что $q^k \mid u$. Предположим, что для некоторых A, B и $n > 3$ имеется решение (x, y, z) уравнения (5) в ненулевых целых числах.

Если $m = 3$ (см. [4]), мы можем предположить, не ограничивая общности, что $3 \nmid Ax$, $By^n \not\equiv 2 \pmod 3$ и A и B не содержат n-х степеней. Рассмотрим эллиптическую кривую

$$E\colon Y^2 + 3zXY + By^nY = X^3$$

и положим

$$N_n(E) = \mathrm{Rad}_3(AB)\varepsilon_3,$$

где

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{ord}_3(B) = 3, \\ 3, & \text{если } \mathrm{ord}_3(By^n) > 3 \text{ и } \mathrm{ord}_3(B) \neq 3, \\ 3^2, & \text{если } 9 \mid (2 + By^n - 3z), \\ 3^3, & \text{если } 3 \mid\mid (2 + By^n - 3z) \text{ или } \mathrm{ord}_3(B) = 2, \\ 3^4, & \text{если } \mathrm{ord}_3(B) = 1. \end{cases}$$

Если $m = n$ (см. [17]), то, не ограничивая общности, можно предположить, что $Ax^n \equiv -1 \pmod 4$ и $By^n \equiv 0 \pmod 2$. Соответствующая кривая Фрея задаётся уравнением

$$E\colon Y^2 = X(X - Ax^n)(X + By^n).$$

Положим

$$N_n(E) = \mathrm{Rad}_2(AB)\,\varepsilon_n,$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{ord}_2(AB) = 4, \\ 2, & \text{если } \mathrm{ord}_2(AB) = 0 \text{ или } \mathrm{ord}_2(AB) \geqslant 5, \\ 2, & \text{если } 1 \leqslant \mathrm{ord}_2(AB) \leqslant 3 \text{ и } y \text{ чётно}, \\ 2^3, & \text{если } \mathrm{ord}_2(AB) = 2 \text{ или } \mathrm{ord}_2(AB) = 3 \text{ и } y \text{ нечётно}, \\ 2^5, & \text{если } \mathrm{ord}_2(AB) = 1 \text{ и } y \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Заметим, что и в случае $m = 3$, и в случае $m = n$ величины $N_n(E)$ связаны с кондукторами соответствующих кривых (см. [4, 17]).

Предложение A. *Предположим, что A, B, x, y, z, где Ax, By, z попарно взаимно просты, $xy \neq \pm 1$, — ненулевые целые числа, удовлетворяющие уравнению* (5) *с простым $n \geqslant 5$. Тогда в указанных выше предположениях и* *обозначениях существует параболическая форма* $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k q^k$ $(q := e^{2\pi i z})$ *веса 2 с тривиальным характером типа Небена, имеющая уровень* $N_n(E)$*, где* $N_n(E)$ *определено выше. Более того, если через* K_f *обозначить поле, над которым определены коэффициенты Фурье* c_k *этой формы, и предположить, что* r *— простое число, взаимно простое с* $nN_n(E)$*, то*

$$\mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_r - a_r) \equiv 0 \pmod{n},$$

где $a_r = \pm(r+1)$ (*если* $r \mid xy$) *или* $a_r \in S_{r,m}$ (*если* $r \nmid xy$),

$$S_{r,3} = \{u\colon |u| < 2\sqrt{r},\ u \equiv r+1 \pmod{3}\},$$
$$S_{r,n} = \{u\colon |u| < 2\sqrt{r},\ u \equiv r+1 \pmod{4}\}.$$

Доказательство. Утверждение является комбинацией нескольких глубоких результатов из [4] и [17]. Обзор результатов по этой тематике можно найти также в [1] и [22]. □

Предложение B. *Предположим, что* $AB = 2^{\alpha} q^{\beta}$*, где* $q \in \{3, 5, 7, 11, 13\}$*. Если* $n > 7$ *— простое число, взаимно простое с* q*, то уравнение* (6) *не имеет целочисленных решений* (x, y, z) *с* $|xy| > 1$ *и попарно взаимно простыми* Ax*,* By*,* z *за возможным исключением случаев*

$$(q, \alpha) \in \{(3,1), (3,2), (3,3), (5,2), (5,3), (7,2), (7,3)\} \quad \text{и} \quad xy \text{ нечётно.}$$

Доказательство. См. [3, теорема 2.2]. □

Обозначим через $\Phi(B)$ функцию Эйлера.

Предложение C. *Пусть* $n > 3$ *— простое число,* B *— чётное натуральное число, такое что* $(\Phi(B), n) = 1$ *и*

$$B^{n-1} \not\equiv 2^{n-1} \pmod{n^2}.$$

Тогда для $A = 1$ *уравнение* (6) *не имеет решений в попарно взаимно простых целых числах* x*,* y*,* z *с* $n \nmid y$*.*

Доказательство. Утверждение немедленно следует из [9, предложение 1]. Доказательство основано на теореме взаимности Эйзенштейна для циклотомических полей. □

Предложение D. *Предположим, что* $AB = p^{\alpha} q^{\beta}$*, где* $p, q \in \{3, 5, 7, 11, 13\}$*. Если* $n > 7$ *— простое число, взаимно простое с* pq*, то уравнение* (7) *не имеет целочисленных решений* (x, y, z) *с* $|xy| > 1$*, чётным значением произведения* xy *и попарно взаимно простыми* Ax*,* By *и* z*.*

Доказательство. Сформулированное утверждение — это теорема 2.1 из [3]. □

Предложение E. *Пусть* $S = \{p, q\}$, p *и* q — *простые числа, такие что* $2 \leqslant p, q \leqslant 13$. *Если* A, B, x, y, n — *натуральные числа, причём* A, B — S*-единицы,* $A < B$, $n \geqslant 3$, *то единственными решениями уравнения* (3) *будут решения с*

$$n \geqslant 3, \quad A \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}, \quad x = y = 1,$$

и

$$\begin{aligned} n = 3, &\quad (A, x) = (1,2), (1,3), (1,4), (1,9), (1,19), (1,23), (3,2), (5,11), \\ n = 4, &\quad (A, x) = (1,2), (1,3), (1,5), (3,2), \\ n = 5, &\quad (A, x) = (1,2), (1,3), \\ n = 6, &\quad (A, x) = (1,2). \end{aligned}$$

Доказательство. Сформулированное утверждение — это теорема 1.1 из [3]. □

Предложение F. *Предположим, что* $A = 2^\alpha$, $B = q^\beta$, *где* q — *простое число из интервала* $3 \leqslant q < 30$. *Тогда все решения уравнения* (3) *в целых числах* x, y, α, β *с* $x, y > 0$, $\alpha, \beta \geqslant 0$ *и* $n \geqslant 3$ *перечислены в следующей таблице.*

q	(α, β)	n	(x, y)
произвольное	$(1,0)$	произвольное	$(1,1)$
3	$(1,1)$	произвольное	$(1,1)$
3	$(2,1)$	произвольное	$(1,1)$
3	$(3,2)$	произвольное	$(1,1)$
3	$(0,2)$	3	$(2,1)$
5	$(2,1)$	произвольное	$(1,1)$
5	$(0,1)$	4	$(3,2)$
7	$(3,1)$	произвольное	$(1,1)$
7	$(0,1)$	3	$(2,1)$
17	$(4,1)$	произвольное	$(1,1)$
17	$(0,1)$	3	$(18,7)$
17	$(1,1)$	3	$(2,1)$
17	$(0,1)$	4	$(2,1)$
19	$(0,1)$	3	$(8,3)$

Доказательство. Сформулированное утверждение является частным случаем теоремы 1 из [6]. □

Предложение G. *Предположим, что* $A = p^\alpha$, $B = q^\beta$, *где* p, q — *простые числа, удовлетворяющие неравенствам* $3 \leqslant p < q < 30$. *Тогда все решения уравнения* (3) *в целых числах* x, y, α, β, *удовлетворяющих неравенствам* $x, y > 0$, $\alpha, \beta \geqslant 0$ *и* $n \geqslant 3$, *приведены в следующей таблице.*

$p,\ q$	(α,β)	n	(x,y)
$p=3,\ 5\leqslant q<30$	$(2,0)$	3	$(1,2)$
$p=5,\ 7\leqslant q<30$	$(1,0)$	4	$(2,3)$
$p=3,\ q=5$	$(0,1)$	4	$(3,2)$
$p=7,\ 11\leqslant q<30$	$(1,0)$	3	$(1,2)$
$p=3,5,\ q=7$	$(0,1)$	3	$(2,1)$
$p=17,\ 19\leqslant q<30$	$(1,0)$	3	$(7,18)$
$3\leqslant p\leqslant 13,\ q=17$	$(0,1)$	3	$(18,7)$
$p=17,\ 19\leqslant q<30$	$(1,0)$	4	$(1,2)$
$3\leqslant p\leqslant 13,\ q=17$	$(0,1)$	4	$(2,1)$
$p=19,\ 23\leqslant q<30$	$(1,0)$	3	$(3,8)$
$3\leqslant p\leqslant 17,\ q=19$	$(0,1)$	3	$(8,3)$
$p=3,\ q=5$	$(1,2)$	3	$(2,1)$
$p=3,\ q=7$	$(1,2)$	4	$(2,1)$
$p=5,\ q=13$	$(1,1)$	3	$(11,8)$
$p=3,\ q=17$	$(2,2)$	5	$(2,1)$
$p=5,\ q=17$	$(1,1)$	3	$(3,2)$
$p=11,\ q=19$	$(1,1)$	3	$(6,5)$
$p=3,\ q=23$	$(1,1)$	3	$(2,1)$

Доказательство. Сформулированное утверждение является частным случаем теоремы 2 из [6]. □

6. Доказательства

В доказательствах мы будем использовать предложения A—G. Мы также модифицируем некоторые рассуждения из наших работ [3,15]. Сначала докажем теоремы 3—5. В каждом случае нас интересуют нетривиальные решения, для которых выполнено $|xy|>1$.

Доказательство теоремы 3. Согласно предложению B можно считать, что $q=n=13$ или $q\in\{17,19,23,29\}$. Предположим, что для некоторого простого $n>11$ и для некоторых рассматриваемых A, B уравнение (6) имеет нетривиальное решение (x,y,z) со взаимно простыми Ax, By, z. Если $AB=2^\alpha q^\beta$ и $\beta=0$, то из результатов работ [7,19,24] следует, что нетривиальных решений нет. Стало быть, мы можем предположить, что $\beta>0$. Согласно предложению A существует форма f уровня $N=2^\gamma q$ с $\gamma\in\{0,1,3,5\}$. Используя обозначения предложения A для $m=n$, положим

$$A_{r,n}:=\mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}\big(c_r-(r+1)\big)\,\mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}\big(c_r+(r+1)\big)\prod_{a_r\in S_{r,n}}\mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_r-a_r),\qquad(8)$$

где r — простое число, которое взаимно просто с $2nq$. Заметим, что величина $A_{r,n}$ не зависит от n и что индекс n в $A_{r,n}$ используется только для того, чтобы отметить, что мы имеем дело со случаем $m = n$. Согласно предложению А число n должно быть делителем произведения из (8). Используя пакет программ «MAGMA», мы получили таблицу 1, в которой представлены общие простые делители ненулевых значений величин $A_{3,n}$, $A_{5,n}$ и $A_{7,n}$ для каждого рассматриваемого уровня.

Таблица 1

$q/2^\gamma$	1	2	8	32
13	форм нет	3, 5, 7	2, 3, 5	2, 3, 5
17	—	2, 3	2, 3, 5	2, 3, 5
19	2	3, 5	2, 3, 5	2, 3, 5, 7
23	5, 11	2, 3, 5	2, 3, 5	2, 3, 7
29	7	3, 5	2, 3, 5, 7	2, 3, 5

Таблица 1 показывает, что $n \leqslant 11$, за исключением значения уровня $N = 17$, когда $q = 17$ и когда в уравнении (1) имеет место $AB = 2^\alpha 17^\beta$ с $\alpha = 4$. В этом исключительном случае легко показать, что произведение xy должно быть нечётным. Действительно, так же, как в [3], мы получаем, что в случае чётного xy наше уравнение приводится к случаю кондуктора, равного 34. Остаётся воспользоваться тем фактом, что эллиптические кривые над $\mathbb{Q}$ с кондуктором 34 не имеют полного 2-рационального кручения. Это завершает доказательство теоремы 3. □

Доказательство теоремы 4. Предположим, что для простого $n > 11$ и для некоторых A, B, имеющих рассматриваемые свойства, уравнение (6) обладает нетривиальным решением. Согласно теореме 3 можно предположить, что в выражении $AB = p^\alpha q^\beta$ и α, β положительны. Снова применим предложение А с $m = n$. В предположениях теоремы 4 уровень N соответствующих модулярных форм есть $2pq$. В таблице 2 мы перечисляем общие простые делители (ОПД) величин $A_{r,n}$ для малых простых значений r, взаимно простых с pq.

Согласно предложению А число n должно быть делителем $A_{r,n}$ для каждого рассматриваемого значения r. Однако, как видно из таблицы 2, это невозможно, поскольку $n > 11$, за исключением случаев $(p, q, n) = (11, 23, 17)$ и $(p, q, n) = (19, 23, 31)$.

В случаях $(p, q, n) = (11, 23, 17)$ и $(19, 23, 31)$ мы можем проверить, что 17 и 31 не делят наибольший простой делитель для $A_{3,n}$, $A_{5,n}$, $A_{7,n}$, $A_{13,n}$ и $A_{3,n}$, $A_{5,n}$, $A_{7,n}$, $A_{11,n}$, $A_{13,n}$ для любой формы уровня $2 \cdot 11 \cdot 23$ и $2 \cdot 19 \cdot 23$ соответственно. Следовательно, за исключением случаев, перечисленных в теореме 4, уравнение (6) не имеет нетривиальных решений. □

Таблица 2

(p,q)	r	ОПД	(p,q)	r	ОПД
$(5,11)$	3, 7	2, 3, 5	$(11,23)$	3, 5, 7	3, 5, 7, 11, 17
$(5,17)$	3, 7	2, 3, 5	$(11,29)$	3, 5, 7	2, 3, 5, 7
$(5,19)$	3, 7	2, 3, 5	$(13,23)$	3, 5, 7	2, 3, 5, 7, 11
$(5,23)$	3, 7, 11	2, 3, 5, 7, 11	$(13,29)$	3, 5, 7	2, 3, 5, 7
$(5,29)$	3, 7, 11	2, 3, 5, 7	$(17,19)$	3, 5, 7	2, 3, 5, 7, 11
$(7,19)$	3, 11	2, 3, 5, 7	$(17,29)$	3, 5, 7	2, 3, 5, 7
$(7,29)$	3, 5, 11	2, 3, 5, 7, 11	$(19,23)$	3, 5, 7	2, 3, 5, 7, 11, 31
$(11,13)$	3, 7	2, 3, 5	$(19,29)$	3, 5, 7	2, 3, 5, 7, 13
$(11,17)$	3, 5, 7	2, 3, 5, 7	$(23,29)$	3, 5, 7	2, 3, 5, 7, 11
$(11,19)$	3, 5, 7	2, 3, 5, 7			

Доказательство теоремы 5. Предположим, что для некоторых рассматриваемых значений n, A, B уравнение (7) имеет нетривиальное решение (x,y,z) с чётным xy. Так как $n>11$, то предложение D доказывает нашу теорему при $p,q\leqslant 13$, за исключением случая $q=n=13$. Мы снова используем предложение A, но теперь с $m=3$. Сначала рассмотрим случай, когда в выражении $AB=p^\alpha q^\beta$ либо $p=3$, $\alpha>0$, $q\in\{13,17,19,23,29\}$, либо $\alpha=0$, $q\geqslant 13$. Этим также покрывается случай $\beta=0$, $p\geqslant 13$. Мы должны рассматривать модулярные формы f уровня $3^\gamma q$ с $\gamma\in\{0,1,2,3,4\}$. В обозначениях предложения A положим

$$B_{r,3}:=\operatorname{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}\bigl(c_r-(r+1)\bigr)\operatorname{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}\bigl(c_r+(r+1)\bigr).$$

В таблице 3 приведены простые общие делители $B_{2,3}$, $A_{5,3}$, $A_{7,3}$. Достаточно рассмотреть формы, не являющиеся рациональными. Иначе из того, что произведение xy чётно, и оценки Хассе—Вейля следовало бы неравенство $n\leqslant 2\sqrt{2}+3$. Заметим, что все модулярные формы уровней $N=17,19,3\cdot 19$ одномерны. А поскольку xy чётно, то вместо произведения

$$A_{2,3}=\operatorname{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_2-3)\operatorname{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_2)\operatorname{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_2+3)$$

достаточно рассмотреть $B_{2,3}$.

Учитывая предложение A заключаем, что в предположениях теоремы 5 в случаях, рассмотренных выше, уравнение (7) не имеет нетривиальных решений, за возможным исключением случаев

$$(p,q,n)\in\{(3,13,19),\ (3,17,23),\ (3,23,19)\}.$$

Первый исключительный случай невозможен по предложению D. Остальные два случая мы исключим позже.

Таблица 3

$q/3^\gamma$	1	3	9	27	81
13	форм нет	2, 7	2, 3, 7	3, 5, 11, 19	2, 3, 5, 11
17	—	2	2, 3, 5	2, 3, 5, 11	2, 3, 5, 11, 23
19	—	—	2, 3, 5	2, 3, 5	2, 3, 5
23	5, 11	2	2, 5, 7, 11	2, 3, 5, 7, 11	2, 3, 7, 13, 19
29	2, 7	2, 5, 11	2, 5, 7, 11	2, 3, 5, 7	2, 3, 5, 11

В оставшихся случаях в выражении $AB = p^\alpha q^\beta$ мы имеем $p \geqslant 5$ и $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Нужно рассмотреть только пары (p, q), не рассмотренные в предложении D. Для каждой такой пары (p, q) мы снова применяем предложение A с $m = 3$ и программу «MAGMA». В таблице 4 собраны все общие простые делители для $B_{2,3}$ и $A_{r,3}$ для малых простых значений r. Соответствующие уровни — $N = 3pq, 9pq, 27pq$.

Таблица 4

(p,q)	r	$3pq$	$9pq$	$27pq$
$(5,17)$	7, 11	2, 3, 7	2, 3, 5, 7, 11	3, 5, 7, 11
$(5,19)$	7, 11	2, 3, 7	2, 3, 5, 7	2, 3, 5, 7, 11, 13
$(5,23)$	7, 11	2, 3, 5, 7, 11	2, 3, 5, 7, 11	2, 3, 5, 7, 11, 23
$(5,29)$	7, 11	2, 3, 5, 7	2, 3, 5, 7, 11, 13	2, 3, 5, 7, 23
$(7,17)$	5, 11	2, 7, 17	2, 3, 5, 7, 17	2, 3, 5, 19
$(7,19)$	5, 11	2, 3, 5	2, 3, 5	2, 3, 5, 13
$(7,23)$	5, 11	2, 5, 11	2, 3, 5, 7, 11	2, 3, 5, 7
$(7,29)$	5, 11	2, 5, 7	2, 3, 5, 7	2, 3, 5, 7, 11
$(11,13)$	5, 7	2, 5, 7, 13	2, 3, 5, 7, 13	2, 3, 5, 7
$(11,17)$	5, 7	2, 3, 5, 11	2, 3, 5, 11	2, 3, 5, 23
$(11,19)$	5, 7, 13	2, 3, 5, 7, 11, 31	2, 3, 5, 7, 11, 13, 31	2, 3, 5, 7, 13
$(13,17)$	5, 11	2	2, 3, 5, 7	3, 5, 7, 17
$(13,19)$	5, 11	2, 3, 5, 7, 11	2, 3, 5, 7, 11, 17	2, 3, 5, 7, 13
$(17,23)$	5, 11	2, 3, 5, 11	2, 3, 5, 11	2, 3, 7

Предложение A обеспечивает, что уравнение (7) не имеет решений для тех троек (p, q, n), для которых n не встречается в таблице 4 в качестве общего простого делителя. Как видно из таблиц 3 и 4, имеется 18 троек (p, q, n), для которых $n > 11$. Тройка $(3, 13, 19)$ уже была исключена выше. Из оставшихся троек 14 были перечислены в теореме 5 как исключения. Для оставшихся троек

$$(p, q, n) \in \{(3, 17, 23),\ (3, 23, 19),\ (13, 19, 17)\}$$

мы можем использовать более сильное решето. Посчитав наибольший общий простой делитель для $B_{2,3}$, $A_{5,3}$, $A_{7,3}$, $A_{11,3}$, мы можем исключить соответствующие значения n. Это доказывает теорему 5. □

Доказательство теоремы 1. Для того чтобы доказать нашу теорему, достаточно решить уравнение (3) для $n = 4$ и для нечётных простых n. Из вида полученных решений станет ясно, что не существует решений для других значений $n \geqslant 3$.

В условиях нашей теоремы предложения F и G дают все решения уравнения (3) для $1 < A < B$. Предложение E находит все решения для $q \leqslant 13$. Следовательно, можно предположить, что $A = 1$ и $q \geqslant 17$. В случае $A = 1$, $x = y = 1$ имеются только тривиальные решения. Поэтому можно предположить, что $xy > 1$. Наконец, применяя теоремы 3—5 к уравнению (3) при $z = \pm 1$, мы получаем все решения, кроме тех, которые являются решениями следующих уравнений:

$$x^n - 16 \cdot 17^\beta y^n = \pm 1, \quad n > 11 \text{ простое}, \tag{9}$$

$$x^n - p^\alpha q^\beta y^n = \pm 1, \qquad (p, q, n) \in \{(19, 29, 13), (3, 23, 13), (7, 17, 17), (7, 17, 19), (13, 17, 17), (13, 19, 13)\}, \tag{10}$$

$$x^n - p^\alpha q^\beta y^n = \pm 1, \qquad 2 \leqslant p < q, \quad 17 \leqslant q < 30, \quad n \in \{3, 4, 5, 7, 11\}. \tag{11}$$

Для решения уравнения (9) мы применяем метод, развитый в [3]. Предположим, что (9) имеет нетривиальное решение x, y с $xy > 1$ для некоторого β. Используя оценку Миньотта для линейных форм от трёх логарифмов (см. [18]), мы так же, как при доказательстве предложения 3.5 из [3], выводим, что $n < 10^8$. Применяя предложение C или теорему 4.1 из [3] к уравнению (9), мы заключаем, что либо $n \mid y$, либо

$$(8 \cdot 17^\beta)^{n-1} \equiv 1 \pmod{n^2}, \tag{12}$$

где $1 \leqslant \beta \leqslant n - 1$. Если $n \mid y$, то мы можем применить соображения из первой части доказательства теоремы 4.1 из [3]. Действительно, тот факт, что единственная параболическая форма f веса 2 уровня 17 является одномерной (т. е. $K_f = \mathbb{Q}$), и оценка Хассе—Вейля приводят к противоречию. Остаётся рассмотреть β, n, удовлетворяющие сравнению (12). Так же как и в [3], для каждого простого n из интервала $13 \leqslant n < 10^8$ можно однозначно определить $\beta = \beta(n)$ в (9), которое удовлетворяет (12). При исследовании уравнения (9) мы использовали тот факт, что $17^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n^2}$ для $n = 1093$ и $n = 3511$. Следовательно, имеется $\pi(10^8) - 5$ пар (β, n), которые надо изучить. Если $l = 2kn + 1$ простое для достаточно малого k (по сравнению с n), то естественно ожидать, что из уравнения (9) должно следовать соотношение $l \mid Y$. Если это действительно так, то получается, что соответствующая кривая Фрея имеет мультипликативную редукцию в l. Следовательно, для эллиптической кривой над $\mathbb{Q}$ с кондуктором 17 l-й коэффициент Фурье c_l удовлетворяет соотношению

$$c_l \equiv \pm(l+1) \equiv \pm 2 \pmod{n}. \tag{13}$$

Если k не очень большое, то из оценки Хассе—Вейля следует, что $c_l = \pm 2$.

Мы написали простую программу на языке Pari GP для нахождения для каждой рассматриваемой пары (β, n) простого число l, такого что $l \mid y$, но c_l не удовлетворяет (13). Это заняло всего несколько минут на старом «Sun Sparc». Если, скажем, $n = 10000019$, то $\beta = 5943848$. Тогда выбираем $l = 80000153$ и замечаем, что если l не делит xy, то

$$x^n, y^n \equiv \pm 1,\ \pm 538808,\ \pm 6494373,\ \pm 13435164 \pmod{l}.$$

Следовательно,

$$x^{10000019} - 16 \cdot 17^{5943848} y^{10000019} \not\equiv 1 \pmod{l},$$

если не выполнено $l \mid xy$. Но l-й коэффициент Фурье для эллиптической кривой с кондуктором 17 должен удовлетворять соотношению $c_{80000153} = -9846$, что противоречит (13). Мы показали, что уравнение (9) не имеет решений с $n = 10000019$ и $xy > 1$. Аналогично приходим к такому же заключению для каждого рассматриваемого значения n.

Теперь рассмотрим уравнения (10). Если

$$(p, q, n) \in \{(13, 19, 13),\ (7, 17, 17)\},$$

то мы можем применить теорему 4.2 из [3] к соответствующим уравнениям (10). В результате мы, так же как в [3], придём к выводу, что эти уравнения не имеют нетривиальных решений, за возможным исключением случаев

$$x^{13} - 13^{\alpha} 19^{\beta} y^{13} = \pm 1, \tag{14}$$

где $\alpha = 2, 3$, $1 \leqslant \beta \leqslant 12$ и $13 \nmid y$, и

$$x^{17} - 7^{\alpha} 17^{\beta} y^{17} = \pm 1, \tag{15}$$

где $\beta = 2, 3$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 16$ и $17 \nmid y$.

Используя модулярный подход, мы решаем уравнения (14) и (15) без условия делимости на y. Мы должны снова применить предложение A с $m = n$. Сначала рассмотрим уравнение (14). Легко найти для каждой пары (α, β) некоторое «локализирующее» простое число $p = p(\alpha, \beta)$, такое что $p \mid xy$. Можно проверить, что в каждом случае $p \in \{53, 79\}$. Имеются восемь параболических форм f уровня $2 \cdot 13 \cdot 19$. Используя пакет программ «MAGMA», мы получаем, что

$$13 \nmid \mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_{53}-54)\,\mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_{53}+54)\,\mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_{79}-80)\,\mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_{79}+80)$$

для шести форм f. Для двух оставшихся форм f получаем

$$13 \nmid A_{3,n} = \mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_3 - 4)\,\mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_3)\,\mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}(c_3 + 4).$$

Теперь из предложения A следует, что (14) не имеет решений с $xy > 1$.

Для уравнения (15) соответствующие «локализирующие» простые p, для которых выполнено $p \mid xy$, могут быть выбраны из конечного множества $\{103, 137, 239, 307, 1667\}$. Имеются шесть форм f уровня $N = 2 \cdot 7 \cdot 17$. Если $p = 103, 239, 307$, то для каждой формы f имеем $17 \nmid B_{p,17}$, где в обозначениях предложения A

$$B_{p,n} := \mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}\bigl(c_p - (p+1)\bigr)\,\mathrm{Norm}_{K_f/\mathbb{Q}}\bigl(c_p + (p+1)\bigr).$$

Если $p = 137, 1667$, то рассмотренное выше произведение не делится на 17 для всех форм, кроме двух. Однако для этих двух исключительных форм $17 \nmid A_{3,n}$. Значит, предложение A обеспечивает отсутствие решений с $xy > 1$.

Для оставшихся четырёх уравнений из (10) мы не можем применить теорему 4.2 из [3]. Решим эти уравнения.

1. $x^{17} - 13^{\alpha} 17^{\beta} y^{17} = \pm 1$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 16$.

Имеем девять форм уровня $N = 2 \cdot 13 \cdot 17$. Мы обнаружили, что для «локализирующих» простых

$$p \in \{103, 239, 307, 443, 613, 919, 1021, 1328\}$$

имеет место $17 \nmid B_{p,17}$, или $17 \nmid A_{3,17}$, или $17 \nmid A_{11,17}$ для каждой рассматриваемой формы, где $A_{r,n}$ определены в (8). Значит, предложение A обеспечивает отсутствие решений с $xy > 1$.

2. $x^{13} - 3^{\alpha} 23^{\beta} y^{13} = \pm 1$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 12$.

Мы имеем четыре формы уровня $2 \cdot 3 \cdot 23$. Для этого случая мы нашли «локализирующие» простые

$$p \in \{79, 131, 157, 313, 521, 547, 599\}.$$

Мы не можем использовать 313, 547 и 599, поскольку для этих простых p выполнено $13 \mid B_{p,13}$ и мы не найдём $A_{r,13}$ с $13 \nmid A_{r,13}$. Пары (α, β), соответствующие этим «плохим» простым, — это

$$(\alpha, \beta) = (4, 5), (4, 7), (7, 2), (7, 9), (7, 11).$$

Мы решили соответствующие уравнения с помощью пакета программ «PARI» за разумное время. Для остальных простых p получается, что 13 не делит $B_{p,13}$. Таким образом, мы видим, что наше уравнение может иметь только тривиальные решения.

3. $x^{13} - 19^{\alpha} 29^{\beta} y^{13} = \pm 1$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 12$.

Мы снова применяем тот же самый метод. Имеем 15 форм уровня $N = 2 \cdot 19 \cdot 29$. Для всех пар, кроме пары $(\alpha, \beta) = (11, 7)$, мы используем «локализирующие» простые

$$p \in \{79, 131, 157, 313, 443, 859\}.$$

С помощью «MAGMA» мы проверили, что 13 не делит по крайней мере одно из чисел $B_{p,13}$, $A_{3,13}$, $A_{7,13}$, $A_{11,13}$. Мы не смогли найти «локализирующее» простое для уравнения $x^{13} - 19^{11} 29^{7} y^{13} = \pm 1$. Однако в этом случае снова можно применить «PARI». Для каждой пары (α, β) мы получили, что $y = 0$.

4. $x^{19} - 7^{\alpha}17^{\beta}y^{19} = \pm 1$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 18$.

В этом случае уровень равен $N = 2\cdot 7\cdot 17$ и мы имеем шесть форм этого уровня. Мы не смогли найти «локализирующее» простое для пары $(\alpha, \beta) = (2, 10)$. Для всех пар, кроме пары $(\alpha, \beta) = (9, 9)$, мы можем применить тот же метод, что и в предыдущих случаях, с «локализирующими»

$$p \in \{191, 419, 457, 571, 647, 761, 1217, 2053, 2129\}.$$

Нами было проверено, что 19 не делит по крайней мере одно из чисел $B_{p,19}$ и $A_{3,19}$. Для оставшихся пар $(\alpha, \beta) = (2, 10)$ и $(\alpha, \beta) = (9, 9)$ два исключительных диофантовых уравнения снова решаются с помощью «PARI». Снова получаем, что для всех рассматриваемых пар (α, β) наше уравнение имеет только тривиальные решения.

Наконец, длительные непосредственные вычисления с помощью «PARI» показали, что уравнения (11) имеют только тривиальные решения

$$8^3 - 19 \cdot 3^3 = -1 \quad \text{и} \quad 18^3 - 17 \cdot 7^3 = 1.$$

Наше уравнение (3) теперь решено для $n = 4$ и для простых нечётных n. Получившиеся решения как раз и перечислены в теореме. Зная эти решения, легко проверить, что для других значений n решений нет. Доказательство теоремы 1 завершено. □

Литература

[1] Bennett M. A. Recipes for ternary diophantine equations of signature (p, p, k) // Proc. RIMS Kokyuroku. — 2003. — Vol. 1319. — P. 51—55.

[2] Bennett M. A. Products of consecutive integers // Bull. London Math. Soc. — 2004. — Vol. 36. — P. 683—694.

[3] Bennett M. A., Győry K., Mignotte M., Pintér Á. Binomial Thue equations and polynomial powers // Compositio Math. — 2006. — Vol. 142. — P. 1103—1121.

[4] Bennett M. A., Vatsal V., Yazdani S. Ternary Diophantine equations of signature $(p, p, 3)$ // Compositio Math. — 2004. — Vol. 140. — P. 1399—1416.

[5] Bugeaud Y., Győry K. On binomial Thue–Mahler equations // Period. Math. Hungar. — 2004. — Vol. 49. — P. 25—34.

[6] Bugeaud Y., Mignotte M., Siksek S. A multi-Frey approach to some multi-parameter families of Diophantine equations // Can. J. Math. — 2008. — Vol. 60, no. 3. — P. 491—519.

[7] Darmon H., Merel L. Winding quotient and some variants of Fermat's last theorem // J. Reine Angew. Math. — 1997. — Vol. 490. — P. 81—100.

[8] Evertse J. H., Győry K., Stewart C. L., Tijdeman R. S-unit equations and their applications // New Advances in Transcendence Theory / A. Baker, ed. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. — P. 110—174

[9] Győry K. Über die diophantische Gleichung $x^p + y^p = cz^p$ // Publ. Math. Debrecen. — 1966. — Vol. 13. — P. 301—305.

[10] Győry K. On the number of solutions of linear equations in units of an algebraic number field // Comment. Math. Helv. — 1979. — Vol. 54. — P. 583—600.

[11] Győry K. Some recent applications of S-unit equations // Astérisque. — 1992. — Vol. 209. — P. 17—38.

[12] Győry K. Applications of unit equations // Analytic Number Theory. — Kyoto, 1996. — P. 62—78.

[13] Győry K., Yu K. Bounds for the solutions of S-unit equations and decomposable form equations // Acta Arith. — 2006. — Vol. 123. — P. 9—41.

[14] Győry K., Pink I., Pintér Á. Power values of polynomials and binomial Thue–Mahler equations // Publ. Math. Debrecen. — 2004. — Vol. 65. — P. 341—362.

[15] Győry K., Pintér Á. On the resolution of equations $Ax^n - By^n = C$ in integers x, y and $n \geqslant 3$. I // Publ. Math. Debrecen — 2007. — Vol. 70. — P. 483—501.

[16] Halberstadt E., Kraus A. Courbes de Fermat: résultats et problémes // J. Reine Angew. Math. — 2002. — Vol. 548. — P. 167—234.

[17] Kraus A. Majorations effectives pour l'équation de Fermat généreliso // Can. J. Math. — 1997. — Vol. 49. — P. 1139—1161.

[18] Mignotte M. A kit of linear forms of three logarithms // Publ. Ins. Rech. Math. Av. (Strasbourg). — To appear.

[19] Ribet K. On the equation $a^p + 2^\alpha b^p + c^p = 0$ // Acta Arith. — 1997. — Vol. 79. — P. 7—16.

[20] Serre J. P. Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ // Duke Math. J. — 1987. — Vol. 54. — P. 179—230.

[21] Shorey T. N., Tijdeman R. Exponential Diophantine Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.

[22] Siksek S. The modular approach to Diophantine equations // Cohen H. Number Theory. Vol. II. Analytic and Modern Tools. — Berlin: Springer, 2007. — (Grad. Texts Math.; Vol. 240). — P. 1107—1138.

[23] Sprindzuk V. G. Classical Diophantine Equations. — Berlin: Springer, 1993. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1559).

[24] Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem // Ann. Math. — 1995. — Vol. 141. — P. 443—551.