О распределении значений L-функций из класса Сельберга

Р. МАЦАЙТЕНЕ
Шяуляйский университет, Литва
e-mail: renata.macaitiene@mi.su.lt

УДК 511.331

Ключевые слова: ряды Дирихле, предельные теоремы, слабая сходимость вероятностных мер.

Аннотация

В работе доказаны две предельные теоремы в смысле слабой сходимости вероятностных мер на пространстве мероморфных функций и в комплексной плоскости для подкласса L-функций из класса Сельберга. Указан явный вид предельных мер.

Abstract

R. Macaitienė, On value-distribution of L-functions from the Selberg class, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 103—116.

In this paper, two limit theorems in the sense of the weak convergence of probability measures in the space of meromorphic functions and on the complex plane are proved for L-functions from a subclass of the Selberg class. The explicit form of the limit measures are given.

1. Введение

В [23] А. Сельберг определил общий класс $\mathcal{S}$ рядов Дирихле

$$L(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s},\quad s=\sigma+it,$$

удовлетворяющих следующим предположениям:

1) для любого $\varepsilon>0$ справедливо $a(m)\ll m^{\varepsilon}$ (гипотеза Рамануджана);
2) существует такое целое $r\geqslant 0$, что $(s-1)^r L(s)$ — целая функция конечного порядка (аналитическое продолжение);
3) существуют вещественные положительные числа Q и λ_j, комплексные числа μ_j, $\operatorname{Re}\mu_j\geqslant 0$, $j=1,\dots,l$, и w, $|w|=1$, такие что функция

$$\Lambda_L(s)=L(s)Q^s\prod_{j=1}^{l}\Gamma(\lambda_j s+\mu_j)$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 103—116.

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Lambda_L(s) = w\overline{\Lambda_L(1-\bar{s})}$$

(функциональное уравнение);

4) существуют числа $b(p^\alpha)$, $b(p^\alpha) \ll p^{\alpha\theta}$ для некоторого $\theta < 1/2$, такие что

$$L(s) = \prod_p \exp\left\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{b(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} \right\},$$

где произведение берётся по всем простым числам p (эйлерово произведение).

Из 1) следует, что функция $L(s)$ аналитическая в полуплоскости

$$\{s \in \mathbb{C}\colon \sigma > 1\}.$$

А. Сельберг также сформулировал несколько гипотез о классе $\mathcal{S}$. В последние годы много работ было посвящено гипотезам Сельберга и структуре класса $\mathcal{S}$ (см. обзорные статьи [12, 21, 22]). Параллельно были введены и изучены некоторые подклассы класса Сельберга [4—7, 20, 24, 25]. Мы будем работать с подклассом класса Сельберга $\tilde{\mathcal{S}}$, определённым Д. Штойдингом в [24, 25]. Функция L принадлежит $\tilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$, если справедливы следующие утверждения:

1) для каждого простого числа p и $j = 1, \ldots, k$ существуют комплексные числа $c_j(p)$, $|c_j(p)| \leqslant 1$, такие что

$$L(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)}{p^s}\right)^{-1};$$

2) существует положительная постоянная $\varkappa$, такая что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leqslant x} |a(p)|^2 = \varkappa,$$

где

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

Примерами функций из $\tilde{\mathcal{S}}$ являются дзета-функция Римана, L-функции Дирихле, L-функции Гекке, дзета-функция Дедекинда.

Из фундаментальных работ Г. Бора и Б. Ессена [2, 3] следует, что асимптотическое поведение функций, задаваемых рядами Дирихле, описывается вероятностными предельными теоремами (результаты и ссылки читатель может найти в [11, 13—15, 18]). Предельные теоремы в смысле слабой сходимости вероятностных мер на пространстве аналитических функций также применяются при доказательстве универсальности рядов Дирихле. В [24, 25] предельные теоремы такого типа были доказаны для L-функций из класса $\tilde{\mathcal{S}}$. Пусть

$$D_0 = \left\{ s \in \mathbb{C}\colon \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right) < \sigma < 1 \right\},$$

где d_L — степень $L \in \mathcal{S}$, определённая как

$$d_L = 2\sum_{j=1}^{r}\lambda_j.$$

Известно [19], что для $1 \neq L \in \mathcal{S}$ выполняется $d_L \geqslant 1$.

Пусть G — область в комплексной плоскости. Обозначим через $H(G)$ пространство аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Чтобы сформулировать предельную теорему из [24, 25], нам потребуется следующее обозначение. Пусть $\operatorname{meas}\{A\}$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, и для $T > 0$ положим

$$\nu_T(\ldots) = \frac{1}{T}\operatorname{meas}\{\tau \in [0;T]\colon \ldots\},$$

где многоточие заменяет условия, которым удовлетворяет τ. Обозначим через $\mathcal{B}(U)$ класс борелевских множеств пространства U, а через γ — единичную окружность $\{s \in \mathbb{C}\colon |s| = 1\}$ в комплексной плоскости и определим

$$\Omega = \prod_{p}^{\infty}\gamma_p,$$

где $\gamma_p = \gamma$ для каждого простого p. С топологией произведения и поточечным перемножением бесконечномерный тор Ω по теореме Тихонова является компактной топологической абелевой группой. Таким образом, на $\bigl(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)\bigr)$ можно определить вероятностную меру Хаара m_{H} и получить вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_{\mathrm{H}})$. Обозначим через $\omega(p)$ проекцию $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p и для $s \in D_0$ положим

$$L_0(s,\omega) = \prod_{p}\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{c_j(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

Тогда $L_0(s,\omega)$ — $H(D_0)$-значный случайный элемент, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_{\mathrm{H}})$. Обозначим через P_{L_0} распределение $L_0(s,\omega)$:

$$P_{L_0}(A) = m_{\mathrm{H}}(\omega \in \Omega\colon L_0(s,\omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}\bigl(H(D_0)\bigr).$$

Теорема A [24, 25]. *Пусть $L \in \tilde{\mathcal{S}}$. Тогда вероятностная мера*

$$\nu_T(L(s + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}\bigl(H(D_0)\bigr),$$

слабо сходится к мере P_{L_0} при $T \to \infty$.

Заметим, что для доказательства теоремы A используется только гипотеза 1) для подкласса $\tilde{\mathcal{S}}$. Таким образом, имеет смысл рассматривать расширение $\tilde{\mathcal{S}}'$ класса $\tilde{\mathcal{S}}$, определяемое только гипотезой 1) для $\tilde{\mathcal{S}}$.

В общем случае $\mathcal{S}$ — это класс мероморфных функций с полюсом в точке $s = 1$ порядка r. Поэтому асимптотические свойства L-функций из класса $\mathcal{S}$

лучше отражаются предельными теоремами в пространстве мероморфных функций. Нашей целью будет доказательство теоремы такого типа для L-функций из класса $\tilde{\mathcal{S}}'$.

Пусть $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ — сфера Римана с метрикой d, определённой формулами

$$d(s_1,s_2)=\frac{2|s_1-s_2|}{\sqrt{1+|s_1|^2}\sqrt{1+|s_2|^2}},\quad d(s,\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|s|^2}},\quad d(\infty,\infty)=0,$$

где $s, s_1, s_2 \in \mathbb{C}$. Для области G в $\mathbb{C}$ обозначим через $M(G)$ пространство мероморфных в G функций $g\colon G \to (\mathbb{C}_\infty, d)$ с топологией равномерной сходимости на компактах. В этой топологии последовательность $\{g_n\} \subset M(G)$ сходится к функции $g \in M(G)$ при $n \to \infty$, если для любого компактного подмножества K в G

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in K} d\big(g_n(s), g(s)\big) = 0.$$

Отметим, что пространство $H(G)$ есть подпространство $M(G)$.

Пусть теперь

$$D=\left\{s\in\mathbb{C}\colon \sigma>\max\left(\frac{1}{2},1-\frac{1}{d_L}\right)\right\}$$

и $L(s,\omega)$ — $H(D)$-значный случайный элемент на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_{\mathrm{H}})$, определённый при $s \in D$ формулой (1). Обозначим через P_L распределение $L(s,\omega)$ и на $\Big(M(D), \mathcal{B}\big(M(D)\big)\Big)$ определим вероятностную меру $P_{T,L}$:

$$P_{T,L}(A)=\nu_T(L(s+i\tau)\in A),\quad A\in\mathcal{B}\big(M(D)\big).$$

Теорема 1. *Пусть $L \in \tilde{\mathcal{S}}'$. Тогда вероятностная мера $P_{T,L}$ слабо сходится к мере P_L при $T \to \infty$.*

Для

$$\sigma>\max\left(\frac{1}{2},1-\frac{1}{d_L}\right)$$

определим

$$L(\sigma,\omega)=\prod_p\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{c_j(p)\omega(p)}{p^\sigma}\right)^{-1}.$$

Тогда $L(\sigma,\omega)$ — комплекснозначная случайная величина на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_{\mathrm{H}})$.

Следствие 2. *Пусть $L \in \tilde{\mathcal{S}}'$ и*

$$\sigma>\max\left(\frac{1}{2},1-\frac{1}{d_L}\right).$$

Тогда вероятностная мера

$$\nu_T(L(\sigma+it)\in A),\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

слабо сходится к распределению случайной величины $L(\sigma,\omega)$ при $T \to \infty$.

Доказательство теоремы 1 основано на предельной теореме для пространства $H(D)$.

2. Предельная теорема в пространстве $H(D)$

При $\sigma > 1$ определим функцию $L_1(s)$ равенством

$$L_1(s) = (1 - 2^{1-s})^r L(s).$$

Поскольку точка $s = 1$ есть полюс порядка r функции $L(s)$, функция $L_1(s)$, очевидно, целая. Кроме того, при $\sigma > 1$ функция $L_1(s)$ может быть записана в виде

$$(1 - 2^{1-s})^r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j} \frac{1}{m^s} \frac{1}{2^{js}}$$

с некоторыми коэффициентами $a_{m,j} \ll |a_m|$ при $m \in \mathbb{N}$ и $j = 0, 1, \ldots, r$.

Для $s \in D$ определим

$$L_1(s, \omega) = \left(1 - \frac{2\omega(2)}{2^s}\right)^r \prod_p \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Тогда $L_1(s, \omega)$ — $H(D)$-значный случайный элемент на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_{\mathrm{H}})$. Кроме того, стандартным образом (см., например, [13]) может быть доказано, что для $s \in D$ и почти всех $\omega \in \Omega$

$$L_1(s, \omega) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j} \frac{\omega(m)}{m^s} \frac{\omega(2^j)}{2^{js}}.$$

Обозначим через P_{L_1} распределение случайного элемента $L_1(s, \omega)$ и определим вероятностную меру

$$P_{T,L_1}(A) = \nu_T(L_1(s + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}\big(H(D)\big).$$

Теорема 3. *Вероятностная мера P_{T,L_1} слабо сходится к мере P_{L_1} при $T \to \infty$.*

Мы начнём доказательство теоремы 3 с предельной теоремы для одного абсолютно сходящегося ряда. Пусть

$$\sigma_1 > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right) -$$

фиксированное число, и пусть для $m, n \in \mathbb{N}$

$$v_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}.$$

При $n \in \mathbb{N}$ положим

$$l_{n,j}(s) = \frac{s}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right) n^s 2^{js}$$

и определим при $\sigma > 1/2$

$$L_{1,n}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} L_1(s + z) l_{n,j}(z) \frac{x^z}{z} \, \mathrm{d}z. \tag{2}$$

Положив

$$k_{n,j}(m)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{l_{n,j}(z)\,\mathrm{d}z}{zm^z2^{jz}},$$

имеем оценку

$$k_{n,j}(m)\ll m^{-\sigma_1}2^{-j\sigma_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma_1+it)|\,\mathrm{d}t\ll_n m^{-\sigma_1}2^{-j\sigma_1}.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{m,j}k_{n,j}(m)}{m^s2^{js}}$$

сходится абсолютно при $\sigma>1/2$. Из представления

$$L_1(s+z)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,j}\frac{1}{m^{s+z}}\,\frac{1}{2^{j(s+z)}},$$

меняя порядки суммирования и интегрирования в (2), получаем, что

$$L_{1,n}(s)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,j}\frac{1}{m^s}\,\frac{1}{2^{js}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}l_{n,j}(z)\frac{\mathrm{d}z}{zm^z2^{jz}}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,j}k_{n,j}(m)\frac{1}{m^s2^{js}}.\qquad(3)$$

Из формулы Меллина

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(z)b^{-z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-b},\quad b,c>0,$$

следует равенство

$$k_{n,j}(m)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{z}{\sigma_1}\Gamma\left(\frac{z}{\sigma_1}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{-z}\frac{\mathrm{d}\,z}{z}=v_n(m),$$

которое вместе с (3) показывает, что ряд

$$L_{1,n}(s)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,j}\frac{v_n(m)}{m^s2^{js}}$$

сходится абсолютно при $\sigma>1/2$.

Для $\hat{\omega}\in\Omega$ определим

$$L_{1,n}(s,\hat{\omega})=\sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,j}\frac{v_n(m)\hat{\omega}(m)\hat{\omega}(2^j)}{m^s2^{js}}$$

и рассмотрим слабую сходимость вероятностных мер

$$P_{T,n,L_1}(A) = \nu_T(L_{1,n}(s+i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}\big(H(D)\big),$$

и

$$\hat{P}_{T,n,L_1}(A) = \nu_T(L_{1,n}(s+i\tau,\hat{\omega}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}\big(H(D)\big).$$

Теорема 4. *Вероятностные меры* P_{T,n,L_1} *и* $\hat{P}_{T,n,L_1}$ *слабо сходятся к одной и той же вероятностной мере на* $\Big(H(D), \mathcal{B}\big(H(D)\big)\Big)$ *при* $T \to \infty$.

Для доказательства теоремы 4 применим следующее утверждение. Определим на $\big(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)\big)$ вероятностную меру

$$Q_T(A) = \nu_T\big((p^{-i\tau} \colon p \text{ простое}) \in A\big).$$

Лемма 5. *Вероятностная мера* Q_T *слабо сходится к мере Хаара* m_{H} *при* $T \to \infty$.

Доказательство. Дуальная группа тора Ω изоморфна

$$\bigoplus \mathbb{Z}_p,$$

где $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ для каждого простого числа p (через $\mathbb{Z}$ обозначается множество целых чисел). Элемент $\underline{k} = (k_2, k_3, \ldots) \in \bigoplus \mathbb{Z}_p$, где лишь конечное число k_p отлично от нуля, действует на Ω следующим образом:

$$\omega \to \omega^{\underline{k}} = \prod_p \omega^{k_p}(p).$$

Поэтому преобразование Фурье $g_T(\underline{k})$ меры Q_T имеет вид

$$g_T(\underline{k}) = \int\limits_{\Omega} \prod_p \omega^{k_p}(p)\,\mathrm{d}Q_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \prod_p p^{-i\tau k_p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \exp\Big\{-i\tau\sum_p k_p \log p\Big\}\,\mathrm{d}\tau,$$

где только конечное число чисел k_p отлично от нуля. Поскольку система $\{\log p \colon p \text{ простое}\}$ линейно независима над полем рациональных чисел, имеем

$$g_T(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ \underline{k} = \underline{0}, \\ \dfrac{\exp\big\{-iT\sum_p k_p \log p\big\} - 1}{-iT\sum_p k_p \log p}, & \text{если } \ \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Поэтому

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{если } \ \underline{k} \neq \underline{0}, \end{cases}$$

и утверждение леммы следует из теоремы 1.4.2 в [10]. □

Доказательство теоремы 4. Определим функцию $h_n\colon \Omega \to H(D)$ формулой
$$h_n(\omega) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j} \frac{v_n(m)\omega(m)\omega(2^j)}{m^s 2^{js}}.$$
Функция h_n непрерывна, более того,
$$h_n\big((p^{-i\tau}\colon p \text{ простое})\big) = L_{1,n}(s+i\tau).$$
Следовательно, $P_{T,n,L_1} = Q_T h_n^{-1}$, и согласно теореме 5.1 из [1] и лемме 5 получаем, что P_{T,n,L_1} слабо сходится к мере $m_{\mathrm{H}} h_n^{-1}$ при $T \to \infty$.

Для доказательства аналогичного утверждения для меры $\widehat{P}_{T,n,L_1}$ мы определим функцию $h\colon \Omega \to \Omega$:
$$h(\omega) = \omega\hat{\omega}^{-1}.$$
Тогда
$$h_n\Big(h\big((p^{-i\tau}\colon p \text{ простое})\big)\Big) = L_{1,n}(s+i\tau, \hat{\omega}).$$
Подобно тому, как это сделано выше, мы получим, что мера $\hat{P}_{T,n,L_1}$ слабо сходится к $m_{\mathrm{H}}(h_n h)^{-1} = (m_{\mathrm{H}} h^{-1}) h_n^{-1} = m_{\mathrm{H}} h_n^{-1}$ вследствие инвариантности меры Хаара m_{H}. Теорема доказана. □

Аппроксимируем в среднем функцию $L_1(s)$ функциями $L_{1,n}(s)$. Прежде всего определим на $H(D)$ метрику. Из леммы 1.7.1 в [13] следует, что существует последовательность компактных подмножеств $\{K_l\} \subset D$, таких что
$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$
$K_l \subset K_{l+1}$ и если K — компактное подмножество в D, то $K \subseteq K_l$ при некотором l. Для $f, g \in H(D)$ мы положим
$$\varrho(f,g) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup\limits_{s\in K_l} |f(s)-g(s)|}{1 + \sup\limits_{s\in K_l} |f(s)-g(s)|}.$$
Тогда ϱ есть метрика на $H(D)$, индуцирующая топологию равномерной сходимости на компактах.

Лемма 6. *Пусть K — компактное подмножество в полуплоскости D. Тогда*
$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \sup_{s\in K} |L_1(s+i\tau) - L_{1,n}(s+i\tau)| \, \mathrm{d}\tau = 0.$$

Доказательство. В [25] показано, что при
$$\sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right)$$

функция $L(s)$ имеет конечный порядок и

$$\int_0^T |L(\sigma+it)|^2\,\mathrm{d}t \ll T.$$

Отсюда следует, что в этой же области функция $L_1(s)$ — функция конечного порядка и

$$\int_0^T |L_1(\sigma+it)|^2\,\mathrm{d}t \ll T.$$

Таким образом, можно завершить доказательство стандартным применением контурного интегрирования (см. доказательство теоремы 5.4.2 в [13], где рассматривается дзета-функция Римана). □

Подобное утверждение справедливо для функций $L_1(s,\omega)$ и $L_{1,n}(s,\omega)$.

Лемма 7. *Пусть K — компактное подмножество в полуплоскости D. Тогда для почти всех $\omega \in \Omega$*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sup_{s\in K} |L_1(s+i\tau,\omega) - L_{1,n}(s+i\tau,\omega)|\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

Доказательство. Будем использовать оценку

$$\int_0^T |L_1(\sigma+it,\omega)|^2\,\mathrm{d}t \ll T,$$

которая справедлива в области

$$\sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{d_L}\right)$$

для почти всех $\omega \in \Omega$ и следует из оценки среднего для функции $L(s,\omega)$ в [25]. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство леммы 6. □

Доказательство теоремы 3. Определим ещё одну вероятностную меру на $H(D)$:

$$\hat{P}_{T,L_1}(A) = \nu_T(L_1(s+i\tau,\omega) \in A).$$

Сперва докажем, что меры P_{T,L_1} и $\hat{P}_{T,L_1}$ слабо сходятся к одной и той же вероятностной мере на $\Big(H(D), \mathcal{B}\big(H(D)\big)\Big)$ при $T \to \infty$.

Из теоремы 4 следует, что меры P_{T,n,L_1} и $\hat{P}_{T,n,L_1}$ слабо сходятся к одной и той же мере P_{n,L_1} при $T \to \infty$. Через $X_{n,L_1}(s)$ обозначим $H(D)$-значный случайный элемент с распределением P_{n,L_1} и определим

$$X_{T,n,L_1}(s) = L_{1,n}(s+i\theta T),$$

где θ — случайная величина, определённая на некотором вероятностном пространстве $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), \mathbb{P})$ и равномерно распределённая на $[0,1]$. Теперь, используя обозначение $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ для сходимости по распределению, имеем

$$X_{T,n,L_1}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} X_{n,L_1}(s). \tag{4}$$

Нетрудно заметить, что семейство вероятностных мер $\{P_{n,L_1}\}$ плотное и, следовательно, относительно компактное (см. определения в [1]). Таким образом, существует подпоследовательность $\{P_{n_1,L_1}\} \subset \{P_{n,L_1}\}$, такая что мера P_{n_1} слабо сходится к некоторой мере P на $\big(H(D), \mathcal{B}(H(D))\big)$ при $n_1 \to \infty$. Это эквивалентно тому, что

$$X_{n_1,L_1} \xrightarrow[n_1\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{5}$$

Определим

$$X_{T,L_1}(s) = L_1(s + i\theta T).$$

Используя лемму 6, найдём, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \nu_T\big(\varrho\big(X_{T,L_1}(s), X_{T,n,L_1}(s)\big) \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \\ \leqslant \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho\big(L_1(s+i\tau), L_{1,n}(s+i\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau = 0.$$

Отсюда, из (4), (5) и теоремы 4.2 в [1] имеем

$$X_{T,L_1}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P, \tag{6}$$

т. е. мера P_{T,L_1} слабо сходится к P при $T \to \infty$. Кроме того, из (6) следует, что мера P не зависит от последовательности $\{P_{n_1,L_1}\}$. Следовательно,

$$X_{n,L_1}(s) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{7}$$

Теперь определим

$$\hat{X}_{T,n,L_1}(s) = L_{1,n}(s + i\theta T, \omega)$$

и

$$\hat{X}_{T,L_1}(s) = L_1(s + i\theta T, \omega).$$

Используя (7) и лемму 7 и повторяя приведённые выше рассуждения для случайных элементов $\hat{X}_{T,n,L_1}$ и $\hat{X}_{T,L_1}$, мы получим, что мера $\hat{P}_{T,L_1}$ также слабо сходится к P при $T \to \infty$.

Осталось доказать, что P совпадает с P_{L_1}. Определим $a_\tau = \{p^{-i\tau}\colon p \text{ простое}\}$, $\tau \in \mathbb{R}$, и положим $\varphi_\tau(\omega) = a_\tau \omega$, $\omega \in \Omega$. Тогда $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ — 1-параметрическая группа измеримых сохраняющих меру преобразований на Ω. Кроме того, из теоремы 5.3.6 в [13] следует эргодичность группы $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$.

Пусть теперь A — фиксированное множество непрерывности меры P, определённое при доказательстве теоремы 3. По теореме 3 и теореме 2.1 из [1] имеем

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T(L_1(s+i\tau,\omega)\in A) = P(A). \tag{8}$$

Определим случайную величину ξ на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_{\mathrm{H}})$:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad L_1(s,\omega)\in A, \\ 0, & \text{если} \quad L_1(s,\omega)\notin A. \end{cases}$$

Поскольку группа $\{\varphi_\tau \colon \tau\in\mathbb{R}\}$ эргодична, то процесс $\varphi_\tau\bigl(\xi(\omega)\bigr)$ также эргодичен. Таким образом, обозначая через $\mathbb{E}X$ математическое ожидание случайного элемента X, по теореме Биркгофа—Хинчина (см., например, [8]) имеем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi\bigl(\varphi_\tau(\omega)\bigr)\,\mathrm{d}\tau = \mathbb{E}\xi. \tag{9}$$

Кроме того, из определений ξ и φ_τ следует, что

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_\Omega \xi(\omega)\,\mathrm{d}m_{\mathrm{H}} = m_{\mathrm{H}}(\omega\in\Omega\colon L_1(s,\omega)\in A) = P_{L_1}(A)$$

и

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi\bigl(\varphi_\tau(\omega)\bigr)\,\mathrm{d}\tau = \nu_T(L_1(s+i\tau,\omega)\in A).$$

Следовательно, по (9)

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T(L_1(s+i\tau,\omega)\in A) = P_{L_1}(A),$$

и ввиду (8) мы получаем, что $P(A) = P_{L_1}(A)$ для всех множеств непрерывности A меры P. Поскольку множества непрерывности составляют определяющий класс, то справедливо равенство $P(A) = P_{L_1}(A)$ для всех $A\in\mathcal{B}\bigl(H(D)\bigr)$. Теорема доказана. □

3. Двумерная предельная теорема

Пусть $H^2(D) = H(D)\times H(D)$ и

$$g_r(s) = (1-2^{1-s})^r.$$

Тогда $g_r(s)$ — полином Дирихле и из доказательства теоремы 4 следует, что вероятностная мера

$$\nu_T(g_r(s+i\tau)\in A), \quad A\in\mathcal{B}\bigl(H(D)\bigr), \tag{10}$$

слабо сходится к распределению случайного элемента

$$g_r(s,\omega) = \left(1 - \frac{2\omega(2)}{2^s}\right)^r$$

при $T \to \infty$.

На $\Big(H^2(D), \mathcal{B}\big(H^2(D)\big)\Big)$ определим

$$P_T^{(2)}(A) = \nu_T\Big(\big(g_r(s+i\tau), L_1(s+i\tau)\big) \in A\Big)$$

и положим

$$F(s,\omega) = \big(g_r(s,\omega), L_1(s,\omega)\big).$$

Используя слабую сходимость меры (10), теорему 3 и модифицированный критерий Крамера—Вальда, пример применения которого читатель может найти в [9, 16, 17], мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 8. *Вероятностная мера $P_T^{(2)}$ слабо сходится к распределению P_F случайного элемента $F(s,\omega)$.*

4. Доказательство теоремы 1

Определим функцию $u\colon H^2(D) \to M(D)$ формулой

$$u(g_1,g_2) = \frac{g_2}{g_1}, \quad (g_1,g_2) \in H^2(D).$$

Эта функция непрерывна всюду, за исключением множества P_F-меры нуль, поскольку метрика d из определения пространства $M(D)$ удовлетворяет равенству

$$d(g_1,g_2) = d\left(\frac{1}{g_1}, \frac{1}{g_2}\right), \quad g_1, g_2 \in H(D).$$

Более того, $P_{T,L} = P_T^{(2)} u^{-1}$. Таким образом, из теоремы 8 и теоремы 5.1 в [1] следует, что мера $P_{T,L}$ слабо сходится к распределению случайного элемента

$$\frac{L_1(s,\omega)}{g_r(s,\omega)} = L(s,\omega)$$

при $T \to \infty$.

Доказательство следствия 2. Функция $v\colon M(D) \to \mathbb{C}$, определённая формулой

$$v\big(g(s)\big) = g(\sigma), \quad g \in M(D),$$

непрерывна. Следовательно, утверждение следствия вытекает из теоремы 1, непрерывности v и теоремы 5.1 в [1]. $\square$

Литература

[1] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1987.

[2] Bohr H., Jessen B. Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion // Acta Math. — 1930. — Vol. 54. — P. 1—35.

[3] Bohr H., Jessen B. Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion. II // Acta Math. — 1932. — Vol. 58. — P. 1—55.

[4] Bombieri E., Hejhal D. A. On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products // Duke Math. J. — 1995. — Vol. 80. — P. 821—862.

[5] Bombieri E., Perelli A. Distinct zeros of L-functions // Acta Arith. — 1998. — Vol. 83. — P. 271—281.

[6] Conrey J. B., Ghosh A. On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees // Duke Math. J. — 1993. — Vol. 72. — P. 673—693.

[7] Conrey J. B., Ghosh A. Remarks on the generalized Lindelöf hypothesis: Preprint. — `www.math.obstate.edu/~conrey/papers.html`.

[8] Cramér H., Leddbetter M. R. Stationary and Related Stochastic Processes. — New York: Wiley, 1967.

[9] Genys J., Laurinčikas A. A joint limit theorem for general Dirichlet series // Lithuanian Math. J. — 2004. — Vol. 44, no. 1. — P. 18—35.

[10] Heyer H. Probability Measures on Locally Compact Groups. — Berlin: Springer, 1977.

[11] Joyner D. Distribution Theorems of L-Functions. — Harlow: Longman Scientific, 1986.

[12] Kaczorowski J., Perelli A. The Selberg class: a survey // Number Theory in Progress. Proc. of the Int. Conf. in Honor of the 60th Birthday of A. Schinzel (Zakopane, 1997). Vol. 2: Elementary and Analytic Number Theory. — Berlin: De Gruyter, 1999. — P. 953—992.

[13] Laurinčikas A. Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function. — Dordrecht: Kluwer, 1996.

[14] Laurinčikas A. Application of probabilistic methods in the theory of the Riemann zeta-function // Int. Conf. Modern Problems of Number Theory and Its Applications (Russia, Tula, 2001). Topical problems. Pt. II. — Moscow: Moscow State University, 2002. — P. 98—116.

[15] Laurinčikas A., Garunkštis R. The Lerch Zeta-Function. — Dordrecht: Kluwer, 2002.

[16] Laurinčikas A., Matsumoto K. Joint value-distribution on Lerch zeta-functions // Lithuanian Math. J. — 1998. — Vol. 38, no. 3. — P. 238—249.

[17] Macaitienė R. Joint discrete limit theorems in the space of analytic functions for general Dirichlet series // Lithuanian Math. J. — 2005. — Vol. 45, no. 1. — P. 84—93.

[18] Matsumoto K. Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions // Sugaku Expositions. — 2004. — Vol. 17, no. 1. — P. 51—71.

[19] Molteni G. A note on a result of Bochner and Conrey–Ghosh about the Selberg class // Arch. Math. — 1999. — Vol. 72. — P. 219—222.

[20] Perelli A. General L-functions // Ann. Mat. Pura Appl. — 1982. — Vol. 130. — P. 287—306.

[21] Perelli A. A survey of the Selberg class of L-functions. I // Milan J. Math. — 2005. — Vol. 73. — P. 19—52.

[22] Perelli A. A survey of the Selberg class of L-functions. II // Riv. Mat. Univ. Parma. — 2004. — Vol. 7, no. 3. — P. 83—118.

[23] Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi Conf. on Analytic Number Theory (Maiori, 1989) / E. Bombieri et al., eds. — Salerno: Univ. Salerno, 1992. — P. 367—385.

[24] Steuding J. On the universality for functions in the Selberg class // Proc. of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations (Bonn, 2002) / D. R. Heath-Brown, B. Z. Moroz, eds. — (Bonner Math. Schriften; Vol. 360). — Bonn, 2003.

[25] Steuding J. Value-distribution of L-functions and allied zeta-functions — with an emphasis on aspects of universality: Habilitationschrift. — Frankfurt: J. W. Goethe-Universität, 2003.