

О неоднородных диофантовых приближениях и размерности Хаусдорфа

М. ЛОРАН

Математический институт Люмини, Франция
e-mail: laurent@iml.univ-mrs.fr

УДК 511.72

Ключевые слова: неоднородные диофантовы приближения, принцип переноса, диофантовы показатели, наилучшие приближения.

Аннотация

Пусть $\Gamma = \mathbf{Z}A + \mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$ — всюду плотная в $\mathbf{R}^n$ подгруппа ранга $n + 1$, и пусть $\hat{\omega}(A)$ представляет собой показатель для равномерных совместных диофантовых приближений для порождающей точки A . Мы показываем, что для произвольного вещественного числа $v \geq \hat{\omega}(A)$ размерность Хаусдорфа множества $\mathcal{B}_v$ точек пространства $\mathbf{R}^n$, являющихся v -приближаемыми по отношению к Γ , равна $1/v$.

Abstract

M. Laurent, On inhomogeneous Diophantine approximation and Hausdorff dimension, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 93—101.

Let $\Gamma = \mathbf{Z}A + \mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$ be a dense subgroup of rank $n + 1$ and let $\hat{\omega}(A)$ denote the exponent of uniform simultaneous rational approximation to the generating point A . For any real number $v \geq \hat{\omega}(A)$, the Hausdorff dimension of the set $\mathcal{B}_v$ of points in $\mathbf{R}^n$ that are v -approximable with respect to Γ is shown to be equal to $1/v$.

1. Неоднородные приближения

Вначале мы обсудим вопросы, связанные с понятием неоднородного приближения, следуя традиционному подходу, описанному в [8], и используя необходимые нам понятия показателей приближений из работы [6].

Пусть m и n — положительные целые и A — $(n \times m)$ -матрица с вещественными элементами. Транспонированную матрицу для A будем обозначать через tA . Рассмотрим подгруппу

$$\Gamma = AZ^m + \mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n,$$

порождённую по модулю решётки $\mathbf{Z}^n$ m столбцами матрицы A , и её дуальную подгруппу

$$\Gamma' = {}^tAZ^n + \mathbf{Z}^m \subset \mathbf{R}^m,$$

порождённую по модулю решётки $\mathbf{Z}^m$ n строками матрицы A . Иначе говоря, Γ можно интерпретировать как подгруппу классов эквивалентностей по модулю $\mathbf{Z}^n$, лежащих в n -мерном торе $\mathbf{T}^n = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n$. Теорема Кронекера утверждает,

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 93—101.

© 2010 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

что подгруппа Γ всюду плотна в $\mathbf{R}^n$, если и только если ранг дуальной группы Γ' над $\mathbf{Z}$ максимален и равен $m+n$. Всюду далее будем считать, что $\text{rk}_{\mathbf{Z}} \Gamma' = m+n$.

Чтобы измерять, насколько точно можно приближать заданную точку β из $\mathbf{R}^n$ элементами из Γ , мы определим показатель $\omega(A, \beta)$. Для каждой точки θ из $\mathbf{R}^n$ определим $|\theta|$ как супремум-норму θ и через $\|\theta\| = \min_{x \in \mathbf{Z}^n} |\theta - x|$ обозначим расстояние на $\mathbf{T}^n$ между $\theta \bmod \mathbf{Z}^n$ и 0.

Определение 1. Для каждого $\beta \in \mathbf{R}^n$ определим величину $\omega(A, \beta)$ как супремум (возможно, равный бесконечности) множества всех вещественных чисел ω , для которых существует бесконечно много таких целых точек $q \in \mathbf{Z}^m$, что

$$\|Aq - \beta\| \leq |q|^{-\omega}.$$

Из определения ясно, что $\omega(A, \beta) \geq 0$.

Теперь в связи с линейной независимостью столбцов матрицы A для произвольной вещественной матрицы M мы определим *равномерный* однородный показатель следующим образом.

Определение 2. Пусть M — матрица размера $m \times n$ с вещественными элементами. Обозначим через $\hat{\omega}(M)$ супремум (возможно, равный бесконечности) множества таких вещественных чисел ω , что для любого достаточно большого положительного вещественного Q найдётся ненулевая целая точка $q \in \mathbf{Z}^n$, для которой

$$|q| \leq Q, \quad \|Mq\| \leq Q^{-\omega}.$$

Принцип Дирихле мгновенно обеспечивает неравенство $\hat{\omega}(M) \geq n/m$. Теперь мы можем сформулировать классическое утверждение о взаимосвязи между однородными и неоднородными приближениями в терминах определённых выше показателей.

Теорема 1 [6]. Для любого набора β из n вещественных чисел выполнена следующая оценка снизу:

$$\omega(A, \beta) \geq \frac{1}{\hat{\omega}({}^t A)}. \quad (1)$$

Более того, неравенство (1) становится равенством для почти всех β для меры Лебега в $\mathbf{R}^n$.

Теперь мы подошли к нашему основному вопросу, состоящему в изучении семейств множеств

$$\mathcal{B}_v = \{\beta \in \mathbf{R}^n; \omega(A, \beta) \geq v\} \subseteq \mathbf{R}^n$$

при $v \geq 0$ и их размерности Хаусдорфа $\delta(v)$ как функции от v . Из теоремы 1 немедленно следует, что $\mathcal{B}_v = \mathbf{R}^n$, если $v \leq 1/\hat{\omega}({}^t A)$, в то время как $\mathcal{B}_v$ является множеством нулевой меры, если $v > 1/\hat{\omega}({}^t A)$. Более того, мы знаем, что эти множества достаточно малы, как показывает следующий грубый результат, сформулированный в [6] как предложение 7.

Теорема 2. Для любого вещественного числа $v > 1/\hat{\omega}({}^t A)$ размерность Хаусдорфа $\delta(v)$ строго меньше n .

Вообще говоря, доказательство предложения 7 из [6] даёт верхнюю границу вида

$$\delta(v) \leq n - 1 + \frac{1}{1 + (v\hat{\omega}({}^tA) - 1)/(1 + v)}. \quad (2)$$

С другой стороны, простое применение леммы Хаусдорфа—Кантелли (см. [2, 4]) обеспечивает следующий результат.

Теорема 3. Для любого $v > 0$ выполнено

$$\delta(v) \leq \min\left(n, \frac{m}{v}\right). \quad (3)$$

Для доказательства неравенства (3) мы сошлёмся на [5, теорема 5]. Отметим, что оценка (2) будет точнее, чем (3), когда v принадлежит интервалу $[1/\hat{\omega}({}^tA), m/n]$, в то время как верхняя граница (3) предположительно обращается в равенство для достаточно больших значений v . Для $m = n = 1$ независимо в [3] и [1] было доказано, что $\delta(v) = \min(1, 1/v)$, так что в этом случае неравенство (3) действительно обращается в равенство для всех $v > 0$. Однако примеры из теоремы 1 из [5] при $(m, n) = (2, 1)$ или $(m, n) = (3, 1)$ показывают, что в (3) может иметь место строгое неравенство для любого заданного $v > 1$. В связи с теоремой 5 из следующего раздела мы сформулируем следующую задачу.

Задача. Предположим, что величина $\hat{\omega}(A)$ конечна. Показать, что $\delta(v) = m/v$ для всех достаточно больших относительно $\hat{\omega}(A)$ значений v .

Отметим, что $\hat{\omega}(A) \geq m/n$. Кажется правдоподобным, что неравенство $v \geq \hat{\omega}(A)$ всегда будет достаточным для выполнения соотношения $\delta(v) = m/v$. Для $m = 1$ это действительно верно, что и утверждается в теореме 5. Отметим также, что нижняя граница $v \geq \hat{\omega}(A)$ естественным образом получается путём построения множества канторовского типа $\mathcal{K}$ (см. раздел 4).

2. Совместные приближения

О хаусдорфовой размерности $\delta(v)$ мы знаем значительно больше при $m = 1$, т. е. когда подгруппа

$$\Gamma = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \mathbf{Z}^n$$

порождена одним вектором, кратные которого наматываются на тор $\mathbf{T}^n$, благодаря замечательному результату из [5], полученному Я. Бюжо и Н. Шеваллье. В свете сформулированной в предыдущем пункте задачи мы сначала сформулируем теорему 3 из [5] следующим образом.

Теорема 4. Пусть $A = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — вещественная $(n \times 1)$ -матрица и $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbf{Q}$. Тогда $\delta(v) = 1/v$ для любого $v \geq 1$.

Теперь мы сформулируем наш основной результат.

Теорема 5. Пусть $A = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — вещественная $(n \times 1)$ -матрица и $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbf{Q}$. Тогда равенство $\delta(v) = 1/v$ выполнено для всех $v \geq \hat{\omega}(A)$.

Отметим, что теорема 5 усиливает предыдущее утверждение, поскольку

$$\frac{1}{n} \leq \hat{\omega}(A) \leq 1.$$

Нижняя оценка $\hat{\omega}(A) \geq 1/n$ немедленно следует из принципа Дирихле, а верхняя оценка $\hat{\omega}(A) \leq 1$ в неявном виде содержится в основополагающей работе А. Я. Хинчина [11]. Предполагается, что любое промежуточное значение будет достигаться для некоторой $(n \times 1)$ -матрицы A . Мы сошлёмся на работы [6, 7], где можно найти более точную информацию по затронутому вопросу.

Из теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие. Предположим, что $\hat{\omega}(A) = 1/n$. Тогда

$$\delta(v) = \min \left(n, \frac{1}{v} \right)$$

для любого $v > 0$.

Это утверждение впервые было получено в [5] при более сильном предположении, что матрица A является *регулярной* матрицей (в терминологии [8]), что означает существование такого положительного вещественного числа ε , что для всех достаточно больших значений Q выполняется оценка снизу

$$\min_{\substack{q \in \mathbf{Z} \\ 0 < q \leq Q}} \|qA\| \geq \varepsilon Q^{-1/n}.$$

Доказательство теоремы 5 основано на применении принципа распределения масс [4, 10]. Этот метод позволяет получать оценки снизу для меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^f(\mathcal{B}_v)$ множеств $\mathcal{B}_v$ при подходящем выборе функции размерности f . Оказывается, что $\mathcal{H}^f(\mathcal{B}_v) = +\infty$, когда $f(r) = r^{1/v} \log(r^{-1})$ и $v > \hat{\omega}(A)$, в чём можно легко убедиться, немного модифицируя доказательство, приведённое в разделе 4. Поскольку $v \mapsto 1/v$ — убывающая функция, стандартные соображения теории мер Хаусдорфа (см. [2, с. 71]) показывают, что хаусдорфова размерность меньшего подмножества

$$\mathcal{B}'_v = \{\beta \in \mathbf{R}^n; \omega(A, \beta) = v\} \subseteq \mathbf{R}^n$$

совпадает с хаусдорфовой размерностью $\delta(v) = 1/v$ множества $\mathcal{B}_v$ при условии $v > \hat{\omega}(A)$. Отсюда следует, что для фиксированной A множество значений показателя $\omega(A, \beta)$ замечает весь интервал $]\hat{\omega}(A), +\infty[$, когда β пробегает всё $\mathbf{R}^n$.

3. Наилучшие приближения

Мы перечислим здесь некоторые свойства *наилучших приближений* для A , которые необходимы для доказательства теоремы 5. Их подробные доказательства можно найти в [5, раздел 5] и в [9]. В настоящем разделе под матрицей A везде подразумевается матрица размера $n \times 1$.

Наилучшее приближение для A — это такое положительное целое q , для которого выполнено $\|pA\| > \|qA\|$ для всех целых p , $0 < p < q$. Пусть $(q_k)_{k \geq 0}$ — упорядоченная по возрастанию последовательность этих наилучших приближений, начинающаяся с $q_0 = 1$. Положим

$$\rho_k = \min_{0 < q < q_k} \|qA\| = \|q_{k-1}A\|.$$

Сразу заметим, что величина $\hat{\omega}(A)$ равняется нижнему пределу отношения $\log(\rho_k^{-1})/\log q_k$ при $k \rightarrow +\infty$. Следовательно, для любого заданного числа v , большего $\hat{\omega}(A)$, неравенство

$$\|q_{k-1}A\| \geq 4q_k^{-v} \quad (4)$$

выполнено для бесконечно многих значений k .

Ключевым моментом является то, что для достаточно больших k множество

$$\Gamma_k = \{qA + \mathbf{Z}^n; 0 \leq q < q_k\},$$

рассматриваемое как подмножество $\mathbf{T}^n$, близко к конечной группе Λ_k , которая хорошо распределена на торе. Пусть P_k — ближайшая целая точка к $q_k A$. Положим

$$\Lambda_k = \left\{ q \frac{P_k}{q_k} + \mathbf{Z}^n; 0 \leq q < q_k \right\} = \left\{ q \frac{P_k}{q_k} + \mathbf{Z}^n; q \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Ясно, что Λ_k является решёткой в $\mathbf{R}^n$ с определителем q_k^{-1} . Пусть $\lambda_{1,k} \leq \dots \leq \lambda_{n,k}$ — последовательные минимумы решётки Λ_k относительно единичного шара $|x| \leq 1$.

Лемма 1. Для любого целого k и любого шара $B(x, r) \subset \mathbf{R}^n$ с центром в точке x радиуса r имеется следующая оценка сверху*. Если $r \leq \lambda_{i,k}$ для некоторого $i \leq n$, то

$$\text{Card}(\Gamma_k \cap B(x, r)) \ll \prod_{j=1}^{i-1} \frac{r}{\lambda_{j,k}} \ll \left(q_k \prod_{j=i}^n \lambda_{j,k} \right) r^{i-1}$$

(считаем, что пустое произведение равно 1, если $i = 1$). Если $r \geq \lambda_{n,k}$, то

$$\text{Card}(\Gamma_k \cap B(x, r)) \ll q_k r^n.$$

Более того, $\rho_k \asymp \lambda_{1,k}$ и последний минимум $\lambda_{n,k}$ стремится к 0, когда k стремится к бесконечности.

*Здесь константы зависят только от n . Шар $B(x, r)$ представляет собой гиперкуб $|y - x| \leq r$, $y \in \mathbf{R}^n$.

Доказательство. Сначала мы докажем требуемые неравенства для $x = 0$ с заменой Γ_k на Λ_k . Для этого с помощью LLL-алгоритма мы найдём *приведённый* базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ решётки Λ_k ; приведённость означает, что $|e_i| \asymp \lambda_{i,k}$ для $1 \leq i \leq n$ и $|\sum x_i e_i| \asymp \max |x_i e_i|$. Требуемые оценки легко получаются для $\text{Card}(\Lambda_k \cap B(0, r))$, если применить теорему Минковского о последовательных минимумах:

$$\prod_{j=1}^n \lambda_{j,k} \asymp \det \Lambda_k = q_k^{-1}.$$

Более подробные рассуждения можно найти в [5]. Далее, те же самые неравенства выполняются и для любой точки $x \in \mathbf{R}^n$, поскольку Λ_k является группой. Наконец, чтобы заменить Λ_k на Γ_k , заметим, что расстояние между точками qA и qP_k/q_k меньше, чем $\rho_{k+1} < \rho_k \ll \lambda_{1,k}$ для всех целых q , таких что $0 \leq q < q_k$.

Относительно утверждений, касающихся $\lambda_{1,k}$ и $\lambda_{n,k}$, мы сошлёмся на [5, раздел 5]. $\square$

4. Доказательство теоремы 5 и её следствия

Сначала мы выведем следствие из теоремы 5. Неравенства переноса между равномерными показателями, полученные А. Апфельбеком и В. Ярником (см., например, [6, формула (6)]), позволяют установить, что равенство $\hat{\omega}(A) = 1/n$ имеет место, если и только если $\hat{\omega}^t(A) = n$. Тогда из теоремы 1 следует, что $\mathcal{B}_v = \mathbf{R}^n$, если $v \leq 1/n$, так что $\delta(v) = n$ для всех v из интервала $[0, 1/n]$. С другой стороны, теорема 5 даёт, что $\delta(v) = 1/v$ для $v \geq 1/n$. Таким образом, формула

$$\delta(v) = \min \left(n, \frac{1}{v} \right)$$

верна для любого положительного вещественного числа v .

Для доказательства теоремы 5 заметим, что размерность $\delta(v)$ является невозрастающей функцией параметра v и $\delta(v) \leq 1/v$ по теореме 3. Следовательно, достаточно установить нижнюю границу $\delta(v) \geq 1/v$ для каждого $v > \hat{\omega}(A)$. Мы будем придерживаться рассуждений работы [5].

Пусть v и s — такие положительные вещественные числа, что $v > \hat{\omega}(A)$ и $s < 1/v$. Мы построим множество канторовского типа $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}_v$, хаусдорфова размерность которого будет не меньше s . Пусть $(k_j)_{j \geq 0}$ — такая возрастающая последовательность целых чисел, что неравенство (4) выполнено для каждого $k = k_j$, $j \geq 0$, встречающегося в этой последовательности. Мы будем предполагать, что последовательность (k_j) будет очень лакунарной, в том смысле, что каждое последующее значение k_{j+1} существенно больше, чем предыдущее k_j . Точное требование на порядок роста последовательности будет установлено в процессе построения.

Множество $\mathcal{K}$ определим как пересечение

$$\mathcal{K} = \bigcap_{j \geq 0} K_j$$

вложенных множеств K_j . Каждое K_j представляет из себя объединение шаров B радиуса $q_{k_j}^{-v}$ с центрами в некоторых точках Γ_{k_j} . Ясно, что $\mathcal{K}$ содержится в $\mathcal{B}_v$. Отметим в качестве следствия неравенства (4), что K_j собраны из непересекающихся шаров. Начнём с того, что выберем k_0 произвольно и в качестве K_0 выберем один шар нужного вида. Положим $N_0 = 1$. Определим индуктивно $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ следующим образом. Предположим, что K_j уже построен. Поскольку последовательность $(qA)_{q \geq 1}$ равномерно распределена по модулю $\mathbf{Z}^n$ в $\mathbf{T}^n$ [8, гл. IV], мы можем выбрать k_{j+1} настолько большим, чтобы каждый шар, встречающийся в множестве K_j , евклидов объём которого равен $2^n q_{k_j}^{-nv}$, содержал приблизительно $2^n q_{k_{j+1}} q_{k_j}^{-nv}$ точек из $\Gamma_{k_{j+1}}$. Выкидывая некоторые из них, мы выберем в каждом шаре B из множества K_j одно и то же количество

$$N_{j+1} = [2^{n-1} q_{k_{j+1}} q_{k_j}^{-nv}]$$

точек из $B \cap \Gamma_{k_{j+1}}$, для которых шары B' радиуса $q_{k_{j+1}}^{-v}$ с центрами в этих точках содержатся в B . Определим K_{j+1} как объединение всех этих выбранных шаров B' по всем B из K_j .

Теперь мы определим вероятностную меру μ на $\mathbf{R}^n$ следующим образом. Если B — шар, являющийся частью множества K_j , положим

$$\mu(B) = \frac{1}{N_0 \times \dots \times N_j},$$

так что $\mu(K_j) = 1$. Для произвольного борелевского подмножества E положим

$$\mu(E) = \inf_C \left(\sum_{B \in C} \mu(B) \right),$$

где инфимум берётся по всем покрытиям $\mathcal{C}$ множества $E \cap \mathcal{K}$ непересекающимися шарами B из множеств K_j , $j \geq 0$. Тогда μ будет вероятностной мерой на $\mathbf{R}^n$ с носителем, содержащимся в $\mathcal{K}$ [10].

Лемма 2. Для произвольной точки $x \in \mathbf{R}^n$ и достаточно малого радиуса r выполнена следующая оценка сверху:

$$\mu(B(x, r)) \ll r^s.$$

Доказательство. Пусть индекс j определён условием

$$q_{k_{j+1}}^{-v} \leq r < q_{k_j}^{-v}.$$

Конечно, множество $\mathcal{K} \cap B(x, r)$ покрыто набором шаров B радиуса $q_{k_{j+1}}^{-v}$, заданных в K_{j+1} , которые пересекают $B(x, r)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu(B(x, r)) &\leq \sum_{B \cap B(x, r) \neq \emptyset} \mu(B) \leq \\ &\leq \frac{1}{N_0 \times \dots \times N_{j+1}} \text{Card}(\Gamma_{k_{j+1}} \cap B(x, r + q_{k_{j+1}}^{-v})). \end{aligned} \quad (5)$$

Мы воспользуемся леммой 1, чтобы ограничить правую часть соотношения (5). Сначала предположим, что

$$r + q_{k_{j+1}}^{-v} \leq \lambda_{1, k_{j+1}}.$$

Тогда из леммы 1 (при $i = 1$) следует, что

$$\mu(B(x, r)) r^{-s} \ll \frac{(q_{k_{j+1}}^{-v})^{-s}}{N_0 \times \dots \times N_{j+1}} \ll \frac{q_{k_j}^{nv}}{N_0 \times \dots \times N_j} q_{k_{j+1}}^{sv-1} \ll 1$$

при условии, что $q_{k_{j+1}} \geq (q_{k_j}^{nv} / (N_0 \times \dots \times N_j))^{1/(1-sv)}$ (заметим, что показатель $sv - 1$ отрицателен).

Теперь предположим, что найдётся такое целое i , $1 \leq i < n$, что

$$\lambda_{i, k_{j+1}} \leq r + q_{k_{j+1}}^{-v} \leq \lambda_{i+1, k_{j+1}}.$$

Рассмотрим два случая в зависимости от того, $i < s$ или $i \geq s$. Если $i < s$, то, применяя лемму 1, получаем ту же самую оценку

$$\begin{aligned} \mu(B(x, r)) r^{-s} &\ll \\ &\ll \frac{r^{i-s}}{(N_0 \times \dots \times N_{j+1})(\lambda_{1, k_{j+1}} \times \dots \times \lambda_{i, k_{j+1}})} \ll \frac{q_{k_j}^{nv}}{N_0 \times \dots \times N_j} q_{k_{j+1}}^{sv-1}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\lambda_{i, k_{j+1}} \geq \dots \geq \lambda_{1, k_{j+1}} \gg \rho_{k_{j+1}} \gg q_{k_{j+1}}^{-v}, \quad r \geq q_{k_{j+1}}^{-v}.$$

В случае $i \geq s$ лемма 1 и соотношение (5) дают оценку

$$\begin{aligned} \mu(B(x, r)) r^{-s} &\ll \frac{1}{N_0 \times \dots \times N_{j+1}} r^{i-s} q_{k_{j+1}} \prod_{l=i+1}^n \lambda_{l, k_{j+1}} \ll \\ &\ll \frac{q_{k_j}^{nv}}{(N_0 \times \dots \times N_j) q_{k_{j+1}}} \lambda_{i+1, k_{j+1}}^{i-s} q_{k_{j+1}} \prod_{l=i+1}^n \lambda_{l, k_{j+1}} \ll \\ &\ll \frac{q_{k_j}^{nv}}{N_0 \times \dots \times N_j} \lambda_{n, k_{j+1}}^{n-s} \ll 1 \end{aligned}$$

при условии, что $\lambda_{n, k_{j+1}} \leq (q_{k_j}^{nv} / (N_0 \times \dots \times N_j))^{-1/(n-s)}$. Мы также знаем из леммы 1, что $\lambda_{n, k_{j+1}}$ сколь угодно мало, когда k_{j+1} достаточно велико (заметим, что показатель $n - s$ положителен, так как $s < 1/v < 1/\hat{\omega}(A) \leq n$).

Наконец, предположим, что

$$r + q_{k_{j+1}}^{-v} \geq \lambda_{n, k_{j+1}}.$$

Напомним, что $r \leq q_{k_j}^{-v}$. Лемма 1 даёт теперь оценку

$$\begin{aligned} \mu(B(x, r))r^{-s} &\ll \frac{1}{N_0 \times \dots \times N_{j+1}} r^{n-s} q_{k_{j+1}} \ll \frac{q_{k_j}^{nv}}{N_0 \times \dots \times N_j} (q_{k_j}^{-v})^{n-s} \ll \\ &\ll \frac{q_{k_j}^{sv}}{N_0 \times \dots \times N_j} \ll \frac{q_{k_{j-1}}^{nv}}{N_0 \times \dots \times N_{j-1}} q_{k_j}^{sv-1} \ll 1 \end{aligned}$$

при условии, что $q_{k_j} \geq (q_{k_{j-1}}^{nv} / (N_0 \times \dots \times N_{j-1}))^{1/(1-sv)}$. $\square$

По принципу распределения масс леммой 2 обеспечивается, что множество $\mathcal{K}$ имеет хаусдорфову размерность не менее s . Поскольку $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}_v$, то $\delta(v) \geq s$. Выбирая s сколь угодно близким к $1/v$, мы получаем нижнюю границу $\delta(v) \geq 1/v$. Теорема 5 доказана полностью.

Литература

- [1] Трубецкой С., Шмелинг Й. Неоднородные диофантовы приближения и угловая возвращаемость для бильярдов в многоугольниках // Мат. сб. — 2003. — Т. 194, № 2. — С. 129–144.
- [2] Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine Approximation on Manifolds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. — (Cambridge Tracts Math. Math. Phys.; Vol. 137).
- [3] Bugeaud Y. A note on inhomogeneous Diophantine approximation // Glasgow Math. J. — 2003. — Vol. 45. — P. 105–110.
- [4] Bugeaud Y. Approximation by Algebraic Numbers. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. — (Cambridge Tracts Math.; Vol. 160).
- [5] Bugeaud Y., Chevallier N. On simultaneous inhomogeneous Diophantine approximation // Acta Arith. — 2006. — Vol. 132. — P. 97–123.
- [6] Bugeaud Y., Laurent M. On exponents of homogeneous and inhomogeneous Diophantine approximation // Moscow Math. J. — 2005. — Vol. 5, no. 4. — P. 747–766.
- [7] Bugeaud Y., Laurent M. On exponents of Diophantine approximation // Diophantine Geometry / U. Zannier, ed. — Scu. Norm. Sup. Pisa, 2007. — (Ser. CRM; Vol. 4). — P. 101–118.
- [8] Cassels J. W. S. An Introduction to Diophantine Approximation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957. — (Cambridge Tracts Math. Math. Phys.; Vol. 99).
- [9] Chevallier N. Meilleures approximations d'un élément du tore $\mathbf{T}^2$ et géométrie des multiples de cet élément // Acta Arith. — 1996. — Vol. 78. — P. 19–35.
- [10] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — Wiley, 1990.
- [11] Khintchine A. Ya. Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1926. — Vol. 50. — P. 170–195.

