Алгебраические соотношения для сумм обратных величин чётных членов последовательности Фибоначчи

К. ЭЛЬСНЕР

Ганноверский университет
прикладных наук и искусств, Германия
e-mail: carsten.elsner@fhdw.de

С. СИМОМУРА

Университет Кэйо, Япония
e-mail: shimomur@math.keio.ac.jp

И. СИОКАВА

Университет Кэйо, Япония
e-mail: shiokawa@beige.ocn.ne.jp

УДК 511.4

Ключевые слова: алгебраическая независимость, числа Фибоначчи, числа Люка, эллиптические функции Якоби, функции Рамануджана, q -ряды, теорема Нестеренко.

Аннотация

В этой статье мы обсуждаем проблемы алгебраической независимости, а также алгебраические соотношения для сумм обратных величин чётных членов последовательности Фибоначчи $\sum_{n=1}^{\infty} F_{2n}^{-2s}$ и сумм вида $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n}^{-2s}$, $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n-2}^{-2s}$. Мы доказываем, что числа $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n-2}^{-2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n-2}^{-4}$, $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n-2}^{-6}$ алгебраически независимы, и представляем каждую из сумм $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n-2}^{-2s}$ ($s \geq 4$) в виде явно выписываемой рациональной функции от этих трёх чисел над $\mathbb{Q}$. Подобные результаты получены для различных рядов чётного типа, в том числе для сумм обратных величин чисел Люка $\sum_{n=1}^{\infty} L_{2n}^{-p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} L_{4n}^{-p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} L_{4n-2}^{-p}$.

Abstract

C. Elsner, Sh. Shimomura, I. Shiokawa, Algebraic relations for reciprocal sums of even terms in Fibonacci numbers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 5, pp. 173–200.

In this paper, we discuss the algebraic independence and algebraic relations, first, for reciprocal sums of even terms in Fibonacci numbers $\sum_{n=1}^{\infty} F_{2n}^{-2s}$, and second, for sums of evenly even and unevenly even types $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n}^{-2s}$, $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n-2}^{-2s}$. The numbers $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n-2}^{-2}$,

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 5, с. 173–200.

© 2010 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

$\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n-2}^{-4}$, and $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n-2}^{-6}$ are shown to be algebraically independent, and each sum $\sum_{n=1}^{\infty} F_{4n-2}^{-2s}$ ($s \geq 4$) is written as an explicit rational function of these three numbers over $\mathbb{Q}$. Similar results are obtained for various series of even type, including the reciprocal sums of Lucas numbers $\sum_{n=1}^{\infty} L_{2n}^{-p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} L_{4n}^{-p}$, and $\sum_{n=1}^{\infty} L_{4n-2}^{-p}$.

1. Введение

Пусть $\{F_n\}_{n \geq 0}$ и $\{L_n\}_{n \geq 0}$ — числа Фибоначчи и числа Люка, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, & F_1 &= 1, & F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0), \\ L_0 &= 2, & L_1 &= 1, & L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n \quad (n \geq 0). \end{aligned}$$

В [5] (см. также [4]) с использованием теоремы Ю. В. Нестеренко о функциях Рамануджана $P(q)$, $Q(q)$, $R(q)$ (см. раздел 3) была доказана трансцендентность чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{2s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^{2s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}^{2s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{2n}^{2s}} \quad (s = 1, 2, 3, \dots).$$

Суммы обратных величин чисел Фибоначчи разбиваются на две части:

$$\zeta_{\mathbb{F}}(2s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{2s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}^{2s}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}^{2s}}.$$

Каждая из них может быть записана в виде ряда со слагаемыми, выражающимися через гиперболические функции, и затем в виде некоторого q -ряда, представимого в явном виде через эллиптические интегралы K , E , и их модуль k (см. [10]). Суммы чётных членов (суммы нечётных членов) соответствуют q -рядам, связанным с эллиптической функцией $\text{ns}^2 z$ (соответственно $\text{nd}^2 z$). В частности, первые три из последовательности q -рядов $\text{ns}^2 z$ есть функции Рамануджана (см. (3.1), (4.3)). Используя этот факт и теорему Ю. В. Нестеренко, мы доказали в [6], что числа $\zeta_{\mathbb{F}}(2)$, $\zeta_{\mathbb{F}}(4)$, $\zeta_{\mathbb{F}}(6)$ алгебраически независимы и что для любого целого $s \geq 4$

$$\zeta_{\mathbb{F}}(2s) - 5^{s-2} r_s \zeta_{\mathbb{F}}(4) \in \mathbb{Q}(\mu, \nu), \quad \mu = \zeta_{\mathbb{F}}(2), \quad \nu = \zeta_{\mathbb{F}}(6)$$

для некоторых $r_s \in \mathbb{Q}$ ($r_s = 0$, если и только если s нечётно), причём рациональные функции от μ и ν могут быть явно выписаны. Например,

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbb{F}}(8) - \frac{15}{14} \zeta_{\mathbb{F}}(4) &= \frac{1}{378(4\mu + 5)^2} (256\mu^6 - 3456\mu^5 + 2880\mu^4 + 1792\mu^3\nu - \\ &\quad - 11100\mu^3 + 20160\mu^2\nu - 10125\mu^2 + 7560\mu\nu + 3136\nu^2 - 1050\nu). \end{aligned}$$

Подобные результаты были получены для $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F_n^{-2s}$, $\sum_{n=1}^{\infty} L_n^{-2s}$ и для сумм $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} L_n^{-2s}$. В [10] приведены шестнадцать таблиц, в которых указано, как

выражаются ряды гиперболических функций через K , E и k . В [7] мы использовали некоторые из этих таблиц для изучения алгебраической независимости и алгебраических соотношений между суммами обратных элементов с нечётными номерами, в том числе $\sum_{n=1}^{\infty} F_{2n-1}^{-p}$ ($p \geq 1$).

В этой статье мы рассматриваем суммы обратных величин, соответствующие оставшимся таблицам из [10], а именно суммы обратных величин членов с чётными номерами, в том числе

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n}^{2s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{2n}^p}.$$

Более того, комбинируя две различные чётные суммы, мы получаем суммы из обратных величин вида

$$\Theta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{4n}^{2s}}, \quad \Theta^{\sharp}(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{4n-2}^{2s}},$$

$$\Lambda(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{4n}^p}, \quad \Lambda^{\sharp}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{4n-2}^p}.$$

Для каждого семейства этих сумм мы покажем алгебраическую независимость нескольких первых сумм и приведём алгебраические формулы, представляющие другие суммы через эти независимые. Для сумм, где индекс пробегает все чётные неотрицательные числа, легко убедиться, что такие алгебраические выражения — рациональные функции, поскольку они, по существу, зависят от одной рекуррентной формулы для коэффициентов рядов, представляющих соответствующие эллиптические функции. С другой стороны, для сумм с номерами слагаемых, делящимися на четыре, равно как и для сумм слагаемых, номера которых при делении на четыре дают в остатке два, алгебраические выражения не обязательно будут рациональными. Причина в том, что они зависят от комбинации рекуррентных формул, связанных с эллиптическими функциями двух родов. К счастью, алгебраические соотношения для $\Theta^{\sharp}(2s)$ рациональны, как в случае $\zeta_{\mathbb{F}}(2s)$. А именно, числа $\Theta^{\sharp}(2)$, $\Theta^{\sharp}(4)$, $\Theta^{\sharp}(6)$ алгебраически независимы и при любом $s \geq 4$ число $\Theta^{\sharp}(2s)$ представляется в виде рациональной функции от них (теорема 8). Например,

$$\Theta^{\sharp}(8) = \frac{1}{70(5x+6y)}(125x^3 + 450x^2y + 540xy^2 + 216y^3 -$$

$$- 125xy - 500xz + 50y^2 - 200yz + 200z^2),$$

где $x = \Theta^{\sharp}(2)$, $y = \Theta^{\sharp}(4)$, $z = \Theta^{\sharp}(6)$. Для рядов из обратных величин чисел Люка $\Lambda(p)$, $\Lambda^{\sharp}(p)$ имеются подобные рациональные выражения (теоремы 9 и 10). Однако выражение для $\Theta(2s)$ не является рациональным (теорема 7).

2. Формулировки результатов

Всюду далее в этой статье мы будем предполагать, что $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{Q}}$ и выполнены условия $|\beta| < 1$ и $\alpha\beta = -1$. Положим также

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad V_n = \alpha^n + \beta^n \quad (n \geq 0).$$

Если $\alpha + \beta = a \in \mathbb{Z}$, то $\{U_n\}_{n \geq 0}$ и $\{V_n\}_{n \geq 0}$ — последовательности обобщённых чисел Фибоначчи и Люка. Они представляют собой две линейно независимые последовательности целых чисел, удовлетворяющие рекуррентному уравнению второго порядка $X_{n+2} = aX_{n+1} + X_n$ ($n \geq 0$) с начальными значениями $(X_0, X_1) = (0, 1)$ и $(X_0, X_1) = (2, a)$ соответственно. В частности, если $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$, то $U_n = F_n$, $V_n = L_n$ ($n \geq 0$).

В дальнейшем всегда предполагается, что s — неотрицательное целое число. Для $s \geq 2$ пусть $\sigma_1(s), \dots, \sigma_{s-1}(s)$ — элементарные симметрические функции от $s-1$ чисел $-1, -2^2, \dots, -(s-1)^2$, определённые равенствами

$$\sigma_i(s) = (-1)^i \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_i \leq s-1} r_1^2 \cdots r_i^2 \quad (1 \leq i \leq s-1).$$

Для $s \geq 1$ введём $\tau_1(s), \dots, \tau_s(s)$ — элементарные симметрические функции от s чисел $-1, -3^2, \dots, -(2s-1)^2$, задаваемые равенствами

$$\tau_i(s) = (-1)^i \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_i \leq s} (2r_1 - 1)^2 \cdots (2r_i - 1)^2 \quad (1 \leq i \leq s).$$

Для $s \geq 0$ положим $\sigma_0(s) = \tau_0(s) = 1$.

Пусть a_j и b_j — коэффициенты разложений в ряды

$$\operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{x^2} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{2j}, \quad \sec^2 x = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^{2j},$$

а именно

$$a_{j-1} = \frac{(-1)^{j-1} (2j-1) 2^{2j} B_{2j}}{(2j)!}, \quad b_{j-1} = \frac{(-1)^{j-1} (2j-1) 2^{2j} (2^{2j} - 1) B_{2j}}{(2j)!} \quad (j \geq 1),$$

где $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42, \dots$ — числа Бернулли. (В этой статье только в данном контексте через B_n обозначаются числа Бернулли. В разделах 3 и 4 обозначение B_n будет использоваться для q -рядов.) Через E_{2j} обозначаются числа Эйлера: $E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61, \dots$

2.1. Суммы с чётными индексами

Теорема 1. Пусть

$$h_{2s} := (\alpha - \beta)^{-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_{2n}^{2s}} \quad (s \geq 1).$$

Тогда числа h_2, h_4, h_6 алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 4$

$$h_{2s} = \frac{1}{(2s-1)!} \left(\sigma_{s-1}(s)h_2 - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^j(2j)!}{2^{2j+3}} \sigma_{s-j-1}(s)(\varphi_j - a_j) \right),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{15}(1 + 240h_2 + 1440h_4), \\ \varphi_2 &= \frac{2}{189}(1 - 504h_2 - 15120h_4 - 60480h_6), \\ \varphi_j &= \frac{3}{(j-2)(2j+3)} \sum_{i=1}^{j-2} \varphi_i \varphi_{j-i-1} \quad (j \geq 3). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Таблица 1. Формулы для h_{2s} в теореме 1

	$u = h_2$	$v = h_4$	$w = h_6$
$s = 4$	$h_8 = \frac{1}{42}u^2 + \frac{2}{7}uv + \frac{6}{7}v^2 - \frac{1}{42}v - \frac{1}{3}w$		
$s = 5$	$h_{10} = -\frac{2}{231}u^2 - \frac{17}{231}uv + \frac{5}{33}uw - \frac{10}{77}v^2 + \frac{10}{11}vw + \frac{2}{231}v + \frac{1}{11}w$		
$s = 6$	$h_{12} = \frac{1}{429}u^3 + \frac{6}{143}u^2v + \frac{36}{143}uv^2 + \frac{72}{143}v^3 + \frac{5}{2002}u^2 + \frac{16}{1001}uv - \frac{10}{143}uw + \frac{20}{1001}v^2 - \frac{40}{143}vw + \frac{50}{143}w^2 - \frac{5}{2002}v - \frac{10}{429}w$		

Теорема 2. Для каждого положительного целого p положим

$$l_p := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_{2n}^p}.$$

Тогда числа l_1, l_2, l_3 алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 2$

$$\begin{aligned} l_{2s} &= \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)!} \left(\sigma_{s-1}(s)l_2 + \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^j(2j)!}{2^{2j+3}} \sigma_{s-j-1}(s)(\varphi_j - b_j) \right), \\ l_{2s+1} &= \frac{(-1)^s}{2^{2s}(2s)!} \left(\tau_s(s)l_1 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^s \tau_{s-j}(s)((-1)^j(2j)! \psi_j - E_{2j}) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1 + 4l_1)(1 - 4l_1 + 32l_3), \quad \varphi_2 = \frac{2\varphi_1}{3(1 + 4l_1)}(1 + 4l_1 + 24l_1^2 + 32l_1^3 + 16l_3), \\ \varphi_j &= \frac{1}{j(2j-1)} \left(\frac{6\varphi_2\varphi_{j-1}}{\varphi_1} + 3 \sum_{i=1}^{j-2} \varphi_i \varphi_{j-i-1} \right) \quad (j \geq 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 1 + 4l_1, \quad \psi_1 = \frac{1}{2}(1 - 4l_1 + 32l_3), \\ \psi_j &= \frac{1}{j(2j-1)} \times \\ &\times \left(\frac{(2\psi_0^3 + \psi_1)\psi_{j-1}}{\psi_0} + 3\psi_0 \sum_{i=1}^{j-2} \psi_i \psi_{j-i-1} + \sum_{m=1}^{j-3} \psi_m \sum_{i=1}^{j-m-2} \psi_i \psi_{j-m-i-1} \right) \quad (j \geq 2). \end{aligned}$$

Таблица 2. Формулы для l_p в теореме 2

	$u = l_1$	$v = l_2$	$w = l_3$
$p = 4$	$l_4 = -\frac{1}{6}u^2 + \frac{4}{3}uw + \frac{1}{6}v + \frac{1}{3}w$		
$p = 5$	$l_5 = \frac{-2u^4 + 16u^3w - u^3 + 12u^2w + 5uw + 2w^2 + w}{3(4u + 1)}$		
$p = 6$	$l_6 = -\frac{2}{15}u^4 + \frac{16}{15}u^3w - \frac{1}{15}u^3 + \frac{4}{5}u^2w - \frac{1}{30}u^2 + \frac{2}{5}uw + \frac{8}{15}w^2 + \frac{1}{30}v + \frac{2}{15}w$		

Теорема 3. Пусть

$$h_{2s}^* := (\alpha - \beta)^{-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{U_{2n}^{2s}} \quad (s \geq 1).$$

Тогда числа h_2^* and h_4^* алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 3$

$$h_{2s}^* = \frac{1}{(2s-1)!} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(-1)^{j-1} (2j+1)!}{2^{2j+3}} \sigma_{s-j-1}(s) \left(\psi_{j+1} + \frac{a_j}{2j+1} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{1}{3} - 8h_2^*, \quad \psi_2 = -\frac{1}{45} + \frac{16}{3}h_2^* + 32h_4^*, \\ \psi_j &= \frac{1}{(2j+1)(j-2)} \times \\ &\times \left(-3\psi_1\psi_{j-1} + 3 \sum_{i=1}^{j-1} \psi_i \psi_{j-i} + \sum_{m=1}^{j-2} \psi_m \sum_{i=1}^{j-m-1} \psi_i \psi_{j-m-i} \right) \quad (j \geq 3). \quad (2.2) \end{aligned}$$

Таблица 3. Формулы для h_{2s}^* в теореме 3

	$u = h_2^* \quad v = h_4^*$
$s = 3$	$h_6^* = \frac{4}{7}u^3 + \frac{3}{14}u^2 + \frac{6}{7}uv - \frac{3}{14}v$
$s = 4$	$h_8^* = \frac{4}{21}u^4 + \frac{20}{21}u^2v - \frac{1}{21}u^2 - \frac{2}{21}uv + \frac{1}{3}v^2 + \frac{1}{21}v$
$s = 5$	$h_{10}^* = \frac{8}{33}u^5 + \frac{20}{231}u^4 + \frac{160}{231}u^3v + \frac{5}{462}u^3 - \frac{5}{77}u^2v + \frac{170}{231}uv^2 +$ $+ \frac{5}{462}u^2 + \frac{5}{462}uv - \frac{25}{231}v^2 - \frac{5}{462}v$

Теорема 4. Для каждого положительного целого p положим

$$l_p^* := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{V_{2n}^p}.$$

Тогда числа l_1^* и l_2^* алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 2$

$$l_{2s-1}^* = \frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(2s-2)!} \sum_{j=0}^{s-1} \tau_{s-j-1}(s-1)(E_{2j} - (-1)^j(2j)! \psi_j),$$

$$l_{2s}^* = \frac{(-1)^s}{(2s-1)!} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(-1)^j(2j+1)!}{2^{2j+3}} \sigma_{s-j-1}(s) \left(\varphi_j - \frac{b_j}{2j+1} \right),$$

где

$$\varphi_0 = 1 - 8l_2^*, \quad \varphi_1 = \frac{\varphi_0}{6\psi_0^2}(\varphi_0^2 + \psi_0^4), \quad \varphi_2 = \frac{\varphi_0}{120\psi_0^4}(\varphi_0^4 + 14\varphi_0^2\psi_0^4 + \psi_0^8),$$

$$\varphi_j = \frac{1}{j(2j+1)} \times$$

$$\times \left(\frac{3\varphi_1\varphi_{j-1}}{\varphi_0} + 3\varphi_0^2\varphi_{j-2} + 3\varphi_0 \sum_{i=1}^{j-3} \varphi_i\varphi_{j-i-2} + \sum_{m=1}^{j-4} \varphi_m \sum_{i=1}^{j-m-3} \varphi_i\varphi_{j-m-i-2} \right) \quad (j \geq 3),$$

$$\psi_0 = 1 - 4l_1^*, \quad \psi_1 = \frac{\varphi_0^2}{2\psi_0},$$

$$\psi_j = \frac{1}{j(2j-1)} \times$$

$$\times \left(\frac{(2\psi_0^3 + \psi_1)\psi_{j-1}}{\psi_0} + 3\psi_0 \sum_{i=1}^{j-2} \psi_i\psi_{j-i-1} + \sum_{m=1}^{j-3} \psi_m \sum_{i=1}^{j-m-2} \psi_i\psi_{j-m-i-1} \right) \quad (j \geq 2).$$

Таблица 4. Формулы для l_p^* в теореме 4

	$u = l_1^* \quad v = l_2^*$
$p = 3$	$l_3^* = \frac{u^2 + 4v^2 - v}{2(4u - 1)}$
$p = 4$	$l_4^* = \frac{32u^4v - 4u^4 - 32u^3v + 4u^3 + 20u^2v + 8v^3 - u^2 - 6uv - 3v^2 + v}{3(4u - 1)^2}$
$p = 5$	$l_5^* = \frac{1}{6(4u - 1)^3} (256u^4v^2 - 64u^4v - 256u^3v^2 + 13u^4 + 64u^3v + 136u^2v^2 + 16v^4 - 7u^3 - 34u^2v - 36uv^2 - 8v^3 + u^2 + 9uv + 5v^2 - v)$

Теорема 5. Пусть

$$p_{2s} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2s}}{V_{2n}} \quad (s \geq 0).$$

Тогда числа p_0 и p_2 алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 2$

$$p_{2s} = \frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s+2}} \varphi_s,$$

где

$$\varphi_0 = 1 + 4p_0, \quad \varphi_1 = -8p_2,$$

$$\varphi_s = \frac{-1}{s(2s-1)} \times \left(\frac{(2\varphi_0^3 - \varphi_1)\varphi_{s-1}}{\varphi_0} + 3\varphi_0 \sum_{i=1}^{s-2} \varphi_i \varphi_{s-i-1} + \sum_{m=1}^{s-3} \varphi_m \sum_{i=1}^{s-m-2} \varphi_i \varphi_{s-m-i-1} \right) \quad (s \geq 2).$$

Теорема 6. Пусть

$$p_{2s}^* := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{2s}}{V_{2n}} \quad (s \geq 0).$$

Тогда числа p_0^* and p_2^* алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 2$

$$p_{2s}^* = -\frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s+2}} \varphi_s,$$

где

$$\varphi_0 = 1 - 4p_0^*, \quad \varphi_1 = 8p_2^*,$$

$$\varphi_s = \frac{-1}{s(2s-1)} \times \left(\frac{(2\varphi_0^3 - \varphi_1)\varphi_{s-1}}{\varphi_0} + 3\varphi_0 \sum_{i=1}^{s-2} \varphi_i \varphi_{s-i-1} + \sum_{m=1}^{s-3} \varphi_m \sum_{i=1}^{s-m-2} \varphi_i \varphi_{s-m-i-1} \right) \quad (s \geq 2).$$

Таблица 5. Формулы для p_{2s} в теореме 5

	$u = p_0 \quad v = p_2$
$s = 2$	$p_4 = \frac{v(64u^3 + 48u^2 + 12u + 4v + 1)}{4u + 1}$
$s = 3$	$p_6 = \frac{v}{(4u + 1)^2} (4096u^6 + 6144u^5 + 3840u^4 + 2816u^3v + 1280u^3 +$ $+ 2112u^2v + 240u^2 + 528uv + 16v^2 + 24u + 44v + 1)$
$s = 4$	$p_8 = \frac{v}{(4u + 1)^3} (262144u^9 + 589824u^8 + 589824u^7 + 933888u^6v + 344064u^6 +$ $+ 1400832u^5v + 129024u^5 + 875520u^4v + 104448u^3v^2 + 32256u^4 +$ $+ 291840u^3v + 78336u^2v^2 + 5376u^3 + 54720u^2v + 19584uv^2 +$ $+ 64v^3 + 576u^2 + 5472uv + 1632v^2 + 36u + 228v + 1)$

Таблица 6. Формулы для p_{2s}^* в теореме 6

	$u = p_0^* \quad v = p_2^*$
$s = 2$	$p_4^* = \frac{v(64u^3 - 48u^2 + 12u + 4v - 1)}{4u - 1}$
$s = 3$	$p_6^* = \frac{v}{(4u - 1)^2} (4096u^6 - 6144u^5 + 3840u^4 + 2816u^3v - 1280u^3 -$ $- 2112u^2v + 240u^2 + 528uv + 16v^2 - 24u - 44v + 1)$
$s = 4$	$p_8^* = \frac{v}{(4u - 1)^3} (262144u^9 - 589824u^8 + 589824u^7 + 933888u^6v - 344064u^6 -$ $- 1400832u^5v + 129024u^5 + 875520u^4v + 104448u^3v^2 - 32256u^4 -$ $- 291840u^3v - 78336u^2v^2 + 5376u^3 + 54720u^2v + 19584uv^2 +$ $+ 64v^3 - 576u^2 - 5472uv - 1632v^2 + 36u + 228v - 1)$

2.2. Суммы слагаемых с индексами, делящимися на четыре, и чётными индексами, не делящимися на четыре

Теорема 7. Пусть

$$\chi_{2s} := (\alpha - \beta)^{-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_{4n}^{2s}} \quad (s \geq 1).$$

Тогда числа χ_2, χ_4, χ_6 алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 4$

$$\chi_{2s} = \frac{1}{(2s-1)!} \left(\sigma_{s-1}(s)\chi_2 - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^j(2j)!}{2^{2j+4}} \sigma_{s-j-1}(s)(\varphi_j - 2a_j - (2j+1)\psi_{j+1}) \right),$$

где

$$\varphi_1 = \frac{z^2}{12} - 64(\chi_2 + 6\chi_4) - \frac{4}{15}, \quad \varphi_2 = \frac{z}{189} \left(-\frac{11}{4}z^2 + 2880(\chi_2 + 6\chi_4) + 12 \right),$$

$$\psi_1 = -\frac{z}{6}, \quad \psi_2 = \frac{z^2}{36} - 32(\chi_2 + 6\chi_4) - \frac{2}{15}$$

и φ_j, ψ_j ($j \geq 3$) определены рекуррентными формулами (2.1) и (2.2). Здесь z — число, удовлетворяющее кубическому уравнению

$$z^3 - (2880(\chi_2 + 6\chi_4) + 12)z - 8064(\chi_2 + 30\chi_4 + 120\chi_6) + 16 = 0.$$

Таблица 7. Формулы для χ_{2s} в теореме 7

	$u = \chi_2 \quad v = \chi_4$
	$z^3 - (2880(\chi_2 + 6\chi_4) + 12)z - 8064(\chi_2 + 30\chi_4 + 120\chi_6) + 16 = 0$
$s = 4$	$\chi_8 = -\frac{1}{2903040}z^3 + \frac{1}{42}u^2 + \frac{2}{7}uv + \frac{1}{1008}uz + \frac{6}{7}v^2 + \frac{1}{168}vz +$ $+ \frac{1}{360}u + \frac{5}{84}v + \frac{1}{241920}z - \frac{1}{181440}$
$s = 5$	$\chi_{10} = \frac{1}{6386688}uz^3 + \frac{1}{1064448}vz^3 - \frac{5}{11088}u^2z - \frac{5}{924}uvz - \frac{5}{308}v^2z +$ $+ \frac{1}{10644480}z^3 - \frac{5}{504}u^2 - \frac{5}{42}uv - \frac{145}{532224}uz - \frac{5}{14}v^2 -$ $- \frac{145}{88704}vz - \frac{137}{181440}u - \frac{85}{6048}v - \frac{1}{887040}z + \frac{1}{665280}$

Теорема 8. Пусть

$$\chi_{2s}^\# := (\alpha - \beta)^{-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_{4n-2}^{2s}} \quad (s \geq 1).$$

Тогда числа $\chi_2^\#, \chi_4^\#, \chi_6^\#$ алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 4$

$$\chi_{2s}^\# = \frac{1}{(2s-1)!} \left(\sigma_{s-1}(s)\chi_2^\# - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^j(2j)!}{2^{2j+4}} \sigma_{s-j-1}(s)(\varphi_j + (2j+1)\psi_{j+1}) \right),$$

где

$$\varphi_1 = \frac{z^2}{60} + \frac{64}{5}(\chi_2^\# + 6\chi_4^\#), \quad \varphi_2 = \frac{z}{189} \left(\frac{z^2}{4} - 576(\chi_2^\# + 6\chi_4^\#) \right),$$

$$\psi_1 = -\frac{z}{6}, \quad \psi_2 = -\frac{z^2}{180} + \frac{32}{5}(\chi_2^\# + 6\chi_4^\#)$$

и φ_j, ψ_j ($j \geq 3$) определены рекуррентными формулами (2.1) и (2.2). Здесь z задаётся равенством

$$z = \frac{2(\chi_2^\# + 30\chi_4^\# + 120\chi_6^\#)}{\chi_2^\# + 6\chi_4^\#}.$$

Таблица 8. Формулы для $\chi_{2s}^\#$ в теореме 8

	$u = \chi_2^\#$ $v = \chi_4^\#$ $w = \chi_6^\#$
$s = 4$	$\chi_8^\# = \frac{u^3 + 18u^2v + 108uv^2 + 216v^3 - uv - 20uw + 2v^2 - 40vw + 200w^2}{70(u + 6v)}$
$s = 5$	$\chi_{10}^\# = \frac{1}{210(u + 6v)^2}(-u^4 - 18u^3v + 30u^3w - 108u^2v^2 + 540u^2vw - 216uv^3 + 3240uv^2w + 6480v^3w + u^2v + 15u^2w + 3uv^2 + 90uvw - 225uw^2 - 10v^3 + 120v^2w - 750vw^2 + 1000w^3)$

Теорема 9. Для каждого положительного целого p положим

$$\lambda_p := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_{4n}^p}.$$

Тогда числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 2$

$$\lambda_{2s} = \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)!} \left(\sigma_{s-1}(s)\lambda_2 + \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^j (2j)!}{2^{2j+4}} \sigma_{s-j-1}(s)(\varphi_j - 2b_j + (2j+1)\tilde{\varphi}_j) \right),$$

$$\lambda_{2s+1} = \frac{(-1)^s}{2^{2s+3}(2s)!} \sum_{j=0}^s \tau_{s-j}(s) ((-1)^j (2j)! (\psi_j + \tilde{\psi}_j) - 2E_{2j}),$$

где

$$\varphi_1 = x^2y^2, \quad \varphi_2 = \frac{1}{3}x^2y^2(x^2 + y^2),$$

$$\tilde{\varphi}_0 = xy, \quad \tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{6}xy(x^2 + y^2), \quad \tilde{\varphi}_2 = \frac{1}{120}xy(x^4 + 14x^2y^2 + y^4),$$

$$\varphi_j = \frac{1}{j(2j-1)} \left(\frac{6\varphi_2\varphi_{j-1}}{\varphi_1} + 3 \sum_{i=1}^{j-2} \varphi_i\varphi_{j-i-1} \right) \quad (j \geq 3),$$

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{1}{j(2j+1)} \times$$

$$\times \left(\frac{3\tilde{\varphi}_1\tilde{\varphi}_{j-1}}{\tilde{\varphi}_0} + 3\tilde{\varphi}_0^2\tilde{\varphi}_{j-2} + 3\tilde{\varphi}_0 \sum_{i=1}^{j-3} \tilde{\varphi}_i\tilde{\varphi}_{j-i-2} + \sum_{m=1}^{j-4} \tilde{\varphi}_m \sum_{i=1}^{j-m-3} \tilde{\varphi}_i\tilde{\varphi}_{j-m-i-2} \right) \quad (j \geq 3)$$

и

$$\psi_0 = x, \quad \psi_1 = \frac{1}{2}xy^2, \quad \tilde{\psi}_0 = y, \quad \tilde{\psi}_1 = \frac{1}{2}x^2y,$$

$$\psi_j = \frac{1}{j(2j-1)} \times \left(\frac{(4x^2 + y^2)\psi_{j-1}}{2} + 3x \sum_{i=1}^{j-2} \psi_i \psi_{j-i-1} + \sum_{m=1}^{j-3} \psi_m \sum_{i=1}^{j-m-2} \psi_i \psi_{j-m-i-1} \right) \quad (j \geq 2),$$

$$\tilde{\psi}_j = \frac{1}{j(2j-1)} \times \left(\frac{(x^2 + 4y^2)\tilde{\psi}_{j-1}}{2} + 3y \sum_{i=1}^{j-2} \tilde{\psi}_i \tilde{\psi}_{j-i-1} + \sum_{m=1}^{j-3} \tilde{\psi}_m \sum_{i=1}^{j-m-2} \tilde{\psi}_i \tilde{\psi}_{j-m-i-1} \right) \quad (j \geq 2).$$

Здесь x и y — корни квадратного уравнения

$$\xi^2 - (8\lambda_1 + 2)\xi + \frac{32\lambda_3 - 4\lambda_1 + 1}{4\lambda_1 + 1} = 0.$$

Таблица 9. Формулы для λ_p в теореме 9

	$u = \lambda_1 \quad v = \lambda_2 \quad w = \lambda_3$
$p = 4$	$\lambda_4 = -\frac{1}{6}u^2 + \frac{4}{3}uw + \frac{1}{6}v + \frac{1}{3}w$
$p = 5$	$\lambda_5 = \frac{-2u^4 + 16u^3w - u^3 + 12u^2w + 5uw + 2w^2 + w}{3(4u + 1)}$
$p = 6$	$\lambda_6 = -\frac{2}{15}u^4 + \frac{16}{15}u^3w - \frac{1}{15}u^3 + \frac{4}{5}u^2w - \frac{1}{30}u^2 + \frac{2}{5}uw + \frac{8}{15}w^2 + \frac{1}{30}v + \frac{2}{15}w$

Теорема 10. Для каждого положительного целого p положим

$$\lambda_p^\# := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_{4n-2}^p}.$$

Тогда числа $\lambda_1^\#, \lambda_2^\#, \lambda_3^\#$ алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 2$

$$\lambda_{2s}^\# = \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)!} \left(\sigma_{s-1}(s)\lambda_2^\# + \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^j (2j)!}{2^{2j+4}} \sigma_{s-j-1}(s)(\varphi_j - (2j+1)\tilde{\varphi}_j) \right),$$

$$\lambda_{2s+1}^\# = \frac{(-1)^s}{2^{2s+3}(2s)!} \sum_{j=0}^s \tau_{s-j}(s)(-1)^j (2j)! (\psi_j - \tilde{\psi}_j),$$

где величины $\varphi_j = \varphi_j(x, y)$, $\tilde{\varphi}_j = \tilde{\varphi}_j(x, y)$, $\psi_j = \psi_j(x, y)$, $\tilde{\psi}_j = \tilde{\psi}_j(x, y)$ определены в теореме 9, x и $-y$ — корни квадратного уравнения

$$\xi^2 - 8\lambda_1^\# \xi + \frac{8\lambda_3^\# - \lambda_1^\#}{\lambda_1^\#} = 0.$$

Таблица 10. Формулы для $\lambda_p^\#$ в теореме 10

	$u = \lambda_1^\#$	$v = \lambda_2^\#$	$w = \lambda_3^\#$
$p = 4$	$\lambda_4^\# = -\frac{1}{6}u^2 + \frac{4}{3}uw + \frac{1}{6}v$		
$p = 5$	$\lambda_5^\# = \frac{-u^4 + 8u^3w + uw + w^2}{6u}$		
$p = 6$	$\lambda_6^\# = -\frac{2}{15}u^4 + \frac{16}{15}u^3w - \frac{1}{30}u^2 + \frac{1}{5}uw + \frac{8}{15}w^2 + \frac{1}{30}v$		

Следствие 11. Для каждого $s \geq 2$ числа $\lambda_{2s} - \frac{(-1)^{s-1}\sigma_{s-1}(s)}{(2s-1)!}\lambda_2$ и λ_{2s+1} ($\lambda_{2s}^\# - \frac{(-1)^{s-1}\sigma_{s-1}(s)}{(2s-1)!}\lambda_2^\#$ и $\lambda_{2s+1}^\#$) являются многочленами от $x + y = 8\lambda_1 + 2$, $xy = \frac{32\lambda_3 - 4\lambda_1 + 1}{4\lambda_1 + 1}$ ($x - y = 8\lambda_1^\#$, $-xy = \frac{8\lambda_3^\# - \lambda_1^\#}{\lambda_1^\#}$ соответственно).

Теорема 12. Пусть

$$\rho_{2s} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2s}}{V_{4n}} \quad (s \geq 0).$$

Тогда числа ρ_0 and ρ_2 алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 2$

$$\rho_{2s} = \frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s+3}} (\varphi_s + \tilde{\varphi}_s),$$

где

$$\varphi_0 = x, \quad \varphi_1 = -\frac{x}{2}(x^2 - y^2), \quad \tilde{\varphi}_0 = y, \quad \tilde{\varphi}_1 = -\frac{y}{2}(y^2 - x^2),$$

$$\varphi_j = \frac{-1}{j(2j-1)} \times \left(\frac{(5x^2 - y^2)\varphi_{j-1}}{2} + 3x \sum_{i=1}^{j-2} \varphi_i \varphi_{j-i-1} + \sum_{m=1}^{j-3} \varphi_m \sum_{i=1}^{j-m-2} \varphi_i \varphi_{j-m-i-1} \right) \quad (j \geq 2),$$

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{-1}{j(2j-1)} \times \left(\frac{(5y^2 - x^2)\tilde{\varphi}_{j-1}}{2} + 3y \sum_{i=1}^{j-2} \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_{j-i-1} + \sum_{m=1}^{j-3} \tilde{\varphi}_m \sum_{i=1}^{j-m-2} \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_{j-m-i-1} \right) \quad (j \geq 2).$$

Здесь x и y — корни квадратного уравнения

$$\xi^2 - (8\rho_0 + 2)\xi + (4\rho_0 + 1)^2 - \frac{4\rho_2}{4\rho_0 + 1} = 0.$$

Таблица 11. Формулы для ρ_{2s} в теореме 12

	$u = \rho_0$ $v = \rho_2$
$s = 2$	$\rho_4 = \frac{4v(64u^3 + 48u^2 + 12u + v + 1)}{4u + 1}$
$s = 3$	$\rho_6 = \frac{16v}{(4u + 1)^2} (4096u^6 + 6144u^5 + 3840u^4 + 704u^3v + 1280u^3 + 528u^2v + 240u^2 + 132uv + v^2 + 24u + 11v + 1)$

Теорема 13. Положим

$$\rho_{2s}^\# := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2s}}{V_{4n-2}} \quad (s \geq 0).$$

Тогда числа $\rho_0^\#$ and $\rho_2^\#$ алгебраически независимы и для любого целого $s \geq 2$

$$\rho_{2s}^\# = \frac{(-1)^s (2s)!}{2^{2s+3}} (\varphi_s - \tilde{\varphi}_s),$$

где величины $\varphi_j = \varphi_j(x, y)$, $\tilde{\varphi}_j = \tilde{\varphi}_j(x, y)$ определены в теореме 12, x и $-y$ — корни квадратного уравнения

$$\xi^2 - 8\rho_0^\# \xi + 16(\rho_0^\#)^2 - \frac{\rho_2^\#}{\rho_0^\#} = 0.$$

Таблица 12. Формулы для $\rho_{2s}^\#$ в теореме 13

	$u = \rho_0^\#$ $v = \rho_2^\#$
$s = 2$	$\rho_4^\# = \frac{v(64u^3 + v)}{u}$
$s = 3$	$\rho_6^\# = \frac{v(4096u^6 + 704u^3v + v^2)}{u^2}$
$s = 4$	$\rho_8^\# = \frac{v(262144u^9 + 233472u^6v + 6528u^3v^2 + v^3)}{u^3}$

Следствие 14. Для каждого $s \geq 2$ число ρ_{2s} ($\rho_{2s}^\#$) есть многочлен от $x + y = 8\rho_0 + 2$, $xy = (4\rho_0 + 1)^2 - \frac{4\rho_2}{4\rho_0 + 1}$ (соответственно от $x - y = 8\rho_0^\#$, $-xy = 16(\rho_0^\#)^2 - \frac{\rho_2^\#}{\rho_0^\#}$).

3. Подготовка к доказательствам

Рассмотрим полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем k :

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad E = E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt,$$

где $k^2 \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup [1, +\infty))$ и ветвь каждого подынтегрального выражения выбирается так, что оно стремится к 1 при $t \rightarrow 0$. Положим

$$q = e^{-\pi c}, \quad c = \frac{K'}{K}, \quad K' = K(k'), \quad k^2 + (k')^2 = 1.$$

Тогда функции Рамануджана $P(q^2)$, $Q(q^2)$, $R(q^2)$ выражаются через K , E , k следующим образом [9]:

$$\begin{cases} P(q^2) = 1 - 24A_1(q) = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \left(\frac{3E}{K} - 2 + k^2\right), \\ Q(q^2) = 1 + 240A_3(q) = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 (1 - k^2 + k^4), \\ R(q^2) = 1 - 504A_5(q) = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 \frac{1}{2}(1 + k^2)(1 - 2k^2)(2 - k^2), \end{cases} \quad (3.1)$$

где

$$A_{2j+1}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2j+1} q^{2n}}{1 - q^{2n}}. \quad (3.2)$$

Сформулируем теорему Нестеренко о функциях Рамануджана [1].

Теорема Нестеренко. Если $\rho \in \mathbb{C}$ и $0 < |\rho| < 1$, то

$$\text{trans.deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\rho, P(\rho), Q(\rho), R(\rho)) \geq 3.$$

Из этого утверждения и (3.1) вытекает следующая лемма.

Лемма 1. Если $q = e^{-\pi c} \in \bar{\mathbb{Q}}$ и $0 < |q| < 1$, то K/π , E/π , k алгебраически независимы.

Эллиптическая функция Якоби $w = \text{sn } z$ с модулем k определяется равенством

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$$

и удовлетворяет соотношениям

$$(w')^2 = (1-w^2)(1-k^2w^2), \quad w(0) = 0. \quad (3.3)$$

Нам понадобятся также эллиптические функции

$$\text{cn } z = \sqrt{1 - \text{sn}^2 z}, \quad \text{dn } z = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 z},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ns} z &= \frac{1}{\operatorname{sn} z}, & \operatorname{nc} z &= \frac{1}{\operatorname{cn} z}, & \operatorname{nd} z &= \frac{1}{\operatorname{dn} z}, \\ \operatorname{sc} z &= \frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{cn} z}, & \operatorname{cs} z &= \frac{1}{\operatorname{sc} z}, & \operatorname{dc} z &= \frac{\operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z}. \end{aligned}$$

1. Функции $u = \operatorname{dn} z$ и $u = k' \operatorname{nd} z$ удовлетворяют соотношению

$$u'' = -2u^3 + (2 - k^2)u. \quad (3.4)$$

Действительно, согласно определению $\operatorname{dn} z$ ввиду (3.3) мы имеем

$$(u')^2 = (1 - u^2)(u^2 - (k')^2) = -u^4 + (2 - k^2)u^2 - (k')^2,$$

что приводит к (3.4). Так как это уравнение инвариантно относительно подстановки $u = k'/v$, функция $k' \operatorname{nd} z$ также удовлетворяет соотношению (3.4).

2. Функции $u = \operatorname{cs} z$ и $u = k' \operatorname{sc} z$ удовлетворяют уравнению

$$u'' = 2u^3 + (2 - k^2)u. \quad (3.5)$$

Так как $\operatorname{cs}^2 z = \operatorname{sn}^{-2} z - 1$, функция $u = \operatorname{cs} z$ является решением уравнения

$$(u')^2 = (u^2 + 1)(u^2 + 1 - k^2) = u^4 + (2 - k^2)u^2 + 1 - k^2, \quad (3.6)$$

из которого следует (3.5).

3. Функция $u = k' \operatorname{nc} z$ удовлетворяет соотношению

$$u'' = 2u^3 - (1 - 2k^2)u. \quad (3.7)$$

Это следует из того, что $(u')^2 = (u^2 - (k')^2)(u^2 + k^2)$.

4. Функция $u = \operatorname{dc} z$ удовлетворяет уравнению

$$u'' = 2u^3 - (1 + k^2)u. \quad (3.8)$$

Это следует из соотношения $(u')^2 = (u^2 - k^2)(u^2 - 1)$.

Для $\operatorname{ns}^2 z$ и $(1 - k^2)(\operatorname{nc}^2 z - 1)$ мы имеем следующие леммы [6, леммы 2, 3].

Лемма 2. Коэффициенты разложения

$$\operatorname{ns}^2 z = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{2j}$$

задаются равенствами

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{3}(1 + k^2), & c_1 &= \frac{1}{15}(1 - k^2 + k^4), & c_2 &= \frac{1}{189}(1 + k^2)(1 - 2k^2)(2 - k^2), \\ (j - 2)(2j + 3)c_j &= 3 \sum_{i=1}^{j-2} c_i c_{j-i-1} & (j \geq 3). \end{aligned}$$

Лемма 3. Коэффициенты разложения

$$(1 - k^2)(nc^2 z - 1) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j}$$

задаются равенствами

$$c_1 = 1 - k^2, \quad c_2 = \frac{1}{3}(1 - k^2)(2 - k^2),$$

$$j(2j - 1)c_1 c_j = 6c_2 c_{j-1} + 3c_1 \sum_{i=1}^{j-2} c_i c_{j-i-1} \quad (j \geq 3).$$

Функция csz имеет простой полюс в точке $z = 0$. Её разложение в ряд Лорана в этой точке описывается в следующем утверждении.

Лемма 4. Коэффициенты разложения

$$csz = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j-1}$$

задаются равенствами

$$c_1 = -\frac{1}{6}(2 - k^2), \quad c_2 = -\frac{1}{360}(8 - 8k^2 - 7k^4),$$

$$(j - 2)(2j + 1)c_j = -3c_1 c_{j-1} + 3 \sum_{i=1}^{j-1} c_i c_{j-i} + \sum_{m=1}^{j-2} c_m \sum_{i=1}^{j-m-1} c_i c_{j-m-i} \quad (j \geq 3).$$

Доказательство. Согласно (3.5) функция $v = csz - z^{-1}$ удовлетворяет соотношению

$$v'' = 2v^3 + 6z^{-1}v^2 + 6z^{-2}v + (2 - k^2)v + (2 - k^2)z^{-1}. \quad (3.9)$$

Подставляя $v = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j-1}$ в (3.9) и сравнивая коэффициенты при z^{-1} , находим, что $c_1 = -(2 - k^2)/6$, а для $j \geq 2$ коэффициенты при z^{2j-3} удовлетворяют соотношению

$$(2j - 1)(2j - 2)c_j =$$

$$= (2 - k^2)c_{j-1} + 6c_j + 6 \sum_{i=1}^{j-1} c_i c_{j-i} + 2 \sum_{m=1}^{j-2} c_m \sum_{i=1}^{j-m-1} c_i c_{j-m-i}. \quad (3.10)$$

При $j = 2$, однако, обе части (3.10) обращаются в нуль и c_2 не определяется единственным образом. Для того чтобы вычислить c_2 , мы подставим $u = z^{-1} + c_1 z + c_2 z^3 + \dots$ в (3.6). Тогда постоянные члены удовлетворяют равенству

$$-6c_2 + c_1^2 = (2c_1 + 1)(2c_1 + 1 - k^2) + 2(2c_2 + c_1^2),$$

так что $c_2 = -(8 - 8k^2 - 7k^4)/360$. Для $j \geq 3$ равенства (3.10) и $c_1 = -(2 - k^2)/6$ приводят к требуемому рекуррентному соотношению. $\square$

Лемма 5. Коэффициенты разложения

$$k' sc z = k' z + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j+1} \quad (c_0 = k')$$

задаются равенствами

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{k'}{6}(2 - k^2), \quad c_2 = \frac{k'}{120}(16 - 16k^2 + k^4), \\ j(2j + 1)k'c_j &= 3c_1c_{j-1} + 3(k')^3c_{j-2} + 3(k')^2 \sum_{i=1}^{j-3} c_i c_{j-i-2} + \\ &+ k' \sum_{m=1}^{j-4} c_m \sum_{i=1}^{j-m-3} c_i c_{j-m-i-2} \quad (j \geq 3). \end{aligned}$$

Доказательство. Положим $u = z(k' + v)$, $v = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j}$. Тогда (3.5) записывается в виде

$$(zv)'' = z^3(2v^3 + 6k'v^2 + 6(k')^2v + 2(k')^3) + (2 - k^2)zv + k'(2 - k^2)z.$$

Подставляя $v = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j}$ и вычисляя коэффициенты в обеих частях, имеем $c_1 = k'(2 - k^2)/6$ и $20c_2 = 2(k')^3 + (2 - k^2)c_1 = k'(16 - 16k^2 + k^4)/6$. Далее,

$$\begin{aligned} 2j(2j + 1)c_j &= (2 - k^2)c_{j-1} + 6(k')^2c_{j-2} + \\ &+ 6k' \sum_{i=1}^{j-3} c_i c_{j-i-2} + 2 \sum_{m=1}^{j-4} c_m \sum_{i=1}^{j-m-3} c_i c_{j-m-i-2} \end{aligned}$$

при $j \geq 3$, что приводит к требуемому рекуррентному соотношению. $\square$

Лемма 6. Коэффициенты разложения

$$k' nc z = k' + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j} \quad (c_0 = k')$$

задаются равенствами

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{k'}{2}, \\ 2j(2j - 1)c_j &= (1 + 16c_1^2)c_{j-1} + \\ &+ 6k' \sum_{i=1}^{j-2} c_i c_{j-i-1} + 2 \sum_{m=1}^{j-3} c_m \sum_{i=1}^{j-m-2} c_i c_{j-m-i-1} \quad (j \geq 2). \end{aligned}$$

Доказательство. Полагая $u = k' + v$, перепишем (3.7) в виде

$$v'' = 2v^3 + 6k'v^2 + (5 - 4k^2)v + k'.$$

Подставляя $v = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j}$, находим, что $c_1 = k'/2$ и для $j \geq 2$

$$2j(2j-1)c_j = (5-4k^2)c_{j-1} + 6k' \sum_{i=1}^{j-2} c_i c_{j-i-1} + 2 \sum_{m=1}^{j-3} c_m \sum_{i=1}^{j-m-2} c_i c_{j-m-i-1},$$

что приводит к требуемому соотношению. $\square$

Точно так же, используя (3.4) и (3.8), получаем следующие леммы.

Лемма 7. Коэффициенты разложения

$$\operatorname{dn} z = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j} \quad (c_0 = 1)$$

задаются равенствами

$$c_1 = -\frac{k^2}{2},$$

$$j(2j-1)c_j = -(2-c_1)c_{j-1} - 3 \sum_{i=1}^{j-2} c_i c_{j-i-1} - \sum_{m=1}^{j-3} c_m \sum_{i=1}^{j-m-2} c_i c_{j-m-i-1} \quad (j \geq 2).$$

Лемма 8. Коэффициенты разложения

$$k' \operatorname{nd} z = k' + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j} \quad (c_0 = k')$$

задаются равенствами

$$c_1 = \frac{k'k^2}{2},$$

$$2j(2j-1)c_j = (1-5(k')^2)c_{j-1} - 6k' \sum_{i=1}^{j-2} c_i c_{j-i-1} - 2 \sum_{m=1}^{j-3} c_m \sum_{i=1}^{j-m-2} c_i c_{j-m-i-1} \quad (j \geq 2).$$

Лемма 9. Коэффициенты разложения

$$\operatorname{dc} z = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j} \quad (c_0 = 1)$$

задаются равенствами

$$c_1 = \frac{1}{2}(1-k^2),$$

$$2j(2j-1)c_j = (5-k^2)c_{j-1} + 6 \sum_{i=1}^{j-2} c_i c_{j-i-1} + 2 \sum_{m=1}^{j-3} c_m \sum_{i=1}^{j-m-2} c_i c_{j-m-i-1} \quad (j \geq 2).$$

4. Доказательства теорем

Для заданного $\beta \in \bar{\mathbb{Q}}$ выберем $c = c(\beta)$ (или $q = q(\beta)$) так, чтобы

$$q = e^{-\pi c} = \beta^2, \quad \beta = -e^{-\pi c/2}$$

(относительно q и c см. раздел 3).

4.1. Доказательство теоремы 1

Ряды h_{2s} могут быть записаны в виде

$$h_{2s} = 2^{-2s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{cosech}^{2s}(\nu\pi c) = \frac{1}{(2s-1)!} \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{s-j-1}(s) A_{2j+1}(\beta^2), \quad (4.1)$$

где q -ряды $A_{2j+1}(q)$ определены формулой (3.2) (см. [10, таблица 1 (i)]); заметим, что в [10] величина $\sigma_i(s)$ обозначается $\alpha_i(s)$). Из (4.1) следует, что

$$h_2 = A_1, \quad h_4 = \frac{1}{6}(A_3 - A_1), \quad h_6 = \frac{1}{120}(A_5 - 5A_3 + 4A_1),$$

или, в эквивалентной записи,

$$A_1 = h_2, \quad A_3 = h_2 + 6h_4, \quad A_5 = h_2 + 30h_4 + 120h_6. \quad (4.2)$$

По (3.1) и лемме 1 числа h_2, h_4, h_6 алгебраически независимы. Поскольку q -ряды $A_{2j+1}(q)$ порождаются разложением в ряд Фурье функции $\operatorname{ns}^2 z$,

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{ns}^2\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{4K(K-E)}{\pi^2} + \operatorname{cosec}^2 x - 8 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{2j+1} \frac{(2x)^{2j}}{(2j)!} \quad (4.3)$$

(см. [2, с. 535; 10, таблица 1 (i)]), получаем соотношение

$$\varphi_j := \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2j+2} c_j = a_j - (-1)^j \frac{2^{2j+3}}{(2j)!} A_{2j+1} \quad (j \geq 1), \quad (4.4)$$

где c_j — коэффициенты $\operatorname{ns}^2 z$ заданные в лемме 2. В частности, имеем

$$\varphi_1 = \frac{1}{15}(1 + 240A_3), \quad \varphi_2 = \frac{2}{189}(1 - 504A_5), \quad (4.5)$$

что вместе с (4.2) позволяет выразить φ_1 и φ_2 через h_2, h_4, h_6 . Комбинируя (4.1) и (4.4), находим выражения h_{2s} через $\{\varphi_j\}_{j \geq 1}$. Рекуррентные соотношения (2.1) для φ_j ($j \geq 3$) можно получить, умножив обе части формулы из леммы 2 на $(2K/\pi)^{2j+2}$ и применив равенство $\varphi_j = (2K/\pi)^{2j+2} c_j$.

4.2. Доказательство теоремы 2

Ряды l_{2s} и l_{2s+1} могут быть записаны в виде

$$l_{2s} = 2^{-2s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{sech}^{2s}(\nu\pi c) = \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)!} \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{s-j-1}(s) B_{2j+1}(\beta^2), \quad (4.6)$$

$$l_{2s+1} = 2^{-2s-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{sech}^{2s+1}(\nu\pi c) = \frac{(-1)^s}{2^{2s}(2s)!} \sum_{j=0}^s \tau_{s-j}(s) G_{2j}(\beta^2), \quad (4.7)$$

В частности,

$$l_2 = B_1, \quad l_1 = G_0, \quad l_3 = \frac{1}{8}(G_0 - G_2), \quad (4.8)$$

где

$$B_{2j+1}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{2j+1} q^{2n}}{1 - q^{2n}}, \quad G_{2j}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)^{2j} q^{2n-1}}{1 - q^{2n-1}}$$

(см. [10, таблицы 1 (ii), 1 (vi)]; заметим, что в [10] $\tau_i(s)$ обозначается через $\beta_i(s)$). Отметим также, что производящие функции для $B_{2j+1}(q)$ и $G_{2j}(q)$ задаются следующими формулами [10]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (1 - k^2) \left(\operatorname{nc}^2\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) - 1\right) &= -\frac{4KE}{\pi^2} + \sec^2 x + 8 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j B_{2j+1} \frac{(2x)^{2j}}{(2j)!}, \\ \left(\frac{2K}{\pi}\right) \operatorname{dc}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) &= \sec x + 4 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j G_{2j} \frac{x^{2j}}{(2j)!}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях этих формул, имеем

$$1 + 8B_1 = \frac{4KE}{\pi^2}, \quad (4.9)$$

$$\varphi_j := \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2j+2} c_j = b_j + (-1)^j \frac{2^{2j+3}}{(2j)!} B_{2j+1} \quad (j \geq 1), \quad (4.10)$$

$$1 + 4G_0 = \frac{2K}{\pi}, \quad 1 - 4G_2 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1 - k^2), \quad (4.11)$$

$$\psi_j = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2j+1} c'_j = \frac{(-1)^j E_{2j}}{(2j)!} + \frac{(-1)^j 4}{(2j)!} G_{2j} \quad (j \geq 0), \quad (4.12)$$

где c_j (c'_j) — коэффициенты, задаваемые леммой 3 (соответственно леммой 9). Для доказательства (4.12) нужно также использовать разложение в ряд

$$\sec x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j E_{2j}}{(2j)!} x^{2j}.$$

Согласно (4.9) и (4.11) с учётом (4.8) имеем

$$1 + 8l_2 = \frac{4KE}{\pi^2}, \quad 1 + 4l_1 = \frac{2K}{\pi}, \quad 1 - 4(l_1 - 8l_3) = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1 - k^2). \quad (4.13)$$

По лемме 1 эти соотношения означают алгебраическую независимость l_1 , l_2 , l_3 . Используя (4.10) и (4.12), выводим из (4.6) и (4.7) требуемые формулы, выражающие l_{2s} и l_{2s+1} через φ_j и ψ_j соответственно. Более того, по леммам 3 и 9

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 c_1 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 (1 - k^2), \\ \varphi_2 &= \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 c_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 (1 - k^2)(2 - k^2), \\ \psi_0 &= \left(\frac{2K}{\pi}\right) c'_0 = \frac{2K}{\pi}, \quad \psi_1 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 c'_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (1 - k^2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Используя (4.13), получаем выражения для φ_1 , φ_2 , ψ_0 , ψ_1 , указанные в теореме. Рекуррентные соотношения для φ_j (ψ_j) получаются из формул леммы 3 (соответственно леммы 9) умножением на $(2K/\pi)^{2j+2}$ (соответственно на $(2K/\pi)^{2j+1}$), также используется равенство $(2K/\pi)^2(5 - k^2)/2 = (2\psi_0^3 + \psi_1)/\psi_0$.

4.3. Доказательство теоремы 3

Начнём с формул

$$h_{2s}^* = 2^{-2s} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \operatorname{cosech}^{2s}(\nu\pi c) = \frac{1}{(2s-1)!} \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{s-j-1}(s) L_{2j+1}(\beta^2), \quad (4.15)$$

в частности

$$h_2^* = L_1, \quad h_4^* = \frac{1}{6}(L_3 - L_1), \quad (4.16)$$

где

$$L_{2j+1}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2j+1} q^{2n}}{1 + q^{2n}},$$

и производящего ряда

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right) \operatorname{cs}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \operatorname{ctg} x - 4 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j L_{2j+1} \frac{(2x)^{2j+1}}{(2j+1)!} \quad (4.17)$$

(см. [10, таблица 1 (ix)]). Из (4.17) следует, что

$$\psi_{j+1} := \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2j+2} c_{j+1} = -\frac{a_j}{2j+1} - \frac{(-1)^j 2^{2j+3}}{(2j+1)!} L_{2j+1} \quad (j \geq 0), \quad (4.18)$$

где c_j — коэффициенты csz из леммы 4 (заметим, что $(ctg x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$).
Имеем

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\frac{1}{6} \left(\frac{2K}{\pi} \right)^2 (2 - k^2) = -\frac{1}{3} (1 + 24L_1), \\ \psi_2 &= -\frac{1}{360} \left(\frac{2K}{\pi} \right)^4 (8 - 8k^2 - 7k^4) = -\frac{1}{45} (1 - 240L_3).\end{aligned}\quad (4.19)$$

Используя эти соотношения и рекуррентные формулы леммы 4, получаем утверждение теоремы.

4.4. Доказательство теоремы 4

Используем формулы

$$l_{2s}^* = 2^{-2s} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \operatorname{sech}^{2s}(\nu\pi c) = \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)!} \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{s-j-1}(s) M_{2j+1}(\beta^2), \quad (4.20)$$

$$l_{2s+1}^* = 2^{-2s-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \operatorname{sech}^{2s+1}(\nu\pi c) = \frac{(-1)^s}{2^{2s}(2s)!} \sum_{j=0}^s \tau_{s-j}(s) R_{2j}(\beta^2), \quad (4.21)$$

в частности

$$l_2^* = M_1, \quad (4.22)$$

$$l_1^* = R_0, \quad l_3^* = -\frac{1}{8} (R_2 - R_0), \quad (4.23)$$

где

$$M_{2j+1}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{2j+1} q^{2n}}{1 + q^{2n}}, \quad R_{2j}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)^{2j} q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}},$$

а также производящие ряды

$$\left(\frac{2K}{\pi} \right) k' \operatorname{sc} \left(\frac{2Kx}{\pi} \right) = \operatorname{tg} x - 4 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j M_{2j+1} \frac{(2x)^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad (4.24)$$

$$\left(\frac{2K}{\pi} \right) k' \operatorname{nc} \left(\frac{2Kx}{\pi} \right) = \operatorname{sec} x - 4 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j R_{2j} \frac{x^{2j}}{(2j)!} \quad (4.25)$$

(см. [10, таблицы 1 (x), 1 (xiv)]). Из (4.24) и (4.25) получаем

$$\varphi_j := \left(\frac{2K}{\pi} \right)^{2j+2} c_j = \frac{b_j}{2j+1} - \frac{(-1)^j 2^{2j+3}}{(2j+1)!} M_{2j+1} \quad (j \geq 0), \quad (4.26)$$

$$\psi_j := \left(\frac{2K}{\pi} \right)^{2j+1} c'_j = \frac{(-1)^j E_{2j}}{(2j)!} - \frac{(-1)^j 4}{(2j)!} R_{2j} \quad (j \geq 0), \quad (4.27)$$

где c_j и c'_j задаются соответственно в леммах 5 и 6 (заметим, что $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$). Так как

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k' = 1 - 8M_1 = 1 - 8l_2^*, \\ \psi_0 &= \left(\frac{2K}{\pi}\right) k' = 1 - 4R_0 = 1 - 4l_1^*,\end{aligned}\tag{4.28}$$

числа l_1^* и l_2^* алгебраически независимы. Более того, согласно леммам 5 и 6

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{1}{6} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 k'(2 - k^2), \quad \varphi_2 = \frac{1}{120} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 k'(16 - 16k^2 + k^4), \\ \psi_1 &= \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 \frac{k'}{2}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Используя эти соотношения и рекуррентные формулы лемм 5 и 6, получаем утверждение теоремы.

4.5. Доказательство теоремы 5

Имеем

$$\begin{aligned}p_{2s} &= N_{2s}(\beta^2), \quad N_{2s}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2s} q^n}{1 + q^{2n}}, \\ \left(\frac{2K}{\pi}\right) \operatorname{dn} \left(\frac{2Kx}{\pi}\right) &= 1 + 4 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s N_{2s} \frac{(2x)^{2s}}{(2s)!}\end{aligned}\tag{4.30}$$

(см. [10, таблица 1 (xi)]). Тогда

$$\varphi_s := \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2s+1} c_s = (-1)^s \frac{2^{2s+2}}{(2s)!} N_{2s} \quad (s \geq 1),\tag{4.31}$$

где c_s заданы в лемме 7. В частности,

$$\varphi_0 = \frac{2K}{\pi} = 1 + 4p_0, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k^2 = -8p_2.\tag{4.32}$$

Рекуррентные соотношения для φ_s получаются из леммы 7 с помощью равенства $(2K/\pi)^2(4 + k^2)/2 = (2\varphi_0^3 - \varphi_1)/\varphi_0$.

4.6. Доказательство теоремы 6

Теорема следует из соотношений

$$p_{2s}^* = P_{2s}(\beta^2), \quad P_{2s}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{2s} q^n}{1 + q^{2n}},$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right) k' \operatorname{nd} \left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 4 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s P_{2s} \frac{(2x)^{2s}}{(2s)!} \quad (4.33)$$

(см. [10, таблица 1 (xii)]) и

$$\varphi_s := \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{2s+1} c_s = \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+2}}{(2s)!} P_{2s} \quad (s \geq 1), \quad (4.34)$$

$$\varphi_0 = \left(\frac{2K}{\pi}\right) k' = 1 - 4p_0^*, \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k^2 k' = 8p_2^*, \quad (4.35)$$

где c_s заданы в лемме 8.

4.7. Доказательства теорем 7 и 8

Заметим, что

$$\chi_{2s} = \frac{h_{2s} - h_{2s}^*}{2} = \frac{1}{2(2s-1)!} \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{s-j-1}(s) (A_{2j+1}(\beta^2) - L_{2j+1}(\beta^2)) \quad (4.36)$$

(см. разделы 4.1 и 4.3). В дополнение к (4.19) имеем

$$\psi_3 = -\frac{1}{42 \cdot 360} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 (2 - k^2)(16 - 16k^2 + 31k^4) = -\frac{2}{21 \cdot 45} (1 + 504L_5).$$

Из (3.1) и этих формул получаем, что

$$24A_1 = 1 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \left(\frac{3E}{K} - 2 + k^2\right), \quad 240A_3 = -1 + \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 (1 - k^2 + k^4),$$

$$504A_5 = 1 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 \frac{1}{2} (1 + k^2)(1 - 2k^2)(2 - k^2),$$

$$24L_1 = -1 + \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{1}{2} (2 - k^2), \quad 240L_3 = 1 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 \frac{1}{8} (8 - 8k^2 - 7k^4),$$

$$504L_5 = -1 + \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 \frac{1}{32} (2 - k^2)(16 - 16k^2 + 31k^4).$$

Эти равенства и (4.36) приводят к соотношениям

$$X := 48\chi_2 = 24(A_1 - L_1) = 2 - \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \left(\frac{3E}{K} - 1 + \frac{k^2}{2}\right),$$

$$Y := 480(\chi_2 + 6\chi_4) = 240(A_3 - L_3) = -2 + \frac{1}{8} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 (16 - 16k^2 + k^4),$$

$$\begin{aligned} Z := 1008(\chi_2 + 30\chi_4 + 120\chi_6) &= 504(A_5 - L_5) = \\ &= 2 + \frac{1}{32} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 (2 - k^2)(-32 + 32k^2 + k^4), \end{aligned}$$

доказывающим алгебраическую независимость чисел χ_2, χ_4, χ_6 . Полагая

$$x = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2, \quad y = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{E}{K}, \quad z = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 (2 - k^2),$$

можем записать

$$X = 2 - 3y + \frac{z}{2}, \quad Y = -2 + \frac{z^2 + 12xz - 12x^2}{8},$$

$$Z = 2 + \left(\frac{z}{32}\right) (z^2 - 36xz + 36x^2) = 2 + \left(\frac{z}{32}\right) (4z^2 - 24(Y + 2)),$$

откуда следует, что

$$z^3 - 6(Y + 2)z + 8(2 - Z) = 0.$$

Это соотношение совпадает с кубическим уравнением в теореме 7. Из (4.36), учитывая (4.4) и (4.18), можно найти, как выражаются χ_{2s} через φ_j и ψ_j . Используя (4.5), (3.1), (4.19), выразим $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ через z и $Y = 480(\chi_2 + 6\chi_4)$. Таким образом будет доказана теорема 7.

Имеем

$$\chi_{2s}^\# = \frac{h_{2s} + h_{2s}^*}{2} = \frac{1}{2(2s-1)!} \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{s-j-1}(s) (A_{2j+1}(\beta^2) + L_{2j+1}(\beta^2)).$$

Полагая

$$X^\# = 48\chi_2^\# = 24(A_1 + L_1), \quad Y^\# = 480(\chi_2^\# + 6\chi_4^\#) = 240(A_3 + L_3),$$

$$Z^\# = 1008(\chi_2^\# + 30\chi_4^\# + 120\chi_6^\#) = 504(A_5 + L_5)$$

и замечая, что

$$240(A_3 + L_3) = \frac{15}{8} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 k^4, \quad 504(A_5 + L_5) = \frac{63}{32} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^6 (2 - k^2)k^4,$$

находим выражение для z в теореме 8. Наконец, выражая $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ через z и $Y^\#$, получаем утверждение теоремы 8.

4.8. Доказательства теорем 9 и 10

Так как $\lambda_p = (l_p - l_p^*)/2$, имеем

$$\lambda_{2s} = \frac{(-1)^{s-1}}{2(2s-1)!} \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{s-j-1}(s) (B_{2j+1}(\beta^2) - M_{2j+1}(\beta^2)), \quad (4.37)$$

$$\lambda_{2s+1} = \frac{(-1)^s}{2^{2s+1}(2s)!} \sum_{j=0}^s \tau_{s-j}(s) (G_{2j}(\beta^2) - R_{2j}(\beta^2)). \quad (4.38)$$

Подставляя (4.10), (4.12), (4.26), (4.27), находим формулы, выражающие λ_p через $\varphi_j, \tilde{\varphi}_j, \psi_j, \tilde{\psi}_j$ (заметим, что φ_j (ψ_j) в (4.26) (соответственно в (4.27))

обозначается $\tilde{\varphi}_j$ (соответственно $\tilde{\psi}_j$). Отметим, что согласно (4.27)

$$\tilde{\psi}_0 = \left(\frac{2K}{\pi}\right) k' = 1 - 4R_0, \quad \tilde{\psi}_1 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 \frac{k'}{2} = \frac{1}{2} + 2R_2. \quad (4.39)$$

По (4.11), (4.13), (4.23), (4.39) имеем

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(G_0 - R_0) = \frac{1}{8} \left(\frac{2K}{\pi}\right) (1 + k') - \frac{1}{4},$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{16}(G_0 - G_2 - (R_0 - R_2)) = \frac{1}{64} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 (k' + (k')^2) + \frac{\lambda_1}{8} - \frac{1}{32},$$

что можно переписать в виде

$$8\lambda_1 + 2 = x + y, \quad 64\lambda_3 - 8\lambda_1 + 2 = xy(x + y),$$

где

$$x = \frac{2K}{\pi}, \quad y = \left(\frac{2K}{\pi}\right) k'. \quad (4.40)$$

Это значит, что x и y — корни квадратного уравнения из теоремы 9. Используя (4.14), (4.28), (4.29), выражаем $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_0, \psi_1$ через x и y . Так доказывается теорема 9.

Используя соотношения

$$\lambda_{2s}^\# = \frac{(-1)^{s-1}}{2(2s-1)!} \sum_{j=0}^{s-1} \sigma_{s-j-1}(s) (B_{2j+1}(\beta^2) + M_{2j+1}(\beta^2)),$$

$$\lambda_{2s+1}^\# = \frac{(-1)^s}{2^{2s+1}(2s)!} \sum_{j=0}^s \tau_{s-j}(s) (G_{2j}(\beta^2) + R_{2j}(\beta^2))$$

и замечая, что

$$8\lambda_1^\# = \left(\frac{2K}{\pi}\right) (1 - k') = x - y, \quad 64\lambda_3^\# - 8\lambda_1^\# = -\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 k'(1 - k') = -xy(x - y),$$

подобным образом получаем теорему 10.

4.9. Доказательства теорем 12 и 13

Используя формулы

$$\rho_{2s} = \frac{1}{2}(p_{2s} - p_{2s}^*) = \frac{1}{2}(N_{2s}(\beta^2) - F_{2s}(\beta^2)),$$

$$\rho_{2s}^\# = \frac{1}{2}(p_{2s} + p_{2s}^*) = \frac{1}{2}(N_{2s}(\beta^2) + F_{2s}(\beta^2))$$

и выражая $\rho_0, \rho_2, \rho_0^\#, \rho_2^\#$ через x и y , задаваемые (4.40), получаем утверждения обеих теорем.

Литература

- [1] Нестеренко Ю. В. Модулярные функции и вопросы трансцендентности // *Мат. сб.* — 1996. — Т. 187, № 9. — С. 65–96.
- [2] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1963.
- [3] Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions.* — New York: Dover, 1965.
- [4] Duverney D., Nishioka Keiji, Nishioka Kumiko, Shiokawa I. Transcendence of Jacobi's theta series // *Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci.* — 1996. — Vol. 72. — P. 202–203.
- [5] Duverney D., Nishioka Keiji, Nishioka Kumiko, Shiokawa I. Transcendence of Rogers–Ramanujan continued fraction and reciprocal sums of Fibonacci numbers // *Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci.* — 1997. — Vol. 73. — P. 140–142.
- [6] Elsner C., Shimomura Sh., Shiokawa I. Algebraic relations for reciprocal sums of Fibonacci numbers // *Acta Arith.* — 2007. — Vol. 130, no. 1. — P. 37–60.
- [7] Elsner C., Shimomura Sh., Shiokawa I. Algebraic relations for reciprocal sums of odd terms in Fibonacci numbers // *Ramanujan J.* — 2008. — Vol. 17, no. 3. — P. 429–446.
- [8] Hancock H. *Theory of Elliptic Functions.* — New York: Dover, 1958.
- [9] Ramanujan S. On certain arithmetical functions // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* — 1916. — Vol. 22. — P. 159–184.
- [10] Zucker I. J. The summation of series of hyperbolic functions // *SIAM J. Math. Anal.* — 1979. — Vol. 10. — P. 192–206.