О распределении по модулю 1 лакунарных и сублакунарных последовательностей: применение конструкции Переса—Шлага*

Н. Г. МОЩЕВИТИН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: moshchevitin@gmail.com

УДК 511.4

Ключевые слова: лакунарные последовательности, плохо приближаемые числа, метод Переса—Шлага, хроматические числа.

Аннотация

Работа содержит результаты о существовании плохо приближаемых чисел в задачах с лакунарными и сублакунарными последовательностями. Основные результаты получены с помощью метода Переса—Шлага.

Abstract

N. G. Moshchevitin, Density modulo 1 *of lacunary and sublacunary sequences*: *application of Peres–Schlag's construction*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 117—138.

The paper is concerned with the existence of badly approximable numbers in problems involving lacunary or sublacunary sequences. The principal results depend upon Peres–Schlag's method.

Введение

Последовательность $\{t_j\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, положительных вещественных чисел называется лакунарной, если для некоторого $M > 0$ выполнено

$$\frac{t_{j+1}}{t_j} \geqslant 1 + \frac{1}{M} \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

А. Я. Хинчин в 1924 году доказал, что для любой последовательности, удовлетворяющей (1), найдутся такие вещественное число α и положительное число γ, что будет выполнено

$$\|t_n\alpha\| \geqslant \gamma \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 06-01-00518, Президента РФ МД-3003.2006.1 и НШ-1312.2006.1, а также INTAS 03-51-5070.

Этот результат опубликован в [17, лемма III]. Его можно также найти в недавнем переиздании трудов А. Я. Хинчина [7]. Отметим, что конструкция А. Я. Хинчина позволяет установить существование вещественного α и положительной абсолютной постоянной γ, таких что

$$\|t_n\alpha\| \geqslant \frac{\gamma}{(M\log M)^2} \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

50 лет спустя, в 1974 году, П. Эрдёш [13] высказал гипотезу, что для произвольной лакунарной последовательности найдётся такое вещественное число α, что дробные доли $\{\alpha t_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, не будут всюду плотны в $[0,1]$. Ответ на вопрос П. Эрдёша естественно следовал из упомянутой теоремы А. Я. Хинчина. Однако этот результат А. Я. Хинчина был забыт. Решение гипотезы П. Эрдёша опубликовали А. Поллингтон [22] и Б. де Матан [18]. Позже количественные уточнения дали И. Кацнельсон [16], Р. К. Ахунжанов и Н. Г. Мощевитин [1], А. Дубицкас [10]. Наилучший известный количественный результат принадлежит И. Пересу и В. Шлагу [21]. Они доказали, что при некоторой положительной постоянной $\gamma > 0$ для каждой рассматриваемой последовательности $\{t_j\}$ найдётся такое вещественное число α, что

$$\|\alpha t_j\| \geqslant \frac{\gamma}{M\log M} \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N}.$$

И. Перес и В. Шлаг использовали оригинальную конструкцию, связанную с применением специального варианта локальной леммы Ловаса.

С другой стороны, Р. К. Ахунжанов и Н. Г. Мощевитин в [2] обобщили конструкцию на случай сублакунарных последовательностей. Они доказали, в частности, что для последовательности $\{t_j\}$, удовлетворяющей условию

$$\frac{t_{j+1}}{t_j} \geqslant 1 + \frac{\gamma}{n^\beta} \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N}, \quad \gamma > 0, \quad \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right],$$

найдётся такое иррациональное вещественное число α, что

$$\liminf_{n\to\infty} (\|t_n\alpha\| \times n^{2\beta}) > 0.$$

Другой результат работы [2] связан с последовательностью натуральных чисел вида $2^m 3^n$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В первом разделе этой статьи мы докажем (следуя конструкции из [21]) многомерный вариант приведённой выше теоремы Переса—Шлага. Раздел 2 посвящён некоторым приложениям оценки Переса—Шлага и её уточнений в теории хроматических чисел дистанционных графов. В разделе 3 мы применим конструкцию из [21] для усиления приведённый результатов из работы [2]. Наши доказательства не будут использовать терминологию теории вероятностей. Основные результаты настоящей работы анонсированы в препринтах автора [19, 20].

Автор считает своим приятным долгом сообщить, что на работу А. Я. Хинчина [17] ему указал И. Рочев.

1. Лакунарные последовательности

1.1. Обозначения и параметры

Обозначим через $\mu(\cdot)$ меру Лебега. Для множества $A \subset \mathbb{R}^d$ пусть

$$A^{\mathrm{c}} = [0,1]^d \setminus A.$$

Пусть $M \geqslant 8$ и $t_1 \geqslant 2$. Нам понадобятся параметры

$$\delta = \frac{1}{2^{11}(M \log M)^{1/d}}, \quad \delta_1 = 2^{4d+1}\delta^d, \quad h = \lceil 2^{3d} M \log M \rceil$$

и

$$l_j = \left\lfloor \log_2 \frac{t_j}{2\delta} \right\rfloor. \tag{2}$$

Отметим, что

$$1 - (16\delta)^d h \geqslant \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$1 - 2\delta_1 h \geqslant \frac{1}{2}, \tag{4}$$

и из условия лакунарности

$$\frac{t_{j+1}}{t_j} \geqslant 1 + \frac{1}{M} \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N}$$

имеем

$$\frac{t_{i+h}}{t_i} \geqslant \left(1 + \frac{1}{M}\right)^h \geqslant M^{2^{3d}\log 2} \geqslant \frac{1}{\delta}. \tag{5}$$

Для доказательства наших результатов нам потребуются множества

$$E(j,a) = \left\{ x \in [0,1] \colon \left| x - \frac{a}{t_j} \right| \leqslant \frac{\delta}{t_j} \right\}.$$

Для целой точки $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ обозначим

$$E(j,\mathbf{a}) = E(j,a_1) \times \ldots \times E(j,a_d).$$

Каждое множество $E_{j,a}$ покрывается открытым двоичным интервалом вида

$$\left(\frac{b}{2^{l_j}}, \frac{b+\varepsilon}{2^{l_j}} \right), \quad \varepsilon \in \{1,2\}.$$

Таким образом, множество

$$\bigcup_{0 \leqslant a_1,\ldots,a_d \leqslant \lceil t_j \rceil} E(j,\mathbf{a}) \cap [0,1]^d$$

покрыто объединением двоичных кубиков вида

$$\left(\frac{b_1}{2^{l_j}}, \frac{b_1+\varepsilon_1}{2^{l_j}} \right) \times \ldots \times \left(\frac{b_d}{2^{l_j}}, \frac{b_d+\varepsilon_d}{2^{l_j}} \right), \quad \varepsilon_k \in \{1,2\}.$$

Обозначим это объединение через A_j. Таким образом,

$$\bigcup_{0\leqslant a_1,\ldots,a_d\leqslant\lceil t_j\rceil} E(j,\mathbf{a})\cap[0,1]^d\subseteq A_j,$$

и дополнение $A_j^{\mathrm{c}}=[0,1]^d\setminus A_j$ можно представить как объединение

$$A_j^{\mathrm{c}}=\bigcup_{1\leqslant\nu\leqslant T_j} I_\nu$$

замкнутых двоичных кубиков вида

$$\left[\frac{b_1}{2^{l_j}},\frac{b_1+1}{2^{l_j}}\right]\times\ldots\times\left[\frac{b_d}{2^{l_j}},\frac{b_d+1}{2^{l_j}}\right]. \tag{6}$$

Более того, множество

$$\bigcap_{j\leqslant i} A_j^{\mathrm{c}}$$

также может быть представлено в виде

$$\bigcap_{j\leqslant i} A_j^{\mathrm{c}}=\bigcup_{1\leqslant\nu\leqslant T_i} I_\nu,$$

где двоичные интервалы I_ν имеют вид (6). Отметим, что

$$\mu(A_j)\leqslant\left(\frac{4\delta}{t_j}\right)^d(\lceil t_j\rceil+1)^d\leqslant(16\delta)^d. \tag{7}$$

1.2. Результаты

Теорема 1.1. *Пусть $d\in\mathbb{N}$ и $t_1\geqslant 2$, $M\geqslant 8$. Тогда для любой последовательности $\{t_j\}$, удовлетворяющей условию* (1), *найдётся такой набор вещественных чисел $(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$, что*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant d}\|\alpha_k t_j\|\geqslant\frac{1}{2^{11}(M\log M)^{1/d}}\quad\text{для всех}\quad j\in\mathbb{N}.$$

Доказательство теоремы 1.1 приведено в разделах 1.3, 1.4.

Для вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)\in\mathbb{R}^d$ обозначим

$$\|\xi\|=\max_{1\leqslant j\leqslant d}\ \min_{a_j\in\mathbb{Z}}|\xi_j-a_j|.$$

Теорема 1.2. *Пусть $d\in\mathbb{N}$ и $t_1\geqslant 2$, $M\geqslant 8$. Пусть последовательность $\{t_j\}$ удовлетворяет условию* (1). *Пусть $\{S_j\}\subset\mathrm{O}_d$ — последовательность ортогональных матриц и $G_j=t_jS_j$. Тогда найдётся такой вещественный вектор $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$, что*

$$\|G_j\alpha\|\geqslant\frac{1}{2^{13}(dM\log M)^{1/d}}\quad\text{для всех}\quad j\in\mathbb{N}.$$

Конечно, постоянные в теоремах 1.1, 1.2 могут быть улучшены.

Следствие. *Найдётся эффективная положительная постоянная Δ со следующим свойством. Для любого комплексного числа $\theta = a + bi$, $|\theta| > 1$, найдётся такое комплексное число α, что для расстояния до ближайшего гауссова целого (в sup-норме) будет справедливо неравенство*

$$\|\theta^j \xi\| \geqslant \Delta \min\left\{\frac{(|\theta|-1)}{\log(2+1/(|\theta|-1))}; 1\right\} \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Следствие вытекает из теоремы 1.2 для $d = 2$, лакунарной последовательности $|\theta^j|$ и последовательности матриц S^j,

$$S = \frac{1}{|\theta|}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Случай $|\theta| > 1$ легко сводится к случаю $|\theta| > 8$.

Мы хотим отметить, что недавно А. Дубицкас [11] доказал следующее утверждение. Пусть $t_0, t_1, t_2, \ldots$ — последовательность ненулевых комплексных чисел, удовлетворяющая условию $|t_{j+1}| \geqslant a|t_j|$ с некоторым вещественным $a > 1$. Пусть ν — некоторое комплексное число. Тогда найдётся такое комплексное число α, что все комплексные числа αt_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, находятся вне квадратов с центрами в точках $\nu + \mathbb{Z}[i]$ со сторонами, параллельными вещественной и мнимой осям, длины которых равны $(a-1)/20$, если $a \in (1, 11 - 4\sqrt{5}]$, и $(a-2)/(a-1)$, если $a > 11 - 4\sqrt{5}$.

1.3. Основная лемма

Лемма 1.1. *Пусть*

$$\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant i} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) \neq 0.$$

Тогда

$$\mu\biggl(A_{i+h} \cap \biggl(\bigcap_{j\leqslant i} A_j^{\mathrm{c}}\biggr)\biggr) \leqslant \delta_1 \mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant i} A_j^{\mathrm{c}}\biggr).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству формулы (3.9) из работы [21]. Имеем

$$\mu\biggl(A_{i+h} \cap \biggl(\bigcap_{j\leqslant i} A_j^{\mathrm{c}}\biggr)\biggr) = \sum_{\nu=1}^{T_i} \mu(A_{i+h} \cap I_\nu).$$

Так как

$$\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant i} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) \neq 0,$$

то сумма здесь непустая, и $T_i \geqslant 1$. Множество A_{i+h} может быть покрыто объединением замкнутых двоичных кубиков вида

$$\left[\frac{b_1}{2^{l_{j+h}}}, \frac{b_1+1}{2^{l_{j+h}}}\right] \times \ldots \times \left[\frac{b_d}{2^{l_{j+h}}}, \frac{b_d+1}{2^{l_{j+h}}}\right].$$

Пусть J — двоичный кубик из покрытия множества A_{i+h} (его мера равна $2^{-dl_{i+h}}$). Если $\mu(J\cap I_\nu)\neq 0$, то $J\subseteq I_\nu$. Пусть

$$I_\nu=\left[\frac{b_1}{2^{l_i}},\frac{b_1+1}{2^{l_i}}\right]\times\ldots\times\left[\frac{b_d}{2^{l_i}},\frac{b_d+1}{2^{l_i}}\right]$$

и кубик J встретился в покрытии кубика $E(i+h,\mathbf{a})$. Тогда

$$\frac{\mathbf{a}}{t_{i+h}}\in\left(\frac{b_1}{2^{l_i}}-\frac{\delta}{t_{i+h}},\frac{b_1+1}{2^{l_i}}+\frac{\delta}{t_{i+h}}\right)\times\ldots\times\left(\frac{b_d}{2^{l_i}}-\frac{\delta}{t_{i+h}},\frac{b_d+1}{2^{l_i}}+\frac{\delta}{t_{i+h}}\right).$$

Пусть W_ν — количество целых точек $\mathbf{a}$, удовлетворяющих указанному условию. Тогда

$$W_\nu\leqslant\left(\left\lfloor\left(\frac{1}{2^{l_i}}+\frac{2\delta}{t_{i+h}}\right)t_{i+h}\right\rfloor+1\right)^d\leqslant(2^{-l_i}t_{i+h}+2)^d. \tag{8}$$

Теперь мы убедимся, что

$$\begin{aligned}\mu\biggl(A_{i+h}\cap\biggl(\bigcap_{j\leqslant i}A_j^{\mathrm{c}}\biggr)\biggr)&\leqslant 2^d\sum_{\nu=1}^{T_i}\frac{2^dW_\nu}{2^{dl_{i+h}}}\leqslant\sum_{\nu=1}^{T_i}\frac{(2^{-l_i}t_{i+h}+2)^d}{2^{dl_{i+h}}}\leqslant\\ &\leqslant 2^{2d}\sum_{\nu=1}^{T_i}\left(\max\left(\frac{2^{-l_i}t_{i+h}}{2^{l_{i+h}}},\frac{1}{2^{l_{i+h}-1}}\right)\right)^d\leqslant\\ &\leqslant 2^{2d}\biggl(\sum_{\nu=1}^{T_i}\mu(I_\nu)\left(\frac{t_{i+h}}{2^{l_{i+h}}}\right)^d+\sum_{\nu=1}^{T_i}\left(\frac{1}{2^{l_{i+h}-1}}\right)^d\biggr).\end{aligned} \tag{9}$$

Но

$$\sum_{\nu=1}^{T_i}\mu(I_\nu)\left(\frac{t_{i+h}}{2^{l_{i+h}}}\right)^d=\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant i}A_j^{\mathrm{c}}\biggr)\left(\frac{t_{i+h}}{2^{l_{i+h}}}\right)^d.$$

Применяя (2), получаем, что

$$l_{i+h}\geqslant\log_2\frac{t_{i+h}}{2\delta}-1,$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{T_i}\mu(I_\nu)\left(\frac{t_{i+h}}{2^{l_{i+h}}}\right)^d\leqslant(4\delta)^d\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant i}A_j^{\mathrm{c}}\biggr). \tag{10}$$

С другой стороны,

$$\sum_{\nu=1}^{T_i}\left(\frac{1}{2^{l_{i+h}-1}}\right)^d=\frac{2^dT_i}{2^{dl_{i+h}}}=2^d\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant i}A_j^{\mathrm{c}}\biggr)\left(\frac{2^{l_i}}{2^{l_{i+h}}}\right)^d,$$

поскольку

$$\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant i}A_j^{\mathrm{c}}\biggr)=T_i2^{-dl_i}.$$

Теперь из (2) вытекает, что

$$\frac{2^{l_i}}{2^{l_{i+h}}} \leqslant 2\frac{t_i}{t_{i+h}}.$$

Применим (5) и получим

$$\sum_{\nu\left(\bigcap_{j\leqslant i} A_j^{\mathrm{c}}\right)=1}^{T_i} \left(\frac{1}{2^{l_{i+h}-1}}\right)^d \leqslant 2^{d+1}\delta^d\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant i} A_j^{\mathrm{c}}\Bigr). \tag{11}$$

Лемма 1.1 вытекает из (9)—(11). □

1.4. Доказательство теоремы 1.1

Используемые здесь рассуждения аналогичны применявшемуся в [21] варианту локальной леммы Ловаса.

Докажем по индукции, что для всех натуральных i выполнено неравенство

$$\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant i} A_j^{\mathrm{c}}\Bigr) \geqslant \frac{1}{2}\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant i-h} A_j^{\mathrm{c}}\Bigr) > 0. \tag{12}$$

1. Основание индукции. Для $i \leqslant 0$ определим $A_i^{\mathrm{c}} = [0,1]^d$. Тогда утверждение тривиально для $i \leqslant 0$. Проверим, что (12) выполнено для $0 \leqslant i \leqslant h$. Достаточно установить, что

$$\mu\Bigl(\bigcap_{1\leqslant j\leqslant h} A_j^{\mathrm{c}}\Bigr) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Но

$$\mu\Bigl(\bigcap_{1\leqslant j\leqslant h} A_j^{\mathrm{c}}\Bigr) \geqslant 1 - \sum_{j=1}^{h}\mu(A_j).$$

Учтём (7). Теперь (13) вытекает из (3).

2. Шаг индукции. Предположим, что (12) выполнено для всех $i \leqslant t$. Имеем

$$\bigcap_{j\leqslant t+1} A_j^{\mathrm{c}} = \biggl(\dots\biggl(\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1-h} A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\setminus A_{t+1-h+1}\biggr)\setminus\dots\biggr)\setminus A_{t+1}.$$

Значит,

$$\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1} A_j^{\mathrm{c}}\Bigr) \geqslant \mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1-h} A_j^{\mathrm{c}}\Bigr) - \sum_{v=1}^{h}\mu\biggl(A_{t-h+1+v}\cap\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1-h} A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\biggr). \tag{14}$$

Заметим, что для рассматриваемых значений v выполнено неравенство $t+1-h \geqslant t+1+v-2h$. Таким образом,

$$\bigcap_{j\leqslant t+1-h} A_j^{\mathrm{c}} \subseteq \bigcap_{j\leqslant t+1+v-2h} A_j^{\mathrm{c}}.$$

Теперь по лемме 1.1 имеем

$$\mu\Bigl(A_{t-h+1+v}\cap\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1-h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\Bigr)\leqslant\mu\Bigl(A_{t-h+1+v}\cap\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1+v-2h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\Bigr)\leqslant \leqslant\delta_1\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1+v-2h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr).$$

Таким образом, для $1\leqslant v\leqslant h$ получаем

$$\mu\Bigl(A_{t-h+1+v}\cap\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1-h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\Bigr)\leqslant\delta_1\mu\Bigl(\bigcap_{1\leqslant t+1-2h+v}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\leqslant\delta_1\mu\Bigl(\bigcap_{1\leqslant t+2-2h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr).$$

Но $h\geqslant 2$, и по индуктивному предположению для $t+2-h$ мы имеем

$$\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1-h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\geqslant\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+2-h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\geqslant\frac{1}{2}\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+2-2h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr).$$

Следовательно,

$$\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+2-2h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\leqslant 2\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1-h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr).$$

Теперь

$$\mu\Bigl(A_{t+1+h-v}\cap\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1-h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\Bigr)\leqslant 2\delta_1\mu\Bigl(\bigcap_{1\leqslant t+1-h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr). \tag{15}$$

Из (14), (15) выводим, что

$$\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr)\geqslant(1-2\delta_1 h)\mu\Bigl(\bigcap_{j\leqslant t+1-h}A_j^{\mathrm{c}}\Bigr),$$

и (12) вытекает из неравенства (4). Теперь из (12) и замкнутости множеств A_i^{c} сразу следует утверждение теоремы 1.1.

1.5. Комментарии к доказательству теоремы 1.2

Доказательство теоремы 1.2 аналогично приведённому доказательству. Вместо параметров δ, δ_1, h нужно использовать величины

$$\delta'=\frac{1}{2^{12}(dM\log M)^{1/d}},\quad \delta_1'=2^{4d+1}d^d(\delta')^d,\quad h'=\lceil 2^{3d+3}M\log M\rceil.$$

Неравенства, аналогичные неравенствам (3)—(5), будут выполнены. Но теперь надо работать с множествами $E'(j,\mathbf{a})=S_j^{-1}E(j,\mathbf{a})$ и их покрытиями двоичными кубиками A_j'. Теперь вместо (7) будет выполняться неравенство

$$\mu(A_j')\leqslant\left(\frac{2(\lceil\sqrt{d}\rceil+1)\delta'}{t_j}\right)^d(\lceil\sqrt{d}t_j\rceil+1)^d\leqslant(16\delta')^d.$$

Вместо леммы 1.1 будет использоваться следующая лемма.

Лемма 1.2. *Пусть*

$$\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant i}(A'_j)^{\mathrm{c}}\biggr)\neq 0.$$

Тогда

$$\mu\biggl(A'_{i+h}\cap\biggl(\bigcap_{j\leqslant i}(A'_j)^{\mathrm{c}}\biggr)\biggr)\leqslant\delta'_1\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant i}(A'_j)^{\mathrm{c}}\biggr).$$

Приведём схему доказательства леммы 1.2. Для числа W'_ν кубиков $E'(j+h,\mathbf{a})$, пересекающихся с кубиком I_ν, имеем неравенство

$$W'_\nu\leqslant(2^{-l_i}t_{i+h}+2\sqrt{d})^d$$

вместо (8). Тогда вместо (9) получаем

$$\mu\biggl(A'_{i+h}\cap\biggl(\bigcap_{j\leqslant i}(A'_j)^{\mathrm{c}}\biggr)\biggr)\leqslant(2\sqrt{d})^d\sum_{\nu=1}^{T_i}\frac{2^dW'_\nu}{2^{dl_{i+h}}}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{2d}d^d\biggl(\sum_{\nu=1}^{T_i}\mu(I_\nu)\left(\frac{t_{i+h}}{2^{l_{i+h}}}\right)^d+\sum_{\nu=1}^{T_i}\left(\frac{1}{2^{l_{i+h}-1}}\right)^d\biggr).$$

Из этих неравенств выводим лемму 1.2.

Вывод теоремы 1.2 из леммы 1.2 практически дословно повторяет рассуждения раздела 1.4.

2. Дистанционные графы в $\mathbb{R}^d$

В этом разделе мы приведём следствия, которые получаются применением подхода Переса—Шлага [21] к задачам, рассматривавшимся в [4].

2.1. Хроматические числа пространств с запрещёнными расстояниями, образующими лакунарную последовательность

Напомним понятие *хроматического числа* метрического пространства. Пусть (X,ρ) — некоторое метрическое пространство и $A\subset\mathbb{R}_+$ — некоторое множество. Хроматическим числом пространства (X,ρ) с множеством запрещённых расстояний A называется минимальное число $\chi\bigl((X,\rho),A\bigr)$ цветов, в которые можно раскрасить пространство X так, чтобы между любыми точками одного цвета не было расстояния в метрике ρ, величина которого принадлежит множеству A. Задача об отыскании и оценках хроматических чисел различных пространств в настоящее время очень популярна (см. обзоры [5,25]).

В этом разделе рассматривается пространство $X=\mathbb{R}^d$, в котором метрика порождена некоторой нормой, а множество $A=\{t_n\}_{n=1}^\infty$ представляет собой лакунарную последовательность. Общеизвестно, что в случае $d = 1$ (задача о конечности рассматриваемого хроматического числа восходит к Эрдёшу; историю вопроса можно найти, например, в [16, 21]) существование такого вещественного α, что $\|\alpha t_n\| \geqslant h$ для всех натуральных n, влечёт оценку $\chi\big((\mathbb{R}, |\cdot|), A\big) \leqslant h$. Для лакунарных последовательностей, удовлетворяющих (1), оценка

$$\chi\big((\mathbb{R}, |\cdot|), A\big) \ll M \log M$$

имеется в работе [21]. Из нашей теоремы получается неравенство

$$\chi\big((\mathbb{R}, |\cdot|), A\big) \leqslant 2^{11} M \log M.$$

Хорошо известно, что эти оценки точны (с точностью до логарифмического множителя). С другой стороны, И. Кацнельсон и Б. Вайс [15] доказали, что если рассматривается двумерная плоскость с евклидовой метрикой, а множество A неограниченно, то *измеримое* хроматическое число $\chi_\mu\big((\mathbb{R}^2, l_2), A\big)$ равно бесконечности (когда речь идёт об измеримом хроматическом числе, предполагается, что точки, раскрашенные в одинаковый цвет, образуют измеримое по Лебегу множество). Более изящное доказательство более общего утверждения (использующее гармонический анализ) имеется у Ж. Бургена [9].

Теорема 2.1. *Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^d$ такую норму $F(\mathbf{x})$, что область $\mathcal{F} = \{\mathbf{x}\colon F(\mathbf{x}) \leqslant 1\}$ представляет собой центрально симметричный многогранник с $2g$ гипергранями. Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Тогда если задано бесконечное множество $A = \{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, представляющее собой лакунарную последовательность, и выполнено* (1) *при $M \geqslant 8$, то*

$$\chi\big((\mathbb{R}^d, f), A\big) \leqslant (2^{11} M \log M)^g.$$

Из теоремы 2.1, применённой для l_1-нормы, сразу вытекает неравенство

$$\chi\big((\mathbb{R}^n, l_1), A\big) \leqslant (2^{11} M \log M)^{2^{n-1}}.$$

Приведём результат о нижних оценках рассматриваемых хроматических чисел из [4], полученный А. М. Райгородским методом альтернирования (см. [6]).

Теорема (А. М. Райгородский). *Пусть $p \in \{1, 2\}$. Каково бы ни было M, найдётся такой набор чисел $a_1 > 0, \ldots,\ a_k > 0$, удовлетворяющих условию*

$$1 + \frac{1}{M} \leqslant \frac{a_i}{a_{i-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{c \log M} \quad \text{для всех} \quad i = 2, \ldots, k$$

при некотором постоянном $c > 0$, что

$$\chi\big((\mathbb{R}^d, l_p), \{a_1, \ldots, a_k\}\big) \geqslant (c_1 M)^{c_2 d},$$

где $c_1, c_2 > 0$ — абсолютные константы.

2.2. Монохроматические барицентрические наборы

В [4] обсуждалась ещё одна задача. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^d$ с евклидовой нормой и через $\mathbf{x}^2$ обозначим скалярный квадрат вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Пусть $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_t\}$ — такой набор точек d-мерного пространства $\mathbb{R}^d$, что $\mathbf{b}_1 + \ldots + \mathbf{b}_t = 0$, и $\mathcal{V} = \mathcal{B} \cup 0$. Определим

$$\sigma(\mathcal{V}) = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{b}_i^2.$$

Теорема 2.2. *Пусть $M_1 = \lceil M^2/(2M+1) \rceil \geqslant 8$, $A = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ — лакунарная последовательность, удовлетворяющая* (1), *а множество точек $\mathcal{V}$ устроено так, как описано выше. Тогда пространство $\mathbb{R}^d$ можно раскрасить в $\lceil 2^{11} d M_1 \log M_1 \rceil$ цветов так, что любая изометрическая копия каждого из множеств $t_n\mathcal{V}$ не будет являться монохроматической.*

Доказательство теорем 2.1, 2.2 можно получить, если в рассуждениях из [4] применить новую оценку теоремы 1.1 вместо оценки Ахунжанова—Мощевитина.

3. Сублакунарные последовательности

В этом разделе мы докажем результаты, аналогичные теореме Переса—Шлага [21], для последовательностей сублакунарного роста.

3.1. Результаты

Пусть $1 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots t_n < t_{n+1} < \ldots$ — строго возрастающая последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$. Для последовательности $\{t_n\}$ определим функцию $H(n,\tau)$:

$$H(n,\tau) = \min\left\{k \in \mathbb{N}\colon \frac{t_{n+k}}{t_n} \geqslant \tau\right\}. \tag{16}$$

Теорема 3.1. *Пусть $0 < \eta < 1$. Рассмотрим такую последовательность натуральных чисел $\{h(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, что для каждого натурального n при условии $n > h(n)$ функция $n \mapsto n - h(n)$ будет возрастающей. Пусть $\{\delta(n)\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность вещественных чисел. Пусть последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=0}^{K}$ удовлетворяет равенству*

$$n_k = n_{k+1} - h(n_{k+1}) \tag{17}$$

для $0 \leqslant k \leqslant K-1$. Пусть наши последовательности удовлетворяют также следующим условиям:

(i) *для натурального n, такого что $n > h(n)$, выполнено неравенство*

$$h(n) \geqslant H\left(n - h(n), \frac{1}{\delta}\big(n - h(n)\big)\right);$$

(ii) *для произвольного $k \leqslant K-1$ выполнено неравенство*

$$\sum_{v=n_k+1}^{n_{k+1}-1} \delta(v) \leqslant \frac{(1-\eta)\eta}{4};$$

(iii) *для $k=0$ выполнено неравенство*

$$\sum_{v=1}^{n_0}\delta(v)\leqslant\frac{1-\eta}{16}.$$

Тогда для множества

$$\mathcal{A}_K=\{\alpha\in[0,1]\colon \|t_n\alpha\|>\delta(n)\ \text{для каждого}\ n\leqslant n_K\}$$

будет выполнено

$$\mu(\mathcal{A}_K)\geqslant\eta^{K+1}.$$

Отметим, что множества $\mathcal{A}_K$ являются замкнутыми и вложенными друг в друга: $\mathcal{A}_{K+1}\subseteq\mathcal{A}_K$. Более того, для произвольного натурального N мы можем построить такую последовательность $\{n_k\}$, что $n_K=N$, выполнены равенства (17), $n_0=n_1-h(n_1)\geqslant 1$, но $n_0-h(n_0)\leqslant 0$. Таким образом, в качестве следствия теоремы 3.1 мы немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть $0<\eta<1$. Рассмотрим такую последовательность натуральных чисел $\{h(n)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$, что для натуральных n, удовлетворяющих условию $n>h(n)$, функция $n\mapsto n-h(n)$ является возрастающей. Пусть последовательность вещественных чисел $\{\delta(n)\}_{n=1}^{\infty}$ убывает. Пусть эти последовательности удовлетворяют следующим условиям*:

(i$'$) *для любого натурального n, такого что $n>h(n)$, выполнено неравенство*

$$h(n)\geqslant H\left(n-h(n),\frac{1}{\delta}\bigl(n-h(n)\bigr)\right);$$

(ii$'$) *для любого натурального n, такого что $n>h(n)$, выполнено неравенство*

$$\sum_{v=n-h(n)+1}^{n-1}\delta(v)\leqslant\frac{(1-\eta)\eta}{4};$$

(iii$'$) *для любого натурального n, такого что $n\leqslant h(n)$, выполнено неравенство*

$$\sum_{v=1}^{n}\delta(v)\leqslant\frac{1-\eta}{16}.$$

Тогда множество

$$\mathcal{A}=\{\alpha\in[0,1]\colon \|t_n\alpha\|>\delta(n)\ \text{для каждого}\ n\in\mathbb{N}\}$$

непусто.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2 и для некоторой бесконечной последовательности $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ натуральных чисел, удовлетворяющей (17), мы знаем, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\eta^k}\cdot\left(\frac{t_{n_k}}{\delta(n_k)}\right)^{\nu}\Big/\left(\frac{t_{n_{k-1}}}{\delta(n_{k-1})}\right)\tag{18}$$

сходится при всех $\nu<\nu_0$. Тогда размерность Хаусдорфа множества $\mathcal{A}$ не меньше, чем ν_0.

Подробное доказательство теоремы 3.1 приводится в разделах 3.2, 3.3. В разделе 3.4 мы приводим схему доказательства теоремы 3.3. В разделе 3.5 мы рассматриваем некоторые примеры использования общих результатов.

3.2. Леммы

Для $n \geqslant 1$ определим

$$l_n = \left\lfloor \log_2 \left(\frac{t_n}{2\delta(n)} \right) \right\rfloor. \tag{19}$$

Из монотонности последовательностей t_n и $\delta(n)$ вытекает, что $l_{n+1} \geqslant l_n$. Положим

$$E(n,a) = \left[\frac{a}{t_n} - \frac{\delta(n)}{t_n}, \frac{a}{t_n} + \frac{\delta(n)}{t_n} \right].$$

Пусть A_n — объединение двоичных интервалов вида

$$\left(\frac{b}{2^{l_n}}, \frac{b+\varepsilon}{2^{l_n}} \right), \quad b \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \in \{1,2\},$$

покрывающих множество

$$\bigcup_{0 \leqslant a \leqslant \lceil t_n \rceil} E(n,a) \cap [0,1].$$

Таким образом,

$$\bigcup_{0 \leqslant a \leqslant \lceil t_n \rceil} E(n,a) \cap [0,1] \subseteq A_n.$$

Пусть снова $A_n^{\mathrm{c}} = [0,1] \setminus A_n$. Отметим, что

$$\mu(A_n) \leqslant (\lceil t_n \rceil + 1) \frac{2\delta(n)}{t_n} \leqslant 16\delta(n)$$

и

$$\mu\biggl(\bigcap_{n \leqslant n_0} A_n^{\mathrm{c}} \biggr) \geqslant 1 - 16 \sum_{n=1}^{n_0} \delta(n). \tag{20}$$

Лемма 3.1. *Пусть $n > h(n)$. Пусть выполнено условие* (i) *и*

$$\mu\biggl(\bigcap_{j \leqslant n-h(n)} A_j^{\mathrm{c}} \biggr) > 0.$$

Тогда

$$\mu\biggl(\bigcap_{j \leqslant n-h(n)} A_j^{\mathrm{c}} \cap A_n \biggr) \leqslant 4\delta(n) \mu\biggl(\bigcap_{j \leqslant n} A_j^{\mathrm{c}} \biggr). \tag{21}$$

Доказательство. Множество

$$\bigcap_{j \leqslant n-h(n)} A_j^{\mathrm{c}}$$

может быть представлено в виде объединения

$$\bigcap_{j\leqslant n-h(n)} A_j^{\mathrm{c}} = \bigcup_{\nu=1}^{T} I_\nu \tag{22}$$

двоичных интервалов $I_\nu = I_\nu^{(n-h(n))}$ вида

$$\left[\frac{b}{2^{l_{n-h(n)}}}, \frac{b+1}{2^{l_{n-h(n)}}}\right], \quad b\in\mathbb{Z},$$

где $T\geqslant 1$. Теперь множество $A_n\cap I_\nu$ можно представить в виде объединения

$$A_n\cap I_\nu = \bigcup_{i=1}^{W_\nu} J_i$$

интервалов J_i вида

$$\left[\frac{b}{2^{l_n)}}, \frac{b+1}{2^{l_n}}\right].$$

Более того,

$$W_\nu \leqslant \left\lfloor \left(\frac{1}{2^{l_{n-h(n)}}} + \frac{\delta(n)}{2^{l_n}}\right) t_n \right\rfloor + 1 \leqslant \frac{t_n}{2^{l_{n-h(n)}}} + 2.$$

Таким образом,

$$\mu(A_n\cap I_\nu) = \frac{W_\nu}{2^{l_n}}$$

и

$$\begin{aligned}\mu\Biggl(\bigcap_{j\leqslant n-h(n)} A_j^{\mathrm{c}}\cap A_n\Biggr) &\leqslant \frac{T}{2^{l_n}}\left(\frac{t_n}{2^{l_{n-h(n)}}}+2\right) = \\ &= \mu\Biggl(\bigcap_{j\leqslant n-h(n)} A_j^{\mathrm{c}}\Biggr)\frac{2^{l_{n-h(n)}}}{2^{l_n}}\left(\frac{t_n}{2^{l_{n-h(n)}}}+2\right) = \\ &= \mu\Biggl(\bigcap_{j\leqslant n-h(n)} A_j^{\mathrm{c}}\Biggr)\left(\frac{t_n}{2^{l_n}}+2\cdot\frac{2^{l_{n-h(n)}}}{2^{l_n}}\right).\end{aligned}$$

Но

$$\frac{t_n}{2^{l_n}} \leqslant 2\delta(n) \tag{23}$$

следует из определения величины l_n (формула (19)). Для второго слагаемого из условия (i) и определения (16) функции $H(\cdot,\cdot)$ имеем

$$\frac{2^{l_{n-h(n)}}}{2^{l_n}} \leqslant 2\cdot\frac{t_{n-h(n)}}{t_n}\cdot\frac{\delta(n)}{\delta(n-h(n))} \leqslant 2\delta(n). \tag{24}$$

Теперь лемма 3.1 вытекает из соотношений (23), (24). $\square$

Для натурального τ и $0\leqslant v\leqslant h(\tau)$ определим $\tau_v = \tau - h(\tau) + v$. Заметим, что $\tau_{h(\tau)} = \tau$ и $\tau_0 = \tau - h(\tau)$. Заметим также, что $\tau_0 \leqslant \tau_v \leqslant \tau$.

Лемма 3.2. *Пусть функция* $n - h(n)$ *возрастает и выполнено условие* (i). *Пусть для* $\tau_0 > h(\tau_0)$ *при некотором положительном* η *выполнено неравенство*

$$\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau_0} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) \geqslant \eta\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau_0-h(\tau_0)} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) > 0. \tag{25}$$

Тогда

$$\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) \geqslant \biggl(1-\frac{4}{\eta}\sum_{v=\tau_1}^{\tau-1}\delta(v)\biggr)\times\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau_0} A_j^{\mathrm{c}}\biggr). \tag{26}$$

Доказательство. Имеем

$$\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) = \mu\biggl(\biggl(\dots\biggl(\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau-h(\tau)} A_j^{\mathrm{c}}\biggr)\setminus A_{\tau-h(\tau)+1}\biggr)\setminus\dots\biggr)\setminus A_\tau\biggr) \geqslant$$
$$\geqslant \mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau-h(\tau)} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) - \sum_{v=1}^{h(\tau)}\mu\biggl(A_{\tau_v}\cap\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau-h(\tau)} A_j^{\mathrm{c}}\biggr)\biggr).$$

Но поскольку $\tau_v \leqslant \tau$, то из условия монотонности $n-h(n)$ получаем $\tau - h(\tau) \geqslant \geqslant \tau_v - h(\tau_v)$. Таким образом,

$$\bigcap_{j\leqslant\tau-h(\tau)} A_j^{\mathrm{c}} \subseteq \bigcap_{j\leqslant\tau_v-h(\tau_v)} A_j^{\mathrm{c}}. \tag{27}$$

Теперь мы видим, что

$$\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) \geqslant \mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau-h(\tau)} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) - \sum_{v=1}^{h(\tau)}\mu\biggl(A_{\tau_v}\cap\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau_v-h(\tau_v)} A_j^{\mathrm{c}}\biggr)\biggr).$$

Воспользуемся леммой 3.1 для $n = \tau_v$, $v = 1,\dots,h(\tau)$. Это возможно, поскольку из (27) и

$$\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau-h(\tau)} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) > 0$$

следует, что неравенство

$$\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau_v-h(\tau_v)} A_j^{\mathrm{c}}\biggr) > 0$$

выполняется для всех v. Получаем неравенство

$$\mu\biggl(A_{\tau_v}\cap\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau_v-h(\tau_v)} A_j^{\mathrm{c}}\biggr)\biggr) \leqslant 4\delta(\tau_v)\mu\biggl(\bigcap_{j\leqslant\tau_v-h(\tau_v)} A_j^{\mathrm{c}}\biggr).$$

Теперь

$$\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau} A_j^{\mathrm{c}}\Big) \geqslant \mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau-h(\tau)} A_j^{\mathrm{c}}\Big) - 4\Big(\sum_{v=1}^{h(\tau)}\delta(\tau_v)\Big)\max_{1\leqslant v<h(\tau)}\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau_v-h(\tau_v)} A_j^{\mathrm{c}}\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau-h(\tau)} A_j^{\mathrm{c}}\Big) - 4\Big(\sum_{v=1}^{h(\tau)}\delta(\tau_v)\Big)\max_{0\leqslant v<h(\tau)}\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau_v-h(\tau_v)} A_j^{\mathrm{c}}\Big).$$

Но у нас есть условие монотонности функции $n-h(n)$, поэтому максимум здесь достигается при $v=0$. Следовательно,

$$\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau} A_j^{\mathrm{c}}\Big) \geqslant \mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau-h(\tau)} A_j^{\mathrm{c}}\Big) - 4\Big(\sum_{v=1}^{h(\tau)}\delta(\tau_v)\Big)\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau_0-h(\tau_0)} A_j^{\mathrm{c}}\Big).$$

Применим неравенство (25):

$$\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau} A_j^{\mathrm{c}}\Big) \geqslant \mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau-h(\tau)} A_j^{\mathrm{c}}\Big) - \frac{4}{\eta}\Big(\sum_{v=1}^{h(\tau)}\delta(\tau_v)\Big)\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant\tau_0} A_j^{\mathrm{c}}\Big).$$

Вспомним, что $\tau_0=\tau-h(\tau)$, и сразу получим утверждение леммы 3.2. □

3.3. Доказательство теоремы 3.1

Из условия (iii) теоремы 3.1 и (20) следует, что

$$\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant n_0} A_j^{\mathrm{c}}\Big) \geqslant \eta \geqslant \eta\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant n_0-h(n_0)} A_j^{\mathrm{c}}\Big).$$

Это неравенство представляет собой основание индукции. Неравенство индуктивного шага

$$\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant n_{k+1}} A_j^{\mathrm{c}}\Big) \geqslant \eta\mu\Big(\bigcap_{j\leqslant n_k} A_j^{\mathrm{c}}\Big)$$

вытекает из условия (ii) и леммы 3.2: надо положить $\tau=n_{k+1}$, тогда $\tau_0=n_k$. По индуктивному предположению имеем (25). Условие (ii) влечёт выполнение неравенства

$$1-\frac{4}{\eta}\sum_{v=\tau_1}^{\tau-1}\delta(v) \geqslant \eta.$$

3.4. Схема доказательства теоремы 3.3

Для того чтобы доказать теорему 3.3, нужно сделать следующее. В доказательстве теоремы 3.1 вместо неравенства (21) леммы 3.1 нужно доказать неравенство

$$\mu\big(I_\nu^{(n-h(n))}\cap A_n\big) \leqslant 4\delta(n)\mu\big(I_\nu^{(n-h(n))}\big),$$

где $I_\nu^{(n-h(n))}$ из разбиения (22). Затем при условии

$$\mu\big(I_{\nu'}^{(\tau_0-h(\tau_0))}\cap A_{\tau_0}\big)\geqslant \eta\mu\big(I_\nu^{(\tau_0-h(\tau_0))}\big)>0$$

нужно доказать вместо неравенства (26) леммы 3.2 неравенство

$$\mu\bigg(I_\nu^{(\tau_0)}\cap\bigg(\bigcap_{j\leqslant\tau}A_j^{\mathrm{c}}\bigg)\bigg)\geqslant\bigg(1-\frac{4}{\eta}\sum_{v=\tau_1}^{\tau-1}\delta(v)\bigg)\mu\big(I_\nu^{(\tau_0)}\big).$$

Последнее неравенство означает, что в каждом интервале $I_\nu^{(\tau_0)}$ найдётся не менее чем

$$N=\frac{\mu\big(I_\nu^{(\tau_0)}\cap\big(\bigcap_{j\leqslant\tau}A_j^{\mathrm{c}}\big)\big)}{\mu(I_{\nu'}^{(\tau)})}\geqslant\eta 2^{l_\tau-l_{\tau_0}}$$

попарно непересекающихся интервалов вида $I_{\nu'}^{(\tau)}$. Затем (так же, как это было сделано в [2]) нужно использовать сходимость ряда (18) и применить следующую хорошо известную теорему.

Теорема (Х. Эгглестон [12]). *Рассмотрим при каждом натуральном k множества*

$$A_k=\bigsqcup_{i=1}^{R_k}I_k(i),$$

где $I_k(i)$ — отрезки вещественной прямой длины $|I_k(i)|=\Delta_k$. Пусть каждый интервал $I_k(i)$ содержит в точности $N_{k+1}>1$ попарно непересекающихся подынтервалов $I_{k+1}(i')$ длины Δ_{k+1} из множества A_{k+1}. Пусть $R_{k+1}=R_k\cdot N_{k+1}$. Предположим, что $0<\nu_0\leqslant 1$ и что для каждого $0<\nu<\nu_0$ ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}(R_k(\Delta_k)^\nu)^{-1}$$

сходится. Тогда хаусдорфова размерность $\mathrm{HD}(A)$ множества

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$$

не меньше ν_0.

3.5. Примеры

В этом разделе мы приводим ряд применений наших общих результатов.

A. Сублакунарные последовательности

Пусть последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \geqslant 1 + \frac{\gamma}{n^\beta}, \quad 0 \leqslant \beta < 1, \quad \gamma > 0. \tag{28}$$

Возьмём $\eta < 1$, близкое к 1, и

$$h(n) = \lfloor c_1 n^\beta \log(n + c_2) \rfloor, \quad \delta(n) = \frac{(1-\beta)(1-\eta)\eta}{2^5 c_1 (n + c_2)^\beta \log(n + c_2)}. \tag{29}$$

Здесь большие положительные постоянные c_1, c_2 (зависящие от β и η) определяются следующим образом. В нашем случае при условии $n > h(n)$ для некоторого $\gamma_1 < \gamma_1$ имеем

$$\frac{t_n}{t_{n-h(n)}} \geqslant \prod_{j=n-h(n)}^{n-1} \left(1 + \frac{\gamma}{j^\beta}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \exp\biggl(\sum_{j=n-h(n)}^{n-1} \log \left(1 + \frac{\gamma}{j^\beta}\right)\biggr) \geqslant \exp\left(\omega \frac{h(n)}{n^\beta}\right) \geqslant (n + c_2)^{\omega c_1},$$

где $\omega = \omega(\beta, \gamma_1)$. Пусть $c_1 = c_1(\beta, \eta)$ — большая положительная постоянная, такая что для всех положительных $y \geqslant 2$ выполнено

$$y^{\omega c_1} \geqslant \frac{2^5 c_1 y^\beta \log y}{(1-\beta)(1-\eta)\eta}.$$

Тогда

$$\frac{t_n}{t_{n-h(n)}} \geqslant (n + c_2)^{\omega c_1} \geqslant \frac{2^5 c_1 (n + c_2)^\beta \log(n + c_2)}{(1-\beta)(1-\eta)\eta} = \frac{1}{\delta(n)} \geqslant \frac{1}{\delta(n - h(n))},$$

и условие (i′) теоремы 3.2 выполнено.

Итак, мы определили c_1, теперь определим c_2. Постоянная $c_2 = c_2(\beta)$ берётся настолько большой, чтобы выполнялись неравенства

$$\max_{n \in \mathbb{N}} \frac{4 c_1 \log(n + c_2)}{(n + c_2)^{1-\beta}} \leqslant 1, \tag{30}$$

$$h\left(\frac{1}{2^5 \delta(0)}\right) = \left\lfloor c_1 \left(\frac{c_1 c_2^\beta \log c_2}{(1-\beta)(1-\eta)\eta}\right)^\beta \log\left(\frac{2^2 c_1 c_2^\beta \log c_2}{1-\beta} + c_2\right)\right\rfloor \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^5 \delta(0)} = \frac{c_1 c_2^\beta \log c_2}{(1-\beta)(1-\eta)\eta}, \tag{31}$$

$$\min_{y \geqslant 1} \left((1-\beta)\log(y + c_2) - \frac{y}{y + c_2}\right) > 0. \tag{32}$$

Тогда из (30) следует, что
$$\frac{h(n)}{n+c_2} \leqslant \frac{1}{2},$$
и при $n > h(n)$ мы имеем
$$\begin{aligned}\sum_{v=n-h(n)+1}^{n-1} \delta(v) &\leqslant \frac{(1-\beta)(1-\eta)\eta}{2^5 c_1 \log(n-h(n)+c_2)} \sum_{v=n-h(n)+1}^{n-1} \frac{1}{v^\beta} \leqslant \\ &\leqslant (1-\eta)\eta \frac{n^{1-\beta}-(n-h(n))^{1-\beta}}{2^4 c_1 \log(n-h(n)+c_2)} \leqslant \frac{(1-\eta)\eta h(n)}{2^4 c_1 n^\beta \log(n-h(n)+c_2)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{(1-\eta)\eta \log(n+c_2)}{2^3 \log(n-h(n)+c_2)} = \frac{(1-\eta)\eta}{2^3} \frac{\log(n+c_2)}{\log(n+c_2)+\log\bigl(1-\frac{h(n)}{n+c_2}\bigr)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{(1-\eta)\eta}{2^3} \frac{\log(n+c_2)}{\log(n+c_2)-\log 2} \leqslant \frac{(1-\eta)\eta}{4}.\end{aligned}$$
Таким образом, условие (ii$'$) теоремы 3.2 выполняется.

Более того, для величины
$$n_0 = n_0(\beta, c_1, c_2) = \max\{n \in \mathbb{N} \colon n \leqslant h(n)\}$$
из (31) получаем, что
$$n_0 \leqslant \frac{1}{2^5 \delta(0)},$$
и условие (iii$'$) теоремы 3.2 тоже выполняется.

Также мы должны отметить, что если $y \geqslant 1$ и $y > h(y) \geqslant c_1 y^\beta \log(y+c_2)$, то функция $y - c_1 y^\beta \log(y+c_2)$ возрастает, поскольку из (32) вытекает, что
$$\begin{aligned}\bigl(y - c_1 y^\beta \log(y+c_2)\bigr)' &= 1 - \beta c_1 y^{\beta-1} \log(y+c_2) - \frac{c_1 y^\beta}{y+c_2} = \\ &= c_1 y^{\beta-1}\left((1-\beta)\log(y+c_2) - \frac{y}{y+c_2}\right) > 0.\end{aligned}$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.2. Согласно этой теореме множество
$$\mathcal{B} = \Bigl\{\alpha \in [0,1] \colon \text{найдётся такое } \varkappa > 0, \ \text{что для каждого } n \in \mathbb{N} \text{ справедливо } \|t_n\alpha\| > \frac{\varkappa}{n^\beta \log(n+1)}\Bigr\}$$
непусто (и, очевидно, несчётно).

Заметим, что множество
$$\{n \in \mathbb{N} \colon n \leqslant h(n)\}$$
в нашем случае конечно. Следовательно, легко можно построить последовательность $\{n_k\}$, удовлетворяющую равенствам (17).

Если в дополнение к (28) известно, что

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \leqslant 1 + \frac{\gamma_2}{n^\beta} \tag{33}$$

при некотором $\gamma_2 > \gamma$, то для последовательности $\{n_k\}$ получаем, что $t_{n_k} \leqslant$ $\leqslant t_{n_{k-1}} n^{\gamma_3}$ и $k \leqslant \gamma_4 n_k^{1-\beta}$ при некоторых положительных γ_3, γ_4. Тогда

$$\frac{1}{\eta^k} \cdot \frac{t_{n_k}^\nu}{t_{n_{k-1}}} \ll \frac{1}{e^{\gamma_5 n_k^{1-\beta}}} \cdot \frac{1}{\eta^k} \ll \frac{1}{(e^{\gamma_5}\eta^{\gamma_5})^{n^{1-\beta}}}$$

(здесь ни одна постоянная γ_j не зависит от η), и для η, близкого к 1, ряд (18) будет сходиться. Из теоремы 3.3 теперь будет следовать, что хаусдорфова размерность множества $\mathcal{B}$ равна 1.

Следует отметить, что можно выбрать функцию $h(n)$ так, чтобы условия теоремы 3.3 выполнялись без дополнительного предположения (33) о скорости роста последовательности t_n (фактически, так, как это было сделано в [2]).

Автору кажется интересным исследовать свойства типа *выигрышности* рассматриваемых множеств (определение и свойства выигрышных множеств можно найти в [23, 24], некоторый частичный результат имеется в [3]).

B. Субэкспоненциальные последовательности

Пусть последовательность $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию

$$\exp(\gamma_1 n^\beta) \leqslant t_n \leqslant \exp(\gamma_2 n^\beta), \quad 0 < \beta < 1, \quad \gamma_{1,2} > 0. \tag{34}$$

Тогда по аналогии с примером A мы получаем, что размерность Хаусдорфа множества

$$\Bigl\{\alpha \in [0,1] \colon \text{найдётся такое } \varkappa > 0, \\ \text{что для каждого } n \in \mathbb{N} \text{ справедливо } \|t_n\alpha\| > \frac{\varkappa}{n^{1-\beta}\log(n+1)}\Bigr\}$$

равна 1.

C. Последовательность Фюрстенберга

Рассмотрим множество натуральных чисел вида $2^n 3^m$, составляющих возрастающую последовательность

$$s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ s_3 = 3,\ s_4 = 4,\ s_5 = 6,\ s_6 = 8, \dots .$$

Х. Фюрстенберг [14] (см. также [8]) доказал, что для любого вещественного иррационального α множество дробных долей $\{2^n 3^m \alpha\}$ всюду плотно в отрезке $[0,1]$. В частности,

$$\liminf_{n\to\infty} \|s_n\alpha\| = 0.$$

Следует отметить, что автору ничего не известно о скорости стремления к нулю в этом предельном равенстве. Если $\alpha = 1/5$, то, очевидно, $\|s_n/5\| \geqslant 1/5$. Но $1/5$ — это рациональное число.

Последовательность $\{s_n\}$ удовлетворяет условию (34) при $\beta = 1/2$. Следовательно, из примера B вытекает, что размерность Хаусдорфа множества

$$\Big\{\alpha \in [0,1] \colon \text{найдётся такое } \varkappa > 0, \\ \text{что для каждого } n \in \mathbb{N} \text{ справедливо } \|s_n\alpha\| > \frac{\varkappa}{\sqrt{n}\log(n+1)}\Big\}$$

равна 1.

Литература

[1] Ахунжанов Р. К., Мощевитин Н. Г. О хроматическом числе дистанционного графа, связанного с лакунарной последовательностью // Докл. РАН. — 2004. — Т. 397, № 3. — С. 295—296.

[2] Ахунжанов Р. К., Мощевитин Н. Г. О распределении по $\mathrm{mod}\,1$ субэкспоненциальных последовательностей // Мат. заметки. — 2005. — Т. 77, № 6. — С. 803—813.

[3] Мощевитин Н. Г. О сублакунарных последовательностях и выигрышных множествах // Мат. заметки. — 2005. — Т. 78, № 4. — С. 634—637.

[4] Мощевитин Н. Г., Райгородский А. М. О раскрасках пространства $\mathbb{R}^n$ с несколькими запрещёнными расстояниями // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 5. — С. 733—744.

[5] Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107—146.

[6] Райгородский А. М. Проблема Эрдёша—Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов // Мат. сб. — 2005. — Т. 196, № 1. — С. 123—156.

[7] Хинчин А. Я. Избранные труды по теории чисел. — М.: МЦНМО, 2006.

[8] Boshernitzan M. D. Elementary proof of Fürstenberg's Diophantine result // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 122. — P. 67—70.

[9] Bourgain J. A Szemeredi type theorem for sets of positive density in $\mathbb{R}^k$ // Israel J. Math. — 1986. — Vol. 54, no. 3. — P. 307—316.

[10] Dubickas A. On the fractional parts of lacunary sequences // Math. Scand. — 2006. — Vol. 99. — P. 136—146.

[11] Dubickas A. *On the Distribution of Powers of a Complex Number*, Preprint (2007).

[12] Eggleston H. G. Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory // Proc. London Math. Soc. — 1951—1952. — Vol. 54. — P. 42—93.

[13] Erdős P. Repartition mod 1. — New York: Springer, 1975. — (Lect. Notes Math.; Vol. 475).

[14] Fürstenberg H. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation // Math. Systems Theory. — 1967. — Vol. 1. — P. 1—49.

[15] Fürstenberg H., Katznelson Y., Weiss B. Ergodic theory and configurations in sets of positive density // Mathematics of Ramsey Theory. — Berlin: Springer, 1990. — (Algorithms and Combinatorics; Vol. 5). — P. 184—198.

[16] Katznelson Y. Chromatic numbers of Cayley graphs on $\mathbb{Z}$ and recurrence // Combinatorica. — 2001. — Vol. 21. — P. 211—219.

[17] Khintchine A. Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1926. — Vol. 50. — P. 170—195.

[18] De Mathan B. Numbers contravening a condition in density modulo 1 // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1980. — Vol. 36. — P. 237—241.

[19] Moshchevitin N. G. A version of the proof for Peres–Schlag's theorem on lacunary sequences. — 2007. — `arXiv:math.NT/0708.2087v2`.

[20] Moshchevitin N. G. Density modulo 1 of sublacunary sequences: application of Peres–Schlag's arguments. — 2007. — `arXiv:math.NT/0709.3419v2`.

[21] Peres Y., Schlag W. Two Erdős problems on lacunary sequences: chromatic numbers and Diophantine approximations. — 2007. — `arXiv:math.CO/0706.0223v1`.

[22] Pollington A. D. On the density of the sequence $\{n_k\theta\}$ // Illinois J. Math. — 1979. — Vol. 23, no. 4. — P. 511—515.

[23] Schmidt W. M. On badly approximable numbers and certain games // Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 623. — P. 178—199.

[24] Schmidt W. M. Diophantine Approximations. — Berlin: Springer, 1980. — (Lect. Notes Math.; Vol. 785).

[25] Székely L. A. Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // Paul Erdős and his Mathematics. Papers from the Conference Held in Budapest, July 4–11, 1999. — Budapest: J. Bolyai Math. Soc.; Berlin: Springer, 2002. — (Bolyai Soc. Math. Stud.; Vol. 11). — P. 649—666.