Арифметические свойства сумм Шимуры для некоторых модулярных форм

Г. В. ВОСКРЕСЕНСКАЯ
Самарский государственный университет
e-mail: galvosk@mail.ru

УДК 511.38

Ключевые слова: модулярные формы, η-функция Дедекинда, суммы Шимуры, квадратичные поля.

Аннотация

В этой статье мы изучаем суммы Шимуры, связанные с модулярными формами с мультипликативными коэффициентами, которые являются произведениями η-функций Дедекинда от различных аргументов. Мы доказываем некоторые семейства тождеств, содержащих суммы Шимуры. Тип полученного тождества зависит от разложения простых чисел в некоторых мнимых квадратичных числовых полях.

Abstract

G. V. Voskresenskaya, Arithmetic properties of Shimura sums related to several modular forms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 7—22.

The paper is concerned with Shimura sums related to modular forms with multiplicative coefficients which are products of Dedekind η-functions of various arguments. Several identities involving Shimura sums are established. The type of an identity obtained depends on the splitting of primes in certain imaginary quadratic number fields.

1. Введение

В этой статье мы изучаем свойства мультипликативных η-произведений. Эти модулярные формы являются произведениями η-функций Дедекинда от различных аргументов, соответствующих разбиениям числа 24, с мультипликативными коэффициентами. Они были введены в рассмотрение Д. Даммитом, Х. Кисилевским и Дж. Маккеем в 1985 г. [6]. Этих функций тридцать, двадцать восемь из них имеют целый вес, а две — полуцелый вес.

Мультипликативные η-произведения целого веса также могут быть описаны следующими условиями:

1) они являются параболическими формами целого веса с характерами;
2) они имеют нули только в параболических вершинах, кратность каждого нуля равна 1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 7—22.

Этот факт был доказан в [19]. Условие, что кратность нуля равна 1, является существенным. Фактически, все эти формы оказываются собственными функциями относительно всех операторов Гекке.

Две параболические формы полуцелого веса с мультипликативными коэффициентами — это $\eta(24z)$, $\eta^3(8z)$.

Эти тридцать функций обладают многими интересными свойствами, которые изучались с различных точек зрения в работах [1—20].

Суммы Шимуры использовались в исследованиях соотношений между модулярными формами целого и полуцелого весов. К. Оно в [17] рассматривает суммы Шимуры, связанные с мультипликативным η-произведением

$$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z).$$

В этой статье мы изучаем суммы Шимуры, связанные с другими мультипликативными η-произведениями. Мы доказываем некоторые семейства тождеств, содержащих суммы Шимуры. Тип полученного тождества зависит от разложения простых чисел в некоторых мнимых квадратичных числовых полях. Аргументы, использовавшиеся К. Оно, для многих других мультипликативных η-произведений не могут быть применены напрямую, и мы получаем несколько необходимых новых технических результатов.

2. Мультипликативные η-произведения

Здесь мы приведём полный список мультипликативных η-произведений с указанием весов, уровней и характеров. η-функция Дедекинда $\eta(z)$ определяется формулой

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi i z},$$

z принадлежит верхней комплексной полуплоскости.

Таблица 1

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta(23z)\eta(z)$	1	23	$\left(\frac{-23}{d}\right)$
$\eta(22z)\eta(2z)$	1	44	$\left(\frac{-11}{d}\right)$
$\eta(21z)\eta(3z)$	1	63	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta(20z)\eta(4z)$	1	80	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta(18z)\eta(6z)$	1	108	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(16z)\eta(8z)$	1	128	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^2(12z)$	1	144	$\left(\frac{-1}{d}\right)$

$\eta^4(6z)$	2	36	1
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	1
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	1
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	1
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15	1
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14	1
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27	1
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11	1
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	3	12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^6(4z)$	3	16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$	3	8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^3(7z)\eta^3(z)$	3	7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6	1
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5	1
$\eta^8(3z)$	4	9	1
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	1
$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	5	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3	1
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1
$\eta^8(2z)\eta^8 z)$	8	2	1
$\eta^{24}(z)$	12	1	1
$\eta^3(8z)$	$\frac{3}{2}$	4	$\left(\frac{-4}{d}\right)$
$\eta(24z)$	$\frac{1}{2}$	576	$\left(\frac{12}{d}\right)$

3. Суммы Шимуры. Теоремы Сипры и Оно

Определение. *Арифметическая функция* — это комплекснозначная функция, определённая на множестве всех натуральных чисел.

Пусть $a(n)$ — арифметическая функция. Доопределим эту функцию до функции на множестве неотрицательных рациональных чисел, считая, что значение функции равно нулю, если аргумент не является натуральным числом.

Определение. Пусть $a(n)$ — функция, описанная выше, и c — целое положительное число. Тогда для целого $m \geqslant 1$ сумма Шимуры $\mathrm{Sh}(m, a, c)$ определяется формулой

$$\mathrm{Sh}(m, a, c) = \sum_{j=1}^{m-1} a\left(\frac{m^2 - j^2}{c}\right).$$

Пусть $f(z)$ — параболическая форма целого веса k,

$$\Theta(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2},$$

$$F(z) = f(4z)\Theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^{n^2} \in S_{k+1/2}(4N, \chi).$$

Пусть t — бесквадратное натуральное число. Определим $A_t(n)$ с помощью формального произведения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_t(n)}{n^s} = L\big(s - k + 1, \chi_t^{(k)}\big) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(tm^2)}{m^s}.$$

Здесь

$$\chi_t^{(k)}(m) = \chi(m)\left(\frac{-1}{m}\right)^k \left(\frac{t}{m}\right) -$$

характер Дирихле по модулю $4Nt$,

$$\chi_1^{(k)}(m) = \chi(m)\left(\frac{-1}{m}\right)^k.$$

Образ $F(z)$ под действием подъёма Шимуры определяется формулой

$$S_t(F) = \sum_{n=1}^{\infty} A_t(n)q^n.$$

Г. Шимура доказал [18], что

$$\begin{aligned} S_t(F) &\in S_{2k}(2N, \chi^2), \quad \text{если} \;\; k > 1,\\ S_t(F) &\in M_{2k}(2N, \chi^2), \quad \text{если} \;\; k = 1. \end{aligned}$$

Теорема (Б. Сипра). *Пусть*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_k(N, \chi) -$$

новая форма целого веса и

$$F(z) = f(4z)\Theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)q^{n^2}.$$

Тогда

$$S_1(F) = f^2(z) - 2^{k-1}\chi(2)f^2(2z).$$

Эта теорема была доказана в [5].

В этом случае

$$A(n) = A_1(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}\chi_1^{(k)}(d) b\left(\frac{n^2}{d^2}\right),$$

$$b(m^2) = a\left(\frac{m^2}{4}\right) + 2\sum_{j=1}^{m-1} a\left(\frac{m^2-j^2}{4}\right) = a\left(\frac{m^2}{4}\right) + 2\mathrm{Sh}(m, a, 4).$$

Также мы видим, что $\mathrm{Sh}(2n, a, 4) = \mathrm{Sh}(n, a, 1)$.

Теорема (К. Оно). *Если*

$$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_3(8, \chi),$$

то

1) *если p инертно в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, то*

$$p = \sqrt{-\frac{\mathrm{Sh}(4p, a, 4)}{2}};$$

2) *если p разлагается или разветвляется в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, то*

$$p = \sqrt{a^2(p) + \frac{\mathrm{Sh}(4p, a, 4)}{2}}.$$

Эта теорема была доказана в [17]. В этом случае $\chi(2) = 0$ и $a(4) \neq 0$. Это условие является существенным. Для многих других мультипликативных η-произведений, если $\chi(2) \neq 0$, то $a(2n) = 0$, и мы не можем использовать те же аргументы в наших рассуждениях. Мы также не можем найти выражения для p из теоремы Сипры, когда вес $k = 1$. Мы будем изучать суммы Шимуры, связанные с некоторыми другими мультипликативными η-произведениями, не используя теорему Сипры, в разделах 4 и 5 и обсудим приложение этой теоремы в разделе 6.

4. Коэффициенты мультипликативных η-произведений и суммы Шимуры

Теорема 1. *Если*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_k(N, \chi) \text{ —}$$

такое мультипликативное η-произведение, что

$$h(z) = f^2\left(\frac{z}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_{2k}(N)$$

также мультипликативное η-произведение, то

$$c(p) = 2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p), \tag{4.1}$$

$$c(p^2) = 2\mathrm{Sh}(p^2,a,1) + 2\chi(p)p^{k-1}\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p^2), \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} p^{2k-1} &= \bigl(2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p)\bigr)^2 - 2\mathrm{Sh}(p^2,a,1) - a^2(p^2) - 2\chi(p)p^{k-1}\mathrm{Sh}(p,a,1) = \\ &= \bigl(2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p)\bigr)^2 - 2\mathrm{Sh}(p^2,a,1) - a^2(p^2) - 2\bigl(a^2(p) - a(p^2)\bigr)\mathrm{Sh}(p,a,1). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь p — простое число.

Доказательство. Существует 13 пар таких функций $\bigl(f(z),h(z)\bigr)$. Мы выпишем их в следующей таблице.

Таблица 2

$f(z)$	k	N	$\chi(p)$	$h(z)$
$\eta(22z)\eta(2z)$	1	44	$\left(\frac{-11}{p}\right)$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$
$\eta(20z)\eta(4z)$	1	80	$\left(\frac{-5}{p}\right)$	$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$
$\eta(18z)\eta(6z)$	1	108	$\left(\frac{-3}{p}\right)$	$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$
$\eta(16z)\eta(8z)$	1	128	$\left(\frac{-2}{p}\right)$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$
$\eta^2(12z)$	1	144	$\left(\frac{-1}{p}\right)$	$\eta^4(6z)$
$\eta^4(6z)$	2	36	1	$\eta^8(3z)$
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	1	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	1	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	1	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	3	12	$\left(\frac{-3}{p}\right)$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$\eta^6(4z)$	3	16	$\left(\frac{-1}{p}\right)$	$\eta^{12}(2z)$
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	1	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1	$\eta^{24}(z)$

Во всех этих случаях $a(2m) = 0$, $a(1) = 1$. Поэтому мы рассматриваем только $a(n)$ для нечётных n во всех этих суммах. Конечно, мы учитываем, что $\chi(2) = 0$ во всех этих случаях, так как уровни N чётны.

Имеем

$$\begin{aligned} c(p) &= \sum_{j=1}^{2p-1} a(j)a(2p-j) = 2\sum_{j=1}^{p-1} a(j)a(2p-j) + a^2(p) \overset{t=p-j}{=} \\ &= 2\sum_{t=1}^{p-1} a(p-t)a(p+t) + a^2(p) = 2\sum_{t=1}^{p-1} a(p^2-t^2) + a^2(p) = 2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p). \end{aligned}$$

Если $p-t$ и $p+t$ нечётны и $1 \leqslant t \leqslant p-1$, то $d=(p-t,p+t)=1$, потому что $d \mid 2p$. Мы используем мультипликативность коэффициентов $a(n)$.

Имеем

$$\begin{aligned}
c(p^2) &= \sum_{j=1}^{2p^2-1} a(j)a(2p^2-j) = 2\sum_{j=1}^{p^2-1} a(j)a(2p-j) + a^2(p^2) = \\
&= 2\sum_{j=1,\ j\neq pl}^{p^2-1} a(j)a(2p^2-j) + 2\sum_{l=1}^{p-1} a(pl)a(2p^2-pl) + a^2(p^2) = \\
&= 2\sum_{j=1,\ j\neq pl}^{p^2-1} a(j)a(2p^2-j) + 2a^2(p)\sum_{l=1}^{p-1} a(l)a(2p-l) + a^2(p^2) \overset{t=p^2-j}{=} \\
&= 2\sum_{t=1,\ (t,p)=1}^{p^2-1} a(p^2-t)a(p^2+t) + 2a^2(p)\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Sh}(p^2,a,1) &= 2\sum_{t=1,\ (t,p)=1}^{p^2-1} a(p^4-t^2) + 2\sum_{l=1}^{p-1} a(p^4-p^2l^2) = \\
&= 2\sum_{t=1,\ (t,p)=1}^{p^2-1} a(p^2-t^2)a(p^2+t^2) + 2a(p^2)\sum_{l=1}^{p-1} a(p^2-l^2) = \\
&= 2\sum_{t=1,\ (t,p)=1}^{p^2-1} a(p^2-t)a(p^2+t) + 2a(p^2)\mathrm{Sh}(p,a,1).
\end{aligned}$$

Если p^2-t и p^2+t нечётны и $(t,p)=1$, то $d=(p^2-t,p^2+t)=1$, потому что $d \mid 2p^2$. Сравнивая эти два выражения, мы получаем, что

$$c(p^2) = 2\mathrm{Sh}(p^2,a,1) + 2\big(a^2(p^2)-a(p^2)\big)\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p^2).$$

Мультипликативные η-произведения являются собственными формами относительно всех операторов Гекке, поэтому $\chi(p)p^{k-1}+a(p^2)=a^2(p)$. Из этого соотношения мы получаем, что

$$c(p^2) = 2\mathrm{Sh}(p^2,a,1) + 2\chi(p)p^{k-1}\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p^2).$$

Из условия $p^{2k-1}=c^2(p)-c(p^2)$ мы выводим, что

$$p^{2k-1} = \big(2\mathrm{Sh}(p,a,1)+a^2(p)\big)^2 - 2\mathrm{Sh}(p^2,a,1) - a^2(p^2) - 2\chi(p)p^{k-1}\mathrm{Sh}(p,a,1). \quad \square$$

Во многих случаях мы можем упростить эти основные выражения.

Пример 1. $f(z)=\eta(20z)\eta(4z)$, $\chi(p)=-5/p$, $\chi(2)=0$, $p=7$, $k=1$. $\chi(7)=1$, $a(49)=0$, $\mathrm{Sh}(7,a,1)=a(45)=1$, $\mathrm{Sh}(49,a,1)=a(801)=a(9)a(89)=-2$. Остальные слагаемые равны 0.

В выражении (4.3) в теореме 1 мы имеем значения $7=4+4+1-2\cdot 1$.

Следствие. *Пусть* $f(z)$ *и* $h(z)$ — *такие мультипликативные* η*-произведения и* K — *такое квадратичное числовое поле, как указано в таблице* 3. *Если* p *инертно в* K, *то* $c(p) = 2\mathrm{Sh}(p, a, 1)$.

Таблица 3

$f(z)$	$h(z)$	K
$\eta(22z)\eta(2z)$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$
$\eta(20z)\eta(4z)$	$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$
$\eta(18z)\eta(6z)$	$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))$
$\eta(16z)\eta(8z)$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$
$\eta^2(12z)$	$\eta^4(6z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$
$\eta^4(6z)$	$\eta^8(3z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$
$\eta^6(4z)$	$\eta^{12}(2z)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$

Доказательство. Мы знаем [6], что в рассматриваемых случаях, если p инертно в K, то $a(p) = 0$. Следствие вытекает из формулы (4.1). □

5. Арифметика квадратичных полей и суммы Шимуры

Теорема 2. *Пусть*

$$f(z) = \eta(18z)\eta(6z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(108, \chi).$$

1. *Если* p *инертно в* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, *то*
$$p = -2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - 1.$$
2. *Если* p *расщепляется в* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, *то*
$$p = \big(2\mathrm{Sh}(p, a, 1) + a^2(p)\big)^2 - 2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - a^2(p^2) - 2\mathrm{Sh}(p, a, 1).$$
В частности, если $|a(p)| = 1$, *то*
$$p = 4\mathrm{Sh}^2(p, a, 1) - 2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) + 2\mathrm{Sh}(p, a, 1) + 1;$$
если $|a(p)| = 2$, *то*
$$p = 4\mathrm{Sh}^2(p, a, 1) - 2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) + 14\mathrm{Sh}(p, a, 1) - 5.$$

Доказательство. Имеем

$$h(z) = \eta^2(9z)\eta^2(3z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_2(27).$$

1. Известно [6], что если p инертно в $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то $a(p) = 0$, $c(p) = 0$, $a^2(p^2) = 1$. Имеем $2\mathrm{Sh}(p, a, 1) + a^2(p) = c(p)$. Следовательно, $\mathrm{Sh}(p, a, 1) = 0$. Из формулы (4.3) получим, что $p = -2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - 1$.

2. В этом случае $\chi(p) = 1$. Из соотношения $\chi(p)+a(p^2) = a^2(p)$ мы получаем, что если $|a(p)| = 1$, то $a^2(p^2) = 0$; если $|a(p)| = 2$, то $a^2(p^2) = 9$. Формулы для p выводятся из (4.3). □

Пример 2. При $p = 7$ имеем $a(7) = -1$, $\mathrm{Sh}(7, a, 1) = a(13) = -1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Sh}(49, a, 1) &= a(2257) + a(2077) + a(1825) + a(1501) + a(97) = \\ &= a(37)a(61) + a(31)a(67) + a(25)a(73) + a(19)a(79) + a(97) = \\ &= 1 - 2 - 1 + 1 - 1 = -2.\end{aligned}$$

Остальные слагаемые равны 0.

В выражении $p = 4\mathrm{Sh}^2(p, a, 1) - 2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) + 2\mathrm{Sh}(p, a, 1) + 1$ в теореме 2 мы имеем значения $7 = 4 + 4 - 2 + 1$.

При $p = 5$ имеем

$$\mathrm{Sh}(25, a, 1) = a(19)a(31) + a(13)a(37) + a(7)a(43) = -2 + 1 - 2 = -3.$$

Остальные слагаемые равны 0.

В выражении $p = -2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - 1$ в теореме 2 мы имеем значения $5 = (-2) \cdot (-3) - 1$.

Теорема 3. *Пусть*

$$f(z) = \eta^2(12z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(144, \chi).$$

1. *Если p инертно в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то $p = -2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - 1$.*
2. *Если p расщепляется в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то $p = l^2 + 3m^2$ и $(l/3)l = \mathrm{Sh}(p, a, 1) + 2$,*

$$p = \big(2\mathrm{Sh}(p, a, 1) + a^2(p)\big)^2 - 2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - a^2(p^2) - 2\mathrm{Sh}(p, a, 1).$$

Доказательство. Имеем

$$h(z) = \eta^4(6z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_2(36).$$

1. Известно [6], что если p инертно в $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то $a(p) = 0$, $c(p) = 0$, $a^2(p^2) = 1$. Имеем, что $2\mathrm{Sh}(p, a, 1) + a^2(p) = c(p)$. Следовательно, $\mathrm{Sh}(p, a, 1) = 0$. Из формулы (4.3) мы получаем $p = -2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - 1$.

2. Из известной формулы

$$\eta^4(6z) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \left(\frac{l}{3}\right) l q^{l^2} + \sum_{l,m=1}^{\infty} (-1)^{l+m-1} \left(\frac{l}{3}\right) l q^{l^2+3m^2}$$

получаем, что

$$c(p) = \begin{cases} 2(\frac{l}{3})l, & p = l^2 + 3m^2, \\ 0, & p \neq l^2 + 3m^2. \end{cases}$$

Если $p \equiv 1\ (3)$, то $|a(p)| = 2$, и мы получаем из формулы (4.1) соотношение $(l/3)l = \mathrm{Sh}(p, a, 1) + 2$.

Последняя формула в нашей теореме доказывается так же, как в теореме 2. □

Пример 3. При $p = 5$ $\mathrm{Sh}(25, a, 1) = a(1)a(49) + a(13)a(37) = 1 - 4 = -3$, $p = -2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - 1 = 5 = (-2) \cdot (-3) - 1$.

При $p = 37$ имеем, что $37 = 5^2 + 3 \cdot 2^2$, $\mathrm{Sh}(37, a, 1) = -7$ и $5 = l = -\mathrm{Sh}(37, a, 1) - 2 = 7 - 2$.

Теорема 4. *Рассмотрим*

$$\eta^4(6z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n \in S_2(36).$$

1. *Если p инертно в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то*

$$p^3 = -2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - a^2(p^2).$$

2. *Если p расщепляется в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то*

$$p^3 = \big(2\mathrm{Sh}(p, a, 1) + a^2(p)\big)^2 - 2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - a^2(p^2) - 2\big(a^2(p) - a(p^2)\big)\mathrm{Sh}(p, a, 1).$$

Доказательство. Имеем

$$h(z) = \eta^8(3z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) q^n \in S_4(9).$$

1. Известно [6], что если p инертно в $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то $a(p) = 0$, $c(p) = 0$, $a^2(p^2) = 1$. Имеем $2\mathrm{Sh}(p, a, 1) + a^2(p) = c(p)$. Следовательно, $\mathrm{Sh}(p, a, 1) = 0$. Из формулы (4.3) мы получаем, что $p = -2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - 1$.

2. Формула для p^3 получается из (4.3) при $k = 2$. □

Теорема 5. *Пусть*

$$f(z) = \eta(16z)\eta(8z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n \in S_1(128, \chi).$$

1. *Если p расщепляется в $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ и в $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, то*

$$p = 4\mathrm{Sh}^2(p, a, 1) - 2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) + 14\mathrm{Sh}(p, a, 1) - 5.$$

2. *Если p инертно в $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, то*

$$p = -2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - 1.$$

3. *Если p расщепляется в $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ и p инертно в $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, то*

$$p = 4\mathrm{Sh}^2(p, a, 1) - 2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) + 2\mathrm{Sh}(p, a, 1) - 1.$$

Доказательство. Имеем, что $\chi(p) = -2/p$ при $p > 2$; $\chi(2) = 0$.

1. В первом случае $\chi(p) = 1$, $p \cong 1\,(8)$. Элементарными методами можно показать, что если $a(p) \neq 0$, то $|a(p)| = 2$. Из соотношения $\chi(p) + a(p^2) = 4$ мы получим, что $a(p^2) = 3$. Формула для p следует из (4.3).

2. Во втором случае $p \equiv 3\,(8)$ и $p \equiv 7\,(8)$. Мы видим, что $a(p) = 0$ and $c(p) = 0$ для таких p. Мы получаем из (4.1), что $\mathrm{Sh}(p, a, 1) = 0$, и из (4.3), что $p = -2\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - 1$.

3. В третьем случае $p \cong 5\,(8)$, $\chi(p) = -1$, $a(p) = 0$, $a^2(p^2) = 1$. Формула для p следует из (4.3). □

6. Приложение теоремы Сипры

Для модулярных форм, приведённых в таблице 2, $\chi(2) = 0$ (N чётно), $a(2) = 0$, $c(2p) = A(4p)$. Также мы имеем, что $\mathrm{Sh}(2n, a, 4) = \mathrm{Sh}(n, a, 1)$, $\mathrm{Sh}(4, a, 4) = \mathrm{Sh}(2, a, 1) = a(3)$, $c(2) = 2a(3)$. Из теоремы Сипры следует, что

$$A(4p) = a(4p^2) + \chi(p)p^{k-1}a(4) + 2p^{k-1}\chi(p)\mathrm{Sh}(4, a, 4) + 2\mathrm{Sh}(4p, a, 4) = \\ = c(2)c(p) = 2a(3)c(p).$$

Мы получаем формулу

$$a(3)\chi(p)p^{k-1} = -\mathrm{Sh}(2p, a, 1) + a(3)c(p). \tag{6.1}$$

Для функций $\eta(20z)\eta(4z)$, $\eta(18z)\eta(6z)$, $\eta(16z)\eta(8z)$, $\eta^2(12z)$, $\eta^4(6z)$, $\eta^6(4z)$, $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$ имеем, что $a(3) = 0$ и $\mathrm{Sh}(2p, a, 1) = 0$. Для остальных шести модулярных форм из таблицы 2 $a(3) \neq 0$. В таблице 4 мы приводим аналогичные результаты для пяти из них. Последняя форма $\eta^3(6z)\eta^3(2z)$ рассматривается в теореме 5.

Теорема 6. *Если*

$$\eta^3(6z)\eta^3(2z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_3(12, \chi),$$

то

1) *если p инертно в $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то*

$$p = \sqrt{-\frac{\mathrm{Sh}(2p, a, 1)}{3} - 2\mathrm{Sh}(p, a, 1)};$$

Таблица 4

$f(z)$	$\chi(p)p^{k-1}$
$\eta(22z)\eta(2z)$	$(\frac{-11}{p}) = \mathrm{Sh}(2p,a,1) + 2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p)$
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	$p = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Sh}(2p,a,1) + 2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p)$
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	$p = \mathrm{Sh}(2p,a,1) + 2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p)$
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	$p^3 = \frac{1}{4} \cdot \mathrm{Sh}(2p,a,1) + 2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p)$
$\eta^{12}(2z)$	$p^5 = \frac{1}{12} \cdot \mathrm{Sh}(2p,a,1) + 2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p)$

2) *если p расщепляется в $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, то*

$$p = \sqrt{\frac{\mathrm{Sh}(2p,a,1)}{3} + 2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p)}.$$

В частности, $3 \mid \mathrm{Sh}(2p,a,1)$.

Доказательство. Мы знаем [6], что $a(p) = 0$, если p инертно в $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $a(3) = -3$. Теорема следует из формул (4.1) и (6.1). □

Пример 4. При $p = 5$ $\chi(5) = -1$, $a(5) = 0$, $\mathrm{Sh}(10,a,1) = -93$, $\mathrm{Sh}(5,a,1) = 3$,

$$p = \sqrt{-\frac{\mathrm{Sh}(2p,a,1)}{3} - 2\mathrm{Sh}(p,a,1)} = 5 = \sqrt{-\frac{(-93)}{3} - 2 \cdot 3}.$$

При $p = 7$ $\chi(7) = 1$, $a(7) = 2$, $\mathrm{Sh}(14,a,1) = 267$, $\mathrm{Sh}(7,a,1) = -22$,

$$p = \sqrt{\frac{\mathrm{Sh}(2p,a,1)}{3} + 2\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p)} = 7 = \sqrt{\frac{267}{3} + 2 \cdot (-22) + 4}.$$

7. Соотношения между суммами Шимуры для различных мультипликативных η-произведений

Предложение 1. *Если*

$$f(z) = \eta(21z)\eta(3z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(63,\chi),$$

$$g(z) = \eta(16z)\eta(8z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_1(128,\chi),$$

$$h(z) = \eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)q^n \in S_2(14),$$

то

1) $d(n) = \sum\limits_{2j+l=3n} a(j)a(l) = \sum\limits_{7j+l=8n} c(j)c(l);$
2) $d(p) = \mathrm{Sh}(3p, a, 8) + \chi(p) = \mathrm{Sh}(4p, c, 7) + \tilde{\chi}(p).$

В этих суммах $j > 1$, $l > 1$, p *простое,* $\chi(p) = (-7/p)$, $\tilde{\chi}(p) = (-2/p)$, $\tilde{\chi}(2) = 0$. *В частности, если* $(-7/p) = (-2/p)$, $p > 2$, *то*

$$\mathrm{Sh}(3p, a, 8) = \mathrm{Sh}(4p, c, 7).$$

Доказательство.

1. Рассмотрим

$$f(2z)f(z) = \eta(42z)\eta(6z)\eta(21z)\eta(3z) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)q^n.$$

Имеем $u(3n) = d(n)$, $u(3n) = \sum\limits_{2j+l=3n} a(j)a(l)$.

Для $p = 2$ получаем, что $\mathrm{Sh}(6, a, 8) = 0$, $\mathrm{Sh}(8, c, 7) = -1$, $d(2) = -1$,

$$d(p) = \mathrm{Sh}(3p, a, 8) + \chi(p) = \mathrm{Sh}(4p, c, 7) + \tilde{\chi}(p).$$

В случае $p > 2$

$$\mathrm{Sh}(3p, a, 8) = \sum_{t=1,\ (t,p)=1}^{3p-1} a\left(\frac{(3p)^2 - t^2}{8}\right) + a(p^2) \overset{t=3p-2l}{=}$$

$$= \sum_{l=1,\ (l,p)=1}^{\frac{3p-1}{2}} a\left(\frac{(6p-l)(2l)}{8}\right) + a(p^2) =$$

$$= \sum_{l=1,\ (l,p)=1}^{\frac{3p-1}{2}} a\left(\frac{(3p-l)l}{2}\right) + a(p^2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{l=1,\ (l,p)=1}^{3p-1} a\left(\frac{(3p-l)l}{2}\right) + 2a(p^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{l=1,\ (l,p)=1}^{3p-1} a\left(\frac{(3p-l)l}{2}\right) + 2a(p^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{\substack{l=1,\ (l,p)=1,\\ l \text{ нечётное}}}^{3p-1} a\left(\frac{(3p-l)l}{2}\right) + \sum_{\substack{l=1,\ (l,p)=1,\\ l \text{ чётное}}}^{3p-1} a\left(\frac{(3p-l)l}{2}\right) + 2a(p^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{\substack{l=1,\ (l,p)=1,\\ l \text{ нечётное}}}^{3p-1} a\left(\frac{(3p-l)}{2}\right) a(l) + \sum_{\substack{l=1,\ (l,p)=1,\\ l \text{ чётное}}}^{3p-1} a(3p-l) a\left(\frac{l}{2}\right) + 2a(p^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(d(p) - a^2(p) + d(p) - a^2(p) + 2a(p^2)\right) = d(p) - \chi(p).$$

Получаем, что $d(p) = \mathrm{Sh}(3p, a, 8) + \chi(p)$.

2. Теперь рассмотрим

$$g(7z)g(z) = \eta(112z)\eta(56z)\eta(16z)\eta(8z) = \sum_{n=1}^{\infty} v(n)q^n.$$

Имеем $v(8n) = d(n)$, $v(8n) = \sum\limits_{7j+l=8n} c(j)c(l)$,

$$\mathrm{Sh}(8p,c,7) = \sum_{t=1,\ (t,p)=1}^{4p-1} c\left(\frac{(4p)^2-t^2}{7}\right) + c(p^2) \overset{t=4p-l}{=}$$

$$= \sum_{l=1,\ (l,p)=1}^{4p-1} c\left(\frac{(8p-l)l}{8}\right) + c(p^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{l=1,\ (l,7p)=1}^{8p-1} c\left(\frac{(8p-l)}{7}\right)c(l) + \sum_{l=1,\ (l,p)=1,\ 7|l}^{8p-1} c(8p-l)c\left(\frac{l}{7}\right) + 2c(p^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\big(d(p) - c^2(p) + d(p) - c^2(p) + 2c(p^2)\big) = d(p) - \tilde{\chi}(p).$$

Получаем, что $d(p) = \mathrm{Sh}(8p,c,7) + \tilde{\chi}(p)$.

В доказательстве мы использовали мультипликативность коэффициентов $a(n)$ и $c(n)$ и следующие свойства: $a(n) = 0$, кроме случая $n \equiv 1\ (3)$; $c(n) = 0$, кроме случая $n \equiv 1\ (8)$. □

Пример 5. При $p = 5$ $\chi(5) = -1$, $\tilde{\chi}(5) = -1$, $d(5) = 0$, $\mathrm{Sh}(15,a,8) = a(7) + a(25) + a(28) = -1+1+1 = 1$, $\mathrm{Sh}(20,c,7) = c(25) = 1$, $d(5) = 0 = 1-1$.

Аналогично мы доказываем следующие предложения.

Предложение 2. *Если*

$$f(z) = \eta(18z)\eta(6z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(108,\chi),$$

$$g(z) = \eta(16z)\eta(8z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_1(128,\tilde{\chi}),$$

$$h(z) = \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)q^n \in S_2(12),$$

то

1) $d(n) = \sum\limits_{2j+l=3n} a(j)a(l) = \sum\limits_{3j+l=4n} c(j)c(l)$;

2) $d(p) = \mathrm{Sh}(3p,a,8) + \chi(p) = \mathrm{Sh}(2p,c,3) + \tilde{\chi}(p)$.

В этих суммах $j > 1$, $l > 1$, p простое, $\chi(p) = (-3/p)$, $\tilde{\chi}(p) = (-2/p)$ при $p > 2$; $\chi(2) = \tilde{\chi}(2) = 0$. В частности, если $(-3/p) = (-2/p)$, $p > 2$, то $\mathrm{Sh}(3p,a,8) = \mathrm{Sh}(2p,c,3)$.

Пример 6. При $p = 5$ имеем $\chi(5) = -1$, $\tilde{\chi}(5) = -1$, $d(5) = -2$, $\mathrm{Sh}(15, a, 8) = a(7)+a(13)+a(25) = -1-1+1 = -1$, $\mathrm{Sh}(10, c, 3) = c(17)+c(25) = -2+1 = -1$, $d(5) = -2 = -1-1 = -1-1$.

Предложение 3. *Если*

$$f(z) = \eta(20z)\eta(4z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n \in S_1(80, \chi),$$

$$g(z) = \eta(18z)\eta(6z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n \in S_1(108, \tilde{\chi}),$$

$$h(z) = \eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)q^n \in S_2(15),$$

то

1) $d(n) = \sum\limits_{3j+l=4n} a(j)a(l) = \sum\limits_{5j+l=6n} c(j)c(l)$;
2) $d(p) = \mathrm{Sh}(2p, a, 3) + \chi(p) = \mathrm{Sh}(3p, c, 5) + \tilde{\chi}(p)$.

В этих суммах $j > 1$, $l > 1$, p *простое,* $\chi(p) = (-5/p)$, $\tilde{\chi}(p) = (-3/p)$, $p > 2$; $\chi(2) = \tilde{\chi}(2) = 0$. *В частности, если* $(-5/p) = (-3/p)$, $p > 2$, *то* $\mathrm{Sh}(2p, a, 3) = \mathrm{Sh}(3p, c, 5)$.

Пример 7. При $p = 7$ имеем $\chi(7) = 1$, $\tilde{\chi}(7) = 1$, $d(7) = 0$, $\mathrm{Sh}(14, a, 3) = a(9) + a(25) + a(49) = -1+1-1 = -1$, $\mathrm{Sh}(21, c, 5) = c(37) = -1$, $d(7) = 0 = -1+1 = -1+1$.

Литература

[1] Воскресенская Г. В. Метациклические группы и модулярные формы // Мат. заметки. — 2000. — Т. 67. — С. 18—25.

[2] Воскресенская Г. В. Мультипликативные произведения η-функций Дедекинда и представления групп // Мат. заметки. — 2003. — Т. 73. — С. 482—495.

[3] Воскресенская Г. В. О проблеме классификации конечных групп, ассоциированных с мультипликативными η-произведениями // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 4. — С. 43—64.

[4] Biagioli A. J. F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arith. — 1990. — Vol. 54. — P. 274—300.

[5] Cipra B. On the Shimura lift, après Selberg // J. Number Theory. — 1989. — Vol. 32. — P. 58—64.

[6] Dummit D., Kisilevsky H., McKay J. Multiplicative products of η-functions // Finite Groups — Coming of Age, Proc. of the Canadian Mathematical Society Conf. held on June 15—28, 1982, Montreal, Quebec, Canada / J. McKay, ed. — Amer. Math. Soc., 1985. — (Contemp. Math.; Vol. 45). — P. 89—98.

[7] Gordon B., Sinor S. Multiplicative properties of η-products // Number Theory, Proc. of the Int. Ramanujan Cent. Conf. Held at Anna University, Madras, India, December

21, 1987 / K. Alladi, ed. — Berlin: Springer, 1989. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1395). — P. 173—200.

[8] Harada K. Another look at the frame shapes of finite groups // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math. — 1987. — Vol. 34. — P. 491—512.

[9] Hiramatsu T. Theory of automorphic forms of weight 1 // Investigations in Number Theory / T. Kubota, ed. — Boston: Academic Press, 1988. — (Adv. Stud. Pure Math.; Vol. 13). — P. 503—584.

[10] Ishii N. Cusp forms of weight one, quartic reciprocity and elliptic curves // Nagoya Math. J. — 1985. — Vol. 98. — P. 117—137.

[11] Koike M. On McKay's conjecture // Nagoya Math. J. — 1984. — Vol. 95. — P. 85—89.

[12] Kondo T. Examples of multiplicative η-products // Sci. Papers College Arts Sci. Univ. Tokyo. — 1986. — Vol. 35. — P. 133—149.

[13] Martin Y. Multiplicative η-quotients // Trans. Am. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348. — P. 4825—4856.

[14] Martin Y., Ono K. Eta-quotients and elliptic curves // Proc. Am. Math. Soc. — 1997. — Vol. 125. — P. 3169—3176.

[15] Mason G. M_{24} and certain automorphic forms // Finite Groups — Coming of Age, Proc. of the Canadian Mathematical Society Conf. held on June 15—28, 1982, Montreal, Quebec, Canada / J. McKay, ed. — Amer. Math. Soc., 1985. — (Contemp. Math.; Vol. 45). — P. 223—244.

[16] Mason G. Finite groups and Hecke operators // Math. Ann. — 1989. — Vol. 282. — P. 381—409.

[17] Ono K. Shimura sums related to imaginary quadratic fields // Proc. Japan Acad. — 1994. — Vol. 70 (A). — P. 146—151.

[18] Shimura G. On modular forms of half-integral weight // Ann. Math. — 1973. — Vol. 97. — P. 440—481.

[19] Voskresenskaya G. V. One special class of modular forms and group representations // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 1999. — Vol. 11. — P. 247—262.

[20] Voskresenskaya G. V. Multiplicative Dedekind η-functions and representations of finite groups // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2005. — Vol. 17. — P. 359—380.