Линейные формы от дзета-значений, возникающие из интегралов типа Сорокина

Т. РИВОАЛЬ
Лионский университет I им. Клода Бернара, Франция
e-mail: tanguy.rivoal@math.univ-lyon1.fr

УДК 511.4

Ключевые слова: дзета-значения, линейные формы, кратные интегралы.

Аннотация

В работе рассматриваются некоторые кратные интегралы, которые представляются в виде линейных комбинаций дзета-значений с рациональными коэффициентами.

Abstract

T. Rivoal, Linear forms in zeta values arising from certain Sorokin-type integrals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 161—172.

This paper deals with certain multiple integrals which can be represented as linear forms of zeta values with rational coefficients.

1. Формулировка результата

Для некоторых фиксированных целых чисел $n \geqslant 0$ и $s \geqslant 3$ определим *интеграл типа Сорокина*:

$$I_n(s) := \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod\limits_{j=1}^{s} z_j^n (1-z_j)^n}{\prod\limits_{j=2}^{s} (1-z_1 z_2 \cdots z_j)^{n+1}} \, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_s.$$

В. Н. Сорокин доказал в [6], что

$$I_n(3) = a_n \zeta(3) + b_n \in \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}, \tag{1.1}$$

где a_n и b_n есть в точности последовательности, полученные Р. Апери [7] при доказательстве иррациональности $\zeta(3)$. Его метод состоит в решении подходящей проблемы аппроксимации Паде и с трудом поддаётся обобщениям.

В настоящей статье мы получим обобщение (1.1) совершенно другим методом. Как обычно, мы полагаем $\mathrm{d}_n := \text{НОК}\{1, 2, \ldots, n\}$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 161—172.

Теорема 1. *Для любых фиксированных целых чисел $n \geqslant 0$ и $s \geqslant 3$ существуют $s-1$ последовательностей рациональных чисел $(p_{j,n,s})_{n\geqslant 0}$, $j = 0, 3, \ldots, s$, таких что*

$$I_n(s) = p_{0,n,s} + \sum_{j=3}^{s} p_{j,n,s}\zeta(j) \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(4) + \ldots + \mathbb{Q}\zeta(s).$$

Кроме того, $\mathrm{d}_n^{s-j} p_{j,n,s} \in \mathbb{Z}$ для любого j.

Заметим, что коэффициент при $\zeta(2)$ априори равен нулю. Хотя это нетривиальный факт, совершенно не ясно, какие новые диофантовы результаты могут быть получены из этой теоремы. Тем не менее она представляет определённый интерес по следующим причинам. В [3, 12] доказано, что интегралы типа Сорокина могут быть представлены в виде линейной формы с рациональными коэффициентами от кратных дзета-значений. Предполагается, что эти формы в общем случае не могут быть сведены к линейным формам от (однократных) дзета-значений (значений дзета-функции Римана в натуральных точках). Например, рассмотрим следующий интеграл типа Сорокина:

$$U_n = \int\limits_{[0,1]^5} \frac{\prod\limits_{j=1}^{5} z_j^n (1-z_j)^n}{(1-z_1z_2z_3)^{n+1}(1-z_1z_2z_3z_4z_5)^{n+1}}\, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_5.$$

При $n = 0$ $U_0 = \zeta(3,2) = -11\zeta(5)/2 + 3\zeta(2)\zeta(3)$, а при $n = 1, 2, 3$ U_n — линейная форма с рациональными коэффициентами от $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(4)$, $\zeta(5)$, $\zeta(2,2)$ и $\zeta(3,2)$. Но согласно предположению Гончарова—Загира $\zeta(3,2)$ и U_n не являются линейными формами с рациональными коэффициентами от дзета-значений.

Таким образом, $I_n(s)$ представляется в таком виде, можно сказать, случайно. Однако это не единственная случайность. Действительно, обобщения Д. В. Васильева [1] знаменитых интегралов Ф. Бёкерса [9] могут быть выражены через интегралы типа Сорокина и благодаря теореме Зудилина [25] также являются линейными комбинациями очень особого вида от значений дзета-функции: в них могут появляться только нечётные или только чётные дзета-значения в зависимости от чётности размерности интеграла. Эти «дихотомические» линейные формы совпадают с линейными формами, построенными в [8, 22] для доказательства бесконечности числа линейно независимых нечётных дзета-значений. Таким образом, подобные интегралы очень полезны при изучении диофантовой природы кратных дзета-значений, и представляется крайне интересным найти другие семейства интегралов, выражение которых в виде линейных форм от кратных дзета-значений имеет особые свойства. Для этого может быть полезна эффективная реализация [13] в системе компьютерной алгебры PARI/GP алгоритма, описанного в [12]. Действительно, теорема 1 была буквально угадана с помощью применения этого алгоритма к ряду $S_n(s)$, определённого ниже в (1.2), для некоторых s и n. В [11, 15] даны другие примеры кратных рядов, свойства которых изначально были обнаружены экспериментально.

Доказательство теоремы 1 непрямое и будет получено с помощью последовательных упрощений. Положим по определению

$$(\alpha)_0 := 1, \quad (\alpha)_m := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1) \text{ при } m \geqslant 1.$$

Отныне, если не оговорено противное, мы предполагаем, что целые числа n и s удовлетворяют неравенствам $n \geqslant 0$ и $s \geqslant 3$.

1. Сначала, используя общее разложение интегралов типа Сорокина в кратные ряды, доказанное в [12, с. 11, 12, предложение 1], мы получаем, что

$$I_n(s) = n! \sum_{k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_{s-1} \geqslant 1} \frac{(k_1 - k_2 + 1)_n}{(k_1)_{n+1}^2} \prod_{j=2}^{s-1} \frac{(k_j - k_{j+1} + 1)_n}{(k_j)_{n+1}} =: S_n(s), \tag{1.2}$$

где по договорённости $k_s = n+1$.
2. Следующий факт менее очевиден. Мы также имеем

$$S_n(s) = \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod_{j=1}^{s} z_j^n (1-z_j)^n}{(1-(1-z_1\cdots z_{s-1})z_s)^{n+1}} \, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_s =: J_n(s), \tag{1.3}$$

откуда следует, что $I_n(s) = J_n(s)$.
3. Далее заменой переменных и n-кратным интегрированием по частям мы доказываем, что

$$J_n(s) = -\int\limits_{[0,1]^{s-1}} \frac{P_n(z_1)P_n(z_2)\prod_{j=3}^{s-1}(1-z_j)^n}{1-z_1\cdots z_{s-1}} \times \\ \times \log(z_1\cdots z_{s-1}) \, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1} =: B_n(s), \tag{1.4}$$

где $P_n(x) = (x^n(1-x)^n)^{(n)}/n!$ обозначает n-й многочлен Лежандра на $[0,1]$ и где при $s=3$ величина пустого произведения полагается равной 1.
4. От $B_n(s)$ мы совершим последний переход

$$B_n(s) = -n!^{s-3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{(k-n)_n^2}{(k)_{n+1}^{s-1}} \right) =: D_n(s) \tag{1.5}$$

с помощью процесса, использованного автором в [24] для доказательства того, что (1.5) справедливо при $s=3$.
5. Наконец, $D_n(s)$ может быть представлено в виде линейной формы от дзета-значений, скажем $Z_n(s)$, которая имеет вид, указанный в теореме 1.

Таким образом, мы получили цепочку нетривиальных равенств

$$I_n(s) = S_n(s) = J_n(s) = B_n(s) = D_n(s) = Z_n(s), \tag{1.6}$$

и $I_n(s) = Z_n(s)$ в точности выражает содержание теоремы 1. Заметим, что при $s = 3$ цепочка (1.6) хорошо известна: равенства $I_n(3) = Z_n(3)$, $J_n(3) = B_n(3) = Z_n(3)$ и $D_n(3) = Z_n(3)$ более или менее подробно доказаны в [6], [9] и [2, 5, 10] соответственно. Доказательство равенства $I_n(3) = J_n(3)$ было независимо получено в [14] и [4].

2. Обобщения Нестеренко и Рена—Виолы и дальнейшие проблемы

Было бы интересно получить более прямое доказательство равенства $I_n(s) = Z_n(s)$ и обобщить его на случай разных показателей степени, т. е. рассмотреть интегралы

$$I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s) := \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod\limits_{j=1}^{s} z_j^{n_j}(1-z_j)^{m_j}}{\prod\limits_{j=2}^{s}(1-z_1z_2\cdots z_j)^{l_j+1}}\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_s$$

с подходящими целыми параметрами $l_j, m_j, n_j \geqslant 0$. Независимо от автора Ж. Рен и К. Виола [21] недавно смогли с помощью остроумной замены переменных* доказать, что при определённых условиях имеет место соотношение

$$I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s) = J_{l',\underline{m}',\underline{n}'}(s) \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(4) + \ldots + \mathbb{Q}\zeta(s),$$

где

$$J_{l',\underline{m}',\underline{n}'}(s) := \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod\limits_{j=1}^{s} z_j^{n'_j}(1-z_j)^{m'_j}}{(1-(1-z_1\cdots z_{s-1})z_s)^{l'+1}}\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_s \qquad (2.1)$$

представляет собой соответствующее обобщение нашего $J_n(s)$ и l', m'_j, n'_j зависят от l_j, m_j, n_j. Неясно, когда можно убрать $\zeta(2)$ (даже при $s = 3$ это не всегда возможно для произвольных показателей степеней, см. [20]): в общем случае шаг 3 можно совершить не всегда, поскольку трюк с «n-кратным интегрированием по частям» не всегда работает для произвольного интеграла $J_{l',\underline{m}',\underline{n}'}(s)$. Следовательно, *узконаправленные* методы Рена—Виолы, развитые в [19, 20], чтобы избежать этой сложности, могут быть полезны для определения естественных ограничений на l_j, m_j, n_j, при которых некоторые коэффициенты при дзета-значениях в разложении $I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s)$ равны 0.

Необходимо также упомянуть, что функциональная версия (с переменной, скажем, x) интеграла (2.1) впервые была изучена Ю. В. Нестеренко [18]. Он доказал, что данный интеграл равен комплексному интегралу типа Барнса

*Наше доказательство равенства $I_n(s) = J_n(s)$ не использует замены переменных. Вместо этого мы следуем методу С. А. Злобина [4]. Мы не пытались убедиться, что общее тождество Рена—Виолы $I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s) = J_{l',\underline{m}',\underline{n}'}(s)$ также может быть доказано этим способом, но, в принципе, проверить это несложно.

(см. [18, с. 547, теорема 2]) при определённых условиях на коэффициенты, из чего он вывел представление в виде линейной формы от полилогарифмов от x. Приравняв x к 1, он получил линейные формы от 1, $\zeta(3)$, $\zeta(4)$ и т. д. Следовательно, как только мы докажем, что «наши» интегралы $I_n(s)$ и $J_n(s)$ равны, мы сможем применить теоремы Ю. В. Нестеренко для завершения доказательства. Наш подход представляется нам интересным потому, что он проще, чем метод Ю. В. Нестеренко, и потому, что он помогает по-новому посмотреть на эти задачи.

Другой подход к выражению $I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s)$ в терминах дзета-значений может быть следующим. Заметим, что тождество $S_n(s) = D_n(s)$ связывает кратный гипергеометрический ряд с «дифференцированным» гипергеометрическим рядом. Оно, таким образом, похоже на предельные случаи тождества Эндрюса, которые были рассмотрены в [16] для получения нового доказательства упомянутой выше теоремы Зудилина. Эти тождества связывают кратный гипергеометрический ряд с вполне уравновешенным гипергеометрическим рядом. Хотя, строго говоря, $D_n(s)$ не является гипергеометрическим рядом, из [17, гл. 16] можно позаимствовать трюк, позволяющий взглянуть на $D_n(3)$ как на предельный случай линейной комбинации двух гипергеометрических рядов. Поэтому представляется разумным ожидать существования тождества, связывающего $S_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s)$ (т. е. кратный интеграл, «тривиально» равный $I_{\underline{l},\underline{m},\underline{n}}(s)$) с подходящим гипергеометрическим рядом, предельным случаем которого будет $D_n(s)$.

3. Доказательство равенства (1.3): $S_n(s) = J_n(s)$

Приведённое ниже доказательство достаточно длинное, но не сложное. Это модификация оригинального метода С. А. Злобина [4] (см. также [16, с. 215, предложение 2]). Положим

$$Q_s(z_1, z_2, \ldots, z_s) = 1 - (1 - z_s z_{s-1} \cdots z_2) z_1 \quad \text{при} \quad s \geqslant 2.$$

Можно немедленно убедиться, что при $s \geqslant 3$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} Q_s(z_1, z_2, \ldots, z_s) &= Q_{s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1}) - (1 - z_s) z_{s-1} \cdots z_1 = \\ &= Q_{s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1}) \left(1 - \frac{(1 - z_s) z_{s-1} \cdots z_1}{Q_{s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1})}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$0 \leqslant (1 - z_s) z_{s-1} \cdots z_1 \leqslant Q_{s-1}(z_1, z_2, \ldots, z_{s-1})$$

и второе равенство возможно тогда и только тогда, когда $z_1 = 1$ и $z_2 = z_3 = \ldots = z_s$, т. е. на множестве A меры 0 в $[0,1]^s$. На множестве $[0,1]^s \setminus A$ можно использовать разложение

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{(1-z_s) z_{s-1} \cdots z_1}{Q_{s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1})}\right)^{n+1}} = \sum_{l_s=0}^{\infty} \binom{n + l_s}{n} \frac{(1 - z_s)^{l_s} z_{s-1}^{l_s} \cdots z_1^{l_s}}{Q_{s-1}(z_1, \ldots, z_{s-1})^{l_s}}.$$

После умножения этого ряда на

$$\frac{\prod_{j=1}^{s} z_j^n (1-z_j)^n}{Q_{s-1}(z_1,\ldots,z_{s-1})^{n+1}}$$

и интегрирования по $[0,1]^s$ благодаря положительности можно поменять местами суммирование и интегрирование. При $s \geqslant 3$ получаем

$$J_n(s) = \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod_{j=1}^{s} z_j^n (1-z_j)^n}{Q_{s-1}(z_1,\ldots,z_{s-1})^{n+1}\left(1 - \frac{(1-z_s)z_{s-1}\cdots z_1}{Q_{s-1}(z_1,\ldots,z_{s-1})}\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_s =$$

$$= \sum_{l_s=0}^{\infty} \binom{n+l_s}{n} \int\limits_0^1 z_s^n (1-z_s)^{n+l_s}\mathrm{d}z_s \times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^{s-1}} \frac{\prod_{j=1}^{s-1} z_j^{n+l_s}(1-z_j)^n}{Q_{s-1}(z_1,\ldots,z_{s-1})^{n+l_s+1}}\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_{s-1} =$$

$$= \sum_{l_s=0}^{\infty} \frac{\binom{n+l_s}{n}}{\binom{2n+l_s}{n+l_s}(2n+l_s+1)} \int\limits_{[0,1]^{s-1}} \frac{\prod_{j=1}^{s-1} z_j^{n+l_s}(1-z_j)^n}{Q_{s-1}(z_1,\ldots,z_{s-1})^{n+l_s+1}}\,\mathrm{d}z_1\ldots\mathrm{d}z_{s-1}.$$

Очевидно, этот процесс можно применить к последнему интегралу и получить равенство

$$J_n(s) = \sum_{l_3,\ldots,l_s\geqslant 0} \frac{\binom{n+l_s}{l_s}\binom{n+l_s+l_{s-1}}{l_{s-1}}\cdots\binom{n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_3}{l_3}}{\binom{2n+l_s}{n+l_s}\binom{2n+l_s+l_{s-1}}{n+l_{s-1}}\cdots\binom{2n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_3}{n+l_3}} \times$$

$$\times \frac{1}{(2n+l_s+1)(2n+l_s+l_{s-1}+1)\cdots(2n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_3+1)} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^2} \frac{z_1^{n+l_s+\ldots+l_3}(1-z_1)^n z_2^{n+l_s+\ldots+l_3}(1-z_2)^n}{Q_2(z_1,z_2)^{n+l_s+\ldots+l_3+1}}\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2.$$

Осталось вычислить двойной интеграл. Для простоты положим

$$m = l_s + \ldots + l_3.$$

Поскольку

$$Q_2(z_1,z_2) = 1-(1-z_1)z_2,$$

то, заменяя z_1 на $1-z_1$, мы находим, что

$$\int\limits_{[0,1]^2} \frac{z_1^{n+m}(1-z_1)^n z_2^{n+m}(1-z_2)^n}{Q_2(z_1,z_2)^{n+m+1}}\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2 =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^2} \frac{z_1^{n}(1-z_1)^{n+m} z_2^{n+m}(1-z_2)^n}{(1-z_1z_2)^{n+m+1}}\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2 =$$

$$= \sum_{l_2=0}^{\infty} \binom{n+m+l_2}{l_2} \int\limits_0^1 z_1^{l_2+n}(1-z_1)^{n+m}\,\mathrm{d}z_1 \int\limits_0^1 z_2^{n+m+l_2}(1-z_1)^n\,\mathrm{d}z_2 =$$

$$= \sum_{l_2=0}^{\infty} \frac{\binom{n+m+l_2}{l_2}}{\binom{2n+m+l_2}{n+l_2}\binom{2n+m+l_2}{n}} \, \frac{1}{(2n+m+l_2+1)^2}.$$

Тогда

$$J_n(s) = \sum_{l_2,\ldots,l_s\geqslant 0} \frac{\binom{n+l_s}{l_s}\binom{n+l_s+l_{s-1}}{l_{s-1}}\cdots\binom{n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_2}{l_2}}{\binom{2n+l_s}{n+l_s}\binom{2n+l_s+l_{s-1}}{n+l_{s-1}}\cdots\binom{2n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_2}{n+l_2}} \times$$

$$\times \frac{1}{(2n+l_s+1)(2n+l_s+l_{s-1}+1)\cdots(2n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_2+1)} \times$$

$$\times \frac{1}{\binom{n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_2}{n}(2n+l_s+l_{s-1}+\ldots+l_2+1)},$$

а это абсолютно сходящийся ряд.

Теперь сделаем замену индексов $K_j = l_{j+1}+l_{j+2}+\ldots+l_s$ при $j=1,\ldots,s-1$ и получим

$$J_n(s) = \sum_{1\leqslant K_{s-1}\leqslant\ldots\leqslant K_1} \frac{\binom{n+K_{s-1}}{K_{s-1}}\binom{n+K_{s-2}}{K_{s-2}-K_{s-1}}\cdots\binom{n+K_1}{K_1-K_2}}{\binom{2n+K_{s-1}}{n+K_{s-1}}\binom{2n+K_{s-2}}{n+K_{s-2}-K_{s-1}}\cdots\binom{2n+K_1}{n+K_1-K_2}} \times$$

$$\times \frac{1}{(2n+K_{s-1}+1)(2n+K_{s-2}+1)\cdots(2n+K_1+1)} \, \frac{1}{\binom{n+K_1}{n}(2n+K_1+1)} =$$

$$= n! \sum_{1\leqslant K_{s-1}\leqslant\ldots\leqslant K_1} \frac{(K_{s-1}+1)_n(K_{s-2}-K_{s-1}+1)_n\cdots(K_1-K_2+1)_n}{(K_e+n+1)_{n+1}\cdots(K_2+n+1)_{n+1}(K_1+n+1)_{n+1}^2} =$$

$$= n! \sum_{1\leqslant k_{s-1}\leqslant\ldots\leqslant k_1} \frac{(k_{s-1}-n)_n(k_{s-2}-k_{s-1}+1)_n\cdots(k_1-k_2+1)_n}{(k_{s-1})_{n+1}\cdots(k_2)_{n+1}(k_1)_{n+1}^2} =: S_n(s).$$

В последнем равенстве мы положили $k_j = K_j+n+1$ при $j=1,\ldots,s-1$.

4. Доказательство равенства (1.4): $J_n(s) = B_n(s)$

Мы строго следуем методу Бёкерса (случай $s = 3$ рассмотрен в [9]). Имеем

$$\frac{\log(z_1 \cdots z_{s-1})}{1 - z_1 \cdots z_{s-1}} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{(1 - z_1 \cdots z_{s-1})w},$$

и следовательно,

$$B_n(s) := -\int\limits_{[0,1]^s} \frac{P_n(z_1)P_n(z_2)\prod_{j=3}^{s-1}(1-z_j)^n}{1 - z_1 \cdots z_{s-1}} \log(z_1 \cdots z_{s-1})\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1} =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^s} \frac{P_n(z_1)P_n(z_2)\prod_{j=3}^{s-1}(1-z_j)^n}{1 - (1 - z_1 \cdots z_{s-1})w}\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1}\,\mathrm{d}w.$$

Мы n раз интегрируем по частям выражение в последнем интеграле относительно z_1. Получаем

$$B_n(s) = (-1)^n \int\limits_{[0,1]^s} \frac{z_1^n(1-z_1)^n z_2^n P_n(z_2)\prod_{j=3}^{s-1} z_j^n(1-z_j)^n}{(1 - (1 - z_1 \cdots z_{s-1})w)^{n+1}}\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1}\,\mathrm{d}w.$$

Замена переменной $z_s = (1-w)/(1-(1-z_1 \cdots z_{s-1})w)$ даёт

$$B_n(s) = (-1)^n \int\limits_{[0,1]^s} \frac{(1-z_1)^n P_n(z_2)\prod_{j=3}^{s-1}(1-z_j)^n}{1 - (1 - z_1 \cdots z_{s-1})z_s}\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1}\,\mathrm{d}z_s.$$

Наконец, n раз интегрируя по частям относительно z_2, получаем

$$B_n(s) = \int\limits_{[0,1]^s} \frac{\prod_{j=1}^{s} z_j^n(1-z_j)^n}{(1 - (1 - z_1 \cdots z_{s-1})z_s)^{n+1}}\,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_s =: J_n(s),$$

что и требовалось.

5. Доказательство равенства (1.5): $B_n(s) = D_n(s)$

Как и в предыдущем разделе, мы начинаем с альтернативного выражения для $\log(z_1 \cdots z_{s-1})/(1 - z_1 \cdots z_{s-1})$. Однако, чтобы избежать технических сложностей, мы вводим комплексный параметр x, такой что $|x| < 1$, а в конце доказательства положим $x \to 1$. Альтернативное выражение, которое мы будем использовать, имеет следующий вид:

$$\frac{\log(z_1 \cdots z_{s-1})}{1 - xz_1 \cdots z_{s-1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{(z_1 \cdots z_{s-1})^t}{1 - xz_1 \cdots z_{s-1}} \right)\bigg|_{t=0}.$$

Более того, когда все z_j принадлежат $[0,1]$, можно воспользоваться разложением

$$\frac{1}{1 - xz_1 \cdots z_{s-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} (xz_1 \cdots z_{s-1})^{k-1}$$

и получить, что

$$\frac{\log(z_1 \cdots z_{s-1})}{1 - xz_1 \cdots z_{s-1}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} (z_1 \cdots z_{s-1})^{k+t-1} \right)\bigg|_{t=0}. \tag{5.1}$$

Определим интеграл

$$B_n(s,x) := -\int\limits_{[0,1]^s} \frac{P_n(z_1)P_n(z_2) \prod\limits_{j=3}^{s-1} (1-z_j)^n}{1 - xz_1 \cdots z_{s-1}} \log(z_1 \cdots z_{s-1}) \, \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{s-1},$$

для которого верно

$$\lim_{x \to 1} B_n(s,x) = B_n(s,1) = B_n(s).$$

Из (5.1) мы выводим, что

$$B_n(s,x) = -\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \times$$
$$\times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int\limits_0^1 z_1^{k+t-1} P_n(z_1) \, \mathrm{d}z_1 \int\limits_0^1 z_2^{k+t-1} P_n(z_2) \, \mathrm{d}z_2 \prod_{j=3}^{s-1} \int\limits_0^1 z_j^{k+t-1} (1-z_j)^n \, \mathrm{d}z_j \right)\bigg|_{t=0}.$$

Различные перестановки интегрирования, суммирования и дифференцирования возможны, поскольку $|x| < 1$ и интегралы ограниченны независимо от k.

Теперь мы вычислим два рассматриваемых интеграла. Во-первых,

$$\int\limits_0^1 z^{k+t-1} (1-z)^n \, \mathrm{d}z = \frac{n!}{(k+t)(k+t+1) \cdots (k+t+n)}. \tag{5.2}$$

Во-вторых, интегрируя n раз по частям и затем используя (5.2), мы получаем

$$\int\limits_0^1 z^{k+t-1} P_n(z) \, \mathrm{d}z = \frac{n!}{(k+t-1) \cdots (k+t-n)} \int\limits_0^1 z^{k+t-1} (1-z)^n \, \mathrm{d}z =$$
$$= \frac{(k+t-1) \cdots (k+t-n)}{(k+t)(k+t+1) \cdots (k+t+n)}.$$

Таким образом, имеем

$$B_n(s,x) =$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(k+t-1)^2\cdots(k+t-n)^2}{(k+t)^2\cdots(k+t+n)^2}\,\frac{n!^{s-3}}{(k+t)^{s-3}\cdots(k+t+n)^{s-3}}\right)\bigg|_{t=0} =$$
$$= -n^{s-3}\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{(k+t-1)^2\cdots(k+t-n)^2}{(k+t)^{s-1}\cdots(k+t+n)^{s-1}}\right)\bigg|_{t=0}.$$

Используя теорему Абеля, теперь мы можем положить $x \to 1$ и получить $B_n(s) = D_n(s)$.

6. Доказательство теоремы 1

Итак, мы доказали, что $I_n(s) = D_n(s)$. Теперь действительно можно легко завершить доказательство теоремы 1, используя стандартные рассуждения. Мы докажем немного больше, чем требуется, и для этого определим полилогарифмические функции

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} \quad \text{для} \quad |z| \leqslant 1,\ s \geqslant 1,\ (z,s) \neq (1,1).$$

Положим

$$R(k) := n!^{s-3}\frac{(k-1)^2\cdots(k-n)^2}{k^{s-1}(k+1)^{s-1}\cdots(k+n)^{s-1}}.$$

$R(k)$ — рациональная функция от k. Разложение $R(k)$ на простейшие дроби имеет вид

$$R(k) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{t=1}^{s-1}\frac{C(j,t)}{(k+j)^t},$$

где коэффициенты $C(j,t) \in \mathbb{Q}$ зависят от s, n и могут быть выписаны явно. Следовательно, мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial k}R(k) = -\sum_{j=0}^{n}\sum_{t=2}^{s}\frac{(t-1)C(j,t-1)}{(k+j)^t}.$$

Рассмотрим ряд

$$V(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} R^{(1)}(k) z^{-k},$$

который сходится абсолютно при $|z| \geqslant 1$. В частности, при $z = 1$ получаем $V(1) = D_n(s)$. При $|z| \geqslant 1$ имеем

$$V(z) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{t=2}^{s}(t-1)C(j,t-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{-k}}{(k+j)^t} =$$
$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{t=2}^{s}(t-1)C(j,t-1)\left(z^j \mathrm{Li}_t\left(\frac{1}{z}\right) - \sum_{k=1}^{j}\frac{z^{j-k}}{k^t}\right) = P_0(z) + \sum_{t=2}^{s}P_t(z)\mathrm{Li}_s\left(\frac{1}{z}\right),$$

где при $t \geqslant 2$

$$P_t(z) = \sum_{j=0}^{n}(t-1)C(j,t-1)z^j \in \mathbb{Q}[z]$$

и

$$P_0(z) = -\sum_{j=0}^{n}\sum_{t=2}^{s}(t-1)C(j,t-1)\sum_{k=1}^{j}\frac{z^{j-k}}{k^t} \in \mathbb{Q}[z].$$

Теперь заметим, что

$$P_2(1) = \sum_{j=0}^{n}C(j,1) = 0,$$

так как полная степень $R(k)$ не превосходит -2. Таким образом,

$$D_n(s) = V(1) = P_0(1) + \sum_{t=3}^{s}P_t(1)\mathrm{Li}_t(1) = P_0(1) + \sum_{t=3}^{s}P_t(1)\zeta(t).$$

Мы не доказываем последнее утверждение теоремы, т. е. что $\mathrm{d}_n^{s-t}P_t(1) \in \mathbb{Z}$, поскольку аналогичные доказательства имеются в [8, 22, 23, 25, 26].

Литература

[1] Васильев Д. В. Аппроксимации нуля линейными формами от значений дзета-функции Римана // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2001. — Т. 45, № 5. — С. 36—40.

[2] Гутник Л. А. Об иррациональности некоторых величин, содержащих $\zeta(3)$ // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, № 3. — С. 190.

[3] Злобин С. А. Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщённых полилогарифмов // Мат. заметки. — 2002. — Т. 71, № 5. — С. 782—787.

[4] Злобин С. А. О некоторых интегральных тождествах // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, № 3. — С. 153—154.

[5] Нестеренко Ю. В. Некоторые замечания о $\zeta(3)$ // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, № 6. — С. 865—880.

[6] Сорокин В. Н. Теорема Апери // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1998. — № 3. — С. 48—53.

[7] Apéry R. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Astérisque. — 1979. — Vol. 61. — P. 11—13.

[8] Ball K., Rivoal T. Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs // Invent. Math. — 2001. — Vol. 146, no. 1. — P. 193—207.

[9] Beukers F. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ // Bull. London Math. Soc. — 1979. — Vol. 11. — P. 268—272.

[10] Beukers F. Padé-approximations in number theory // Padé Approximation and Its Applications: Amsterdam 1980. Proc. Conference Held in Amsterdam, The Netherlands, October 29–31, 1980 / M. G. de Bruin, H. van Rossum, eds. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 888). — P. 90—99.

[11] Cresson J., Fischler S., Rivoal T. Phénomènes de symétrie dans des formes linéaires en polyzêtas // J. Reine Angew. Math. — 2008. — Vol. 617. — P. 109—151.

[12] Cresson J., Fischler S., Rivoal T. Séries hypergéométriques multiples et polyzêtas // Bull. Soc. Math. France. — 2008. — Vol. 136, no. 1. — P. 97—145.

[13] Cresson J., Fischler S., Rivoal T. `http://www.math.u-psud.fr/~fischler/algo.html`.

[14] Fischler S. Groupes de Rhin–Viola et intégrales multiples // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2003. — Vol. 15, no. 2. — P. 479—534.

[15] Fischler S. Multiple series connected to Hoffman's conjecture on multiple zeta values // J. Algebra. — 2008. — Vol. 320. — P. 1682—1703.

[16] Krattenthaler C., Rivoal T. An identity of Andrews, multiple integrals, and very-well-poised hypergeometric series // Ramanujan J. — 2007. — Vol. 13, no. 1-3. — P. 203—219.

[17] Krattenthaler C., Rivoal T. Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann. — Amer. Math. Soc., 2007. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 186).

[18] Nesterenko Yu. V. Integral identities and constructions of approximations to zeta-values // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2003. — Vol. 15. — P. 535—550.

[19] Rhin G., Viola C. On a permutation group related to $\zeta(2)$ // Acta Arith. — 1996. — Vol. 77. — P. 23—56.

[20] Rhin G., Viola C. The group structure for $\zeta(3)$ // Acta Arith. — 2001. — Vol. 97, no. 3. — P. 269—293.

[21] Rhin G., Viola C. Multiple integrals and linear forms in zeta-values // Funct. Approx. — 2007. — Vol. 37. — P. 429—444.

[22] Rivoal T. La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I. Math. — 2000. — Vol. 331, no. 4. — P. 267—270.

[23] Rivoal T. Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$ // Acta Arith. — 2002. — Vol. 103, no. 2. — P. 157—167.

[24] Rivoal T. Valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann // Quadrature. — 2003. — Vol. 49. — `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~rivoal/articles/quaddefi.pdf`.

[25] Zudilin W. Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2003. — Vol. 15, no. 2. — P. 593—626.

[26] Zudilin W. Arithmetic of linear forms involving odd zeta values // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2004. — Vol. 16. — P. 251—291.