О вполне эффективных оценках для обобщённых линейных глобальных соотношений

Т. Р. АЗАМАТОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: azamatov@mail.ru

УДК 511.36

Ключевые слова: теорема Зигеля—Шидловского, p-адические числа, линейная независимость, глобальные соотношения.

Аннотация

В работе анонсируются новые эффективные оценки снизу значений линейных форм от значений рядов специального вида в неархимедовых полях. Результаты связаны с обобщением метода Зигеля—Шидловского.

Abstract

T. R. Azamatov, Effective bounds for generalized linear global relations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 3—6.

This paper puts forward new effective lower bounds for the values of linear forms from certain series in non-Archimedian fields. The results obtained are related to the generalization of Siegel–Shidlovski's method.

В работе использован p-адический вариант метода Зигеля—Шидловского [6].

Пусть $\mathbf{K}$ — алгебраическое числовое поле конечной степени κ над полем $\mathbf{Q}$, V — множество всех нормирований поля $\mathbf{K}$. Для $v \in V$ обозначим через $\mathbf{K_v}$ пополнение поля $\mathbf{K}$ по этому нормированию. Если p — простое число, $v \mid p$, то считаем, что $|p|_v = p^{-\kappa_v/\kappa}$, где $\kappa_v = [\mathbf{K_v} : \mathbf{Q_p}]$.

В 1981 г. Э. Бомбьери [8] ввёл понятие глобального соотношения. Пусть многочлен $P(y_1, \ldots, y_m)$ имеет коэффициенты из $\mathbf{K}$, степенные ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из $\mathbf{K}$, $\xi \in \mathbf{K}$. Соотношение

$$P\big(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)\big) = 0$$

называется *глобальным*, если оно выполняется во всех тех полях $\mathbf{K_v}$, где сходятся ряды $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$. В [8] это понятие было исследовано для так называемых G-функций.

В 1990 г. В. Г. Чирский [3] исследовал F-ряды, естественно дополняющие E- и G-функции Зигеля (определение E- и G-функций дано в [6]). Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n!\, z^n$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 3—6.

принадлежит классу $F(\mathbf{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, если

1) $\overline{|a_n|} = O\big(\exp(c_1 n)\big)$, $n \to \infty$;
2) существует последовательность натуральных чисел $d_n = q^n d_{0,n}$, где $q \in \mathbf{N}$, такая что для всех n и $k = 0, 1, \ldots, n$ числа $d_n a_k$ принадлежат $\mathbf{Z_K}$. При этом натуральные числа $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p, не превосходящие $c_2 n$, и $\operatorname{ord}_p d_{0,n} \leqslant c_3(\log_p n + n/p^2)$.

В [3,4] с помощью модификации метода Зигеля—Шидловского в p-адическом варианте получен критерий отсутствия глобальных соотношений для F-рядов, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям. В 2004 г. в [7] установлен критерий, в котором входящие в него оценки полностью эффективны.

В 1970 г. А. И. Галочкин [1] опубликовал теорему об алгебраической независимости значений E-функций в трансцендентных точках, допускающих достаточно хорошие приближения алгебраическими числами. В 2000 г. В. Г. Чирский [4] рассмотрел обобщение понятия глобального соотношения на случай ряда, сходящегося в каждом из полей $\mathbf{K_v}$ к элементу этого поля, хорошо приближаемому числами из $\mathbf{K}$.

В настоящей работе сформулирована теорема, в которой все входящие величины явно выражены через параметры классов, системы дифференциальных уравнений и рассматриваемых точек.

Теорема. *Пусть* $f_1(z) \equiv 1, f_2(z), \ldots, f_m(z)$ — F*-ряды, составляющие решение системы* $\mathbf{D}$ *линейных дифференциальных уравнений*

$$y_i'(z) = \sum_{j=1}^{m} Q_{j,i}(z) y_j(z), \quad i = 1, \ldots, m, \quad Q_{j,i}(z) \in \mathbf{K}(z), \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

и линейно независимые над $\mathbf{K}(z)$*. Пусть*

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k,$$

где θ_k *— целые числа из* $\mathbf{K}$*. Пусть*

$$\Theta_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$ *и существует бесконечное множество таких номеров* n*, что для всех простых чисел* p*, удовлетворяющих неравенству*

$$p \leqslant m \exp\big(\ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}\,\big),$$

и любого нормирования v*, продолжающего* p*-адическое нормирование в поле* $\mathbf{K}$*, выполняется неравенство*

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp\big(-(m-1+\delta) \exp\big(\ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}\,\big) \ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}\,\big).$$

Пусть последовательность h_n *определена равенством*

$$\ln h_n = \delta \exp\big(\ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}\,\big) \ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|} - c_4 \exp\big(\ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}\,\big) \ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \overline{|\Theta_n|},$$

где $c_4 = 2+c_5$ *при* $\varepsilon \geqslant 1$ *и* $c_4 = 2$ *при* $\varepsilon < 1$, $c_5 = m^2(c_1 \log_p q+1,25c_2c_3+2c_3+5)$. *Тогда для любой нетривиальной линейной формы*

$$L(y_1, y_2, \dots, y_m) = a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_my_m,$$

где $a_i \in \mathbf{Z_K}$, $i = 1, \dots, m$, *и* $\max\limits_{i=\overline{1,m}} \overline{|a_i|} = h \geqslant H_0$, *такой что* $h_{n-1} < h \leqslant h_n$ *при* $n > n_0$, *где* n_0 — *эффективная постоянная, определённая ниже в замечании к теореме (также см.* [7]), *существуют простое* p *в интервале*

$$\overline{|\Theta_n|} \leqslant p \leqslant m \exp\bigl(\ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}\,\bigr)$$

и нормирование v, *продолжающее* p-*адическое нормирование в поле* $\mathbf{K}$, *такие что в поле* $\mathbf{K}_v$ *выполняется неравенство*

$$\bigl|L\bigl(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)\bigr)\bigr|_v \geqslant h^{-1} h_n^{\frac{1-m}{\delta} - \frac{c_4(m-1)(1-\delta)}{\delta(\ln\ln h_n)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}}} = \exp^{-B_l(h,h_n)} \qquad (2)$$

Замечание. Для n_0 имеется полностью эффективная оценка сверху

$$n_0 \leqslant C(\kappa, m, \sigma) H(\mathbf{D})^{c(\kappa,m,\sigma)},$$

где

$$c(\kappa, m, \sigma) = \log_2 C(\kappa, m, \sigma) = (2\kappa(\sigma+1)m)^{(2(\sigma+1)m)^{8m}},$$

а $H(\mathbf{D})$ и $\sigma = \deg(\mathbf{D})$ определены следующим образом. Пусть $\bar{\mathbf{Q}}$ — алгебраическое замыкание $\mathbf{Q}$ над $\mathbf{C}$, и пусть $\bar{\mathbf{Z}}$ — кольцо алгебраических целых чисел. Введём следующие определения.

1. *Высотой* $H(\alpha)$ *алгебраического числа* α называется максимум из чисел $\mathrm{den}(\alpha) \in \mathbf{N}$ и $\mathrm{size}(\alpha)$, где $\mathrm{den}(\alpha)$ — наименьшее положительное целое $d \in \mathbf{Z}$, такое что $d\alpha \in \bar{\mathbf{Z}}$, и $\mathrm{size}(\alpha)$ — максимум всех архимедовых абсолютных величин α
2. *Высотой* $H(P)$ *совокупности* $P = \{P_1, \dots, P_t\}$ *многочленов* $P_i \in \bar{\mathbf{Q}}(X)$ называется наименьший общий знаменатель всех коэффициентов всех P_i и всех высот их коэффициентов; *степенью* $\deg(P)$ совокупности P называется максимум степеней P_i.
3. *Высотой* $H(Q)$ (*степенью* $\deg Q$) *совокупности* $Q = \{Q_1, \dots, Q_t\}$ *рациональных функций, где* $Q_i \in \bar{\mathbf{Q}}(X)$, называется высота (соответственно степень) совокупности многочленов $T, TQ_1, \dots, TQ_t$, где T — приведённый многочлен минимальной степени над $\bar{\mathbf{Q}}(X)$, такой что все TQ_i принадлежат $\bar{\mathbf{Q}}(X)$. Это определение применимо, в частности, к множеству коэффициентов $Q = \{Q_{i,j},\ 1 \leqslant i, j \leqslant m\}$ дифференциальной системы $\mathbf{D}$ (1). Таким образом, понятие высоты $H(\mathbf{D}) = H(Q)$ и степени $\deg(\mathbf{D}) = \deg(Q)$ для $\mathbf{D}$ корректно определено.

Предложение 1. *Пусть* $n \in \mathbf{N}$,

$$p \leqslant m \exp(\ln^{1+\varepsilon} \overline{|\Theta_n|}).$$

Рассмотрим $\mathbf{K_v}$ — *поле, в котором выполнено неравенство* (2), *где* $v \mid p$. *Тогда неравенство* (2) *выполняется не только для самих* $f_i(\xi)$, *но и для некоторых* N-*х* *частичных сумм этих рядов. При этом достаточно рассмотреть N, не превосходящие*

$$p^2(p-1)\frac{\kappa B_l(h,h_n)}{\kappa_v c_3 \ln p}-1.$$

Предложение 2. *Теорема применима к точкам вида*

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\prod_{k=1}^{n}p_k^{\gamma_k(n)}, \tag{3}$$

где $\alpha_n\in\mathbf{Z_K}$, p_k — k-е простое число, а $\gamma_k(n)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющих условию

$$\gamma_k(n+1)>\frac{B_l(h,h_n)}{\ln^{1+\epsilon}\overline{|\Theta_n|}+\ln m}.$$

Предложение 3. *Точки вида* (3) *являются трансцендентными элементами поля $\mathbf{K}_v$ для любого простого p, удовлетворяющего условию*

$$p\leqslant\exp(\ln^{1+2\varepsilon}\overline{|\Theta_n|}),$$

и любого $v\mid p$.

Литература

[1] Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений E-функций в некоторых трансцендентных точках // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1970. — № 5. — С. 58—63.

[2] Салихов В. Х. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций // ДАН СССР. — 1989. — Т. 307, № 2. — С. 284—286.

[3] Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. — 1990. — Т. 48, № 2. — С. 123—127.

[4] Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов в полях с неархимедовыми нормированиями. — М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2000.

[5] Чирский В. Г. Метод Зигеля—Шидловского в p-адической области // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 6. — С. 221—230.

[6] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.

[7] Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). — 2004. — Vol. 13, no. 2. — P. 241—260.

[8] Bombieri E. On G-functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. Vol. 2. — London: Academic Press, 1981. — P. 1—68.