О производной функции Минковского $?(x)$*

А. А. ДУШИСТОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: anchatnik@bk.ru

Н. Г. МОЩЕВИТИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: moshchevitin@gmail.com

УДК 511.4

Ключевые слова: вопрос-функция Минковского, цепные дроби.

Аннотация

Пусть $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ — представление в виде обыкновенной цепной дроби числа $x \in [0,1]$. Для производной функции Минковского $?(x)$ мы доказываем, что $?'(x) = +\infty$ при условии $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_t}{t} < \kappa_1 = \frac{2\log\lambda_1}{\log 2} = 1{,}388^+$ и что $?'(x) = 0$ при условии $\liminf\limits_{t\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_t}{t} > \kappa_2 = \frac{4L_5-5L_4}{L_5-L_4} = 4{,}401^+$, где $L_j = \log\bigl(\frac{j+\sqrt{j^2+4}}{2}\bigr) - j\cdot\frac{\log 2}{2}$. Постоянные κ_1, κ_2 не могут быть улучшены. Мы также доказываем, что $?'(x) = +\infty$ для всех x, у которых все неполные частные ограничены величиной 4.

Abstract

A. A. Dushistova, N. G. Moshchevitin, On the derivative of the Minkowski question mark function $?(x)$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 33—44.

Let $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ be the regular continued fraction expansion an irrational number $x \in [0,1]$. For the derivative of the Minkowski function $?(x)$ we prove that $?'(x) = +\infty$, provided that $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_t}{t} < \kappa_1 = \frac{2\log\lambda_1}{\log 2} = 1.388^+$, and $?'(x) = 0$, provided that $\liminf\limits_{t\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_t}{t} > \kappa_2 = \frac{4L_5-5L_4}{L_5-L_4} = 4.401^+$, where $L_j = \log\bigl(\frac{j+\sqrt{j^2+4}}{2}\bigr) - j\cdot\frac{\log 2}{2}$. Constants κ_1, κ_2 are the best possible. It is also shown that $?'(x) = +\infty$ for all x with partial quotients bounded by 4.

1. Функция Минковского $?(x)$

Функция $?(x)$ определяется следующим образом. Положим $?(0) = 0$, $?(1) = 1$. Далее если $?(x)$ определена на двух соседних дробях Фарея $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$,

*Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00518, МД-3003.2006.1, НШ-1312.2006.1 и INTAS 03-51-5070.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 33—44.

то

$$?\left(\frac{p+p'}{q+q'}\right)=\frac{1}{2}\left(?\left(\frac{p}{q}\right)+?\left(\frac{p'}{q'}\right)\right).$$

Для иррациональных x функция $?(x)$ определяется из соображений непрерывности. Впервые эту функцию рассмотрел Г. Минковский (см. [5, с. 50, 51]) в 1904 г. $?(x)$ является непрерывной возрастающей функцией. Почти всюду она имеет конечную производную. Она удовлетворяет условию Липшица [4, 9]. Хорошо известно, что производная $?'(x)$ может принимать только два значения: 0 или $+\infty$. Почти всюду выполнено $?'(x)=0$. Если имеется представление иррационального x в виде обыкновенной цепной дроби $x=[0;a_1,\ldots,a_t,\ldots]$ с натуральными неполными частными, то

$$?(x)=\frac{1}{2^{a_1-1}}-\frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{a_1+\ldots+a_n-1}}+\ldots.$$

Эти и некоторые другие результаты можно найти, например, в [7—9].

Следует отметить связь между функцией Минковского $?(x)$ и распределением последовательностей Штерна—Броко F_n, $n=0,1,2,\ldots$. Напомним определение этих последовательностей. Сначала положим

$$F_0=\{0,1\}=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right\}.$$

Далее для последовательности F_n, представленной в виде конечного множества рациональных чисел

$$0=x_{0,n}<x_{1,n}<\ldots<x_{N(n),n}=1,\quad N(n)=2^n,\quad x_{j,n}=\frac{p_{j,n}}{q_{j,n}},\quad (p_{j,n},q_{j,n})=1,$$

упорядоченных по возрастанию, мы определим следующую последовательность F_{n+1} по правилу $F_{n+1}=F_n\cup Q_{n+1}$, где Q_{n+1} — множество чисел вида

$$Q_{n+1}=\{x_{j-1,n}\oplus x_{j,n},\ i=1,\ldots,N(n)\}.$$

Здесь через $\oplus$ мы обозначаем операцию взятия медианты двух рациональных дробей:

$$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}.$$

Функция Минковского $?(x)$ представляет собой предельную функцию распределения для последовательностей Штерна—Броко:

$$?(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{\xi\in F_n:\xi\leqslant x\}}{2^n+1}.$$

2. Обозначения и параметры

Всюду в работе $[0;a_1,\ldots,a_t,\ldots]$ обозначает обыкновенную цепную дробь с натуральными неполными частными a_t. Через $k_t(a_1,\ldots,a_t)$ обозначается континуант. Подходящие дроби порядка t для рассматриваемых цепных дробей мы обозначаем $p_t/q_t = [0; a_1, \ldots, a_t]$ (в частности, $q_t = k_t(a_1, \ldots, a_t)$). Нам понадобятся числа

$$\lambda_j = \frac{j + \sqrt{j^2+4}}{2}, \quad L_j = \log\lambda_j - j \cdot \frac{\log 2}{2}.$$

Здесь $j < \lambda_j < j+1$. Отметим, что

$$L_2 > L_3 > L_1 > L_4 > 0 > L_5 > L_6 > \ldots \tag{1}$$

и

$$\frac{L_5}{L_5 - L_4} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Также нам нужны значения континуантов

$$k_{l,j} = k_l\bigl(\underbrace{j, \ldots, j}_{l}\bigr), \quad k_{0,j} = 1, \quad k_{1,j} = j.$$

Из рекуррентного равенства $k_{l+1,j} = jk_{l,j} + k_{l-1,j}$ мы получаем, что

$$k_{l,j} = c_{1,j}\lambda_j^l + c_{2,j}(-\lambda_j)^{-l},$$

где

$$c_{1,j} + c_{2,j} = 1, \quad c_{1,j}\lambda_j - c_{2,j}(\lambda_j)^{-1} = j.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{j}{j^2+1} < c_{1,j} < 1, \quad 0 < c_{2,j} < \frac{j}{j^2+1}$$

и

$$k_{l,j} < \lambda_j^l. \tag{3}$$

Также нам понадобятся постоянные

$$\kappa_1 = \frac{2\log\lambda_1}{\log 2} = 1{,}388^+, \quad \kappa_2 = \frac{4L_5 - 5L_4}{L_5 - L_4} = 4{,}401^+. \tag{4}$$

Для натурального n и n-набора неотрицательных целых чисел $(r_1, \ldots, r_n)$ мы положим $t = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j$. Далее мы определим множества

$$W_n(r_1, \ldots, r_n) = \{(a_1, \ldots, a_t)\colon \#\{i\colon a_i = j\} = r_j\}.$$

Пусть

$$\mu_n(r_1, \ldots, r_n) = \max_{(a_1,\ldots,a_t)\in W_n(r_1,\ldots,r_n)} k_t(a_1, \ldots, a_t). \tag{5}$$

Для вещественного положительного ω мы определим

$$\Omega_{\omega,n,t} = \left\{(r_1, \ldots, r_n)\colon r_j \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{j=1}^{n}(j-\omega)r_j \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n} r_j = t\right\}.$$

Пусть $\omega = \kappa_2 + \eta < 5$ и $\eta \in [0, 1/2)$. Легко убедиться, что для любого $n \geqslant 5$ выполнено

$$\max_{(r_1,\ldots,r_n)\in\Omega_{\kappa_2+\eta,n,t}} \sum_{j=1}^{n} r_j L_j \leqslant (L_5 - L_4)t\eta, \quad L_5 - L_4 < 0. \tag{6}$$

Доказательство соотношения (6) мы дадим в разделе 5.

Также для $r_1 \geqslant 1$ рассмотрим множества

$$V_n(r_1,\ldots,r_n) = \{(a_1,\ldots,a_t)\colon \#\{i\colon a_i = j\} = r_j,\ a_1 = 1\}.$$

Пусть

$$k[r_1,\ldots,r_n] = k_t\big(\underbrace{1,\ldots,1}_{r_1},\underbrace{2,\ldots,2}_{r_2},\ldots,\underbrace{n,\ldots,n}_{r_n}\big).$$

И. Д. Кан в [2] доказал следующее утверждение.

Лемма 1.

$$\max_{(a_1,\ldots,a_t)\in V_n(r_1,\ldots,r_n)} k_t(a_1,\ldots,a_t) = k[r_1,\ldots,r_n].$$

Следует отметить, что лемма 1 обобщает результат из [6].

Нам понадобится оценка сверху для $k[r_1,\ldots,r_n]$, которая получается из формулы

$$\begin{aligned} &k_{t+l}(a_1,\ldots,a_t,b_1,\ldots,b_l) = \\ &\qquad = k_t(a_1,\ldots,a_t)k_l(b_1,\ldots,b_l) + k_{t-1}(a_1,\ldots,a_{t-1})k_{l-1}(b_2,\ldots,b_l). \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $r_{h_1},\ldots,r_{h_f}$, $1 \leqslant h_1 < \ldots < h_f = n$, — все *положительные* числа из набора $r_1,\ldots,r_n$. Здесь $h_j \geqslant j$. Тогда из (7) с учётом неравенств

$$k_{r_{h_{j+1}}-1,h_{j+1}} \leqslant \frac{k_{r_{h_{j+1}},h_{j+1}}}{h_{j+1}}, \quad k[r_1,\ldots,r_{h_j}-1] \leqslant \frac{k[r_1,\ldots,r_{h_j}]}{h_j}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} &k\Big[r_1,\ldots,r_{h_j},\underbrace{0,\ldots,0}_{h_{j+1}-h_j-1},r_{h_{j+1}}\Big] = \\ &\quad = k[r_1,\ldots,r_{h_j}]k_{r_{h_{j+1}},h_{j+1}} + k[r_1,\ldots,r_{h_j}-1]k_{r_{h_{j+1}}-1,h_{j+1}} \leqslant \\ &\quad \leqslant k[r_1,\ldots,r_{h_j}]k_{r_{h_{j+1}},h_{j+1}}\left(1 + \frac{1}{h_j h_{j+1}}\right). \end{aligned}$$

Значит,

$$k[r_1,\ldots,r_n] \leqslant \prod_{j=1}^{n} k_{r_j,j} \prod_{j=1}^{f-1}\left(1 + \frac{1}{h_j h_{j+1}}\right) \leqslant \prod_{j=1}^{n} k_{r_j,j} \prod_{j=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{j(j+1)}\right). \tag{8}$$

Но

$$\prod_{j=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{j(j+1)}\right) \leqslant \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{j(j+1)}\right) \leqslant e.$$

Теперь в качестве следствия леммы 1, неравенств (8), (3) и

$$k_t(a_1, \ldots, a_t) \leqslant k_{t+1}(1, a_1, \ldots, a_t)$$

мы получаем оценку сверху для $\mu_n(r)$:

$$\mu_n(r_1, \ldots, r_n) \leqslant \lambda_1 e \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{r_j}. \tag{9}$$

3. Теорема Ж. Парадиза, П. Виадер и Л. Бибилони

В [8] был доказан следующий результат.

Теорема A.

1. *Предположим, что для вещественного иррационального* $x \in (0,1)$ *для элементов разложения в цепную дробь* $x = [0; a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ *с* κ_1 *из* (4) *выполнено*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{a_1 + \ldots + a_t}{t} < \kappa_1.$$

   Тогда если производная $?'(x)$ *существует, то* $?'(x) = +\infty$.
2. *Определим* $\kappa_3 = 5{,}319^+$ *как корень уравнения*

$$\frac{2\log(1+x)}{\log 2} - x = 0.$$

   Пусть для иррационального $x \in (0,1)$ *для элементов разложения в цепную дробь* $x = [0; a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ *выполнено*

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{a_1 + \ldots + a_t}{t} \geqslant \kappa_3.$$

   Тогда если производная $?'(x)$ *существует, то* $?'(x) = 0$.

4. Новые результаты

Мы доказываем утверждение, более сильное, чем теорема A.

Теорема 1.

1. *Пусть для вещественного иррационального* $x \in (0,1)$ *для элементов разложения в цепную дробь* $x = [0; a_1, \ldots, a_t, \ldots]$ *с* κ_1 *из* (4) *выполняется*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{a_1 + \ldots + a_t}{t} < \kappa_1.$$

   Тогда производная $?'(x)$ *существует и равна* $?'(x) = +\infty$.

2. *Для произвольного положительного ε найдётся квадратичная иррациональность x, такая что*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_t}{t}\leqslant\kappa_1+\varepsilon$$

и $?'(x)=0$.

Теорема 2.

1. *Пусть для вещественного иррационального $x\in(0,1)$ для элементов разложения в цепную дробь $x=[0;a_1,\ldots,a_t,\ldots]$* с κ_2 *из* (4) *выполнено*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_t}{t}>\kappa_2. \tag{10}$$

Тогда производная $?'(x)$ существует и $?'(x)=0$.

2. *Для произвольного положительного ε существует квадратичная иррациональность x, такая что*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{a_1+\ldots+a_t}{t}\geqslant\kappa_2-\varepsilon$$

и $?'(x)=+\infty$.

Теорема 3. *Пусть в разложении в цепную дробь $x=[0;a_1,\ldots,a_t,\ldots]$ все неполные частные a_j ограничены величиной* 4. *Тогда* $?'(x)=\infty$.

Отметим, что теорема 3 перестаёт быть верной, если предположить, что неполные частные ограничены величиной 5.

Следствие. *Хаусдорфова размерность множества $\{x\colon ?'(x)=\infty\}$ больше хаусдорфовой размерности множества $\mathcal{F}_4=\{x\colon a_j\leqslant 4$ для всех $j\}$, которая равна* $0{,}7889^+$.

Здесь численное значение размерности Хаусдорфа для $\mathcal{F}_4$ взято из [1]. Результаты мультифрактального анализа множеств, связанных со значениями функции $?'(x)$, имеются в [3].

5. Доказательство формулы (6)

Достаточно доказать неравенство

$$\max_{(r_1,\ldots,r_n)\in\Omega_{\kappa_2+\eta,n,1}}\sum_{j=1}^{n}r_jL_j\leqslant(L_5-L_4)\eta.$$

Через $e_j\in\mathbb{R}^n$ обозначает вектор, у которого все координаты, кроме j-й, равны нулю, а j-я координата равна единице. Множество $\Omega_{\kappa_2+\eta,n,1}$ представляет собой многогранник, лежащий в симплексе $\{r_1,\ldots,r_n\colon r_j\geqslant 0,\ r_1+\ldots+r_n=1\}$. Вершины этого многогранника — точки e_j, $5\leqslant j\leqslant n$, и $e_{i,j}=\frac{\omega-i}{j-i}e_j+\frac{j-\omega}{j-i}e_i$,

$1 \leqslant i \leqslant 4,\ 5 \leqslant j \leqslant n$. Линейная функция $\sum\limits_{j=1}^{n} r_j L_j$ достигает максимума на вершине многогранника $\Omega_{\kappa_2+\eta,n,1}$. Учтём неравенства (1), (2). Получим

$$\max_{(r_1,\ldots,r_n)\in\Omega_{\kappa_2+\eta,n,t}} \sum_{j=1}^{n} r_j L_j =$$
$$= \max\left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant 4,\ j\geqslant 5} \left(\left(\frac{4L_5-5L_4}{L_5-L_4} + \frac{jL_i-iL_j}{L_j-L_i} + \eta \right) \frac{L_j-L_i}{j-i} \right),\ L_5 \right\}.$$

Но

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 4,\ j\geqslant 5} \frac{jL_i-iL_j}{L_j-L_i} = \frac{5L_4-4L_5}{L_5-L_4} = -\kappa_2.$$

Значит,

$$\max\left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant 4,\ j\geqslant 5} \left(\left(\frac{4L_5-5L_4}{L_5-L_4} + \frac{jL_i-iL_j}{L_j-L_i} + \eta \right) \frac{L_j-L_i}{j-i} \right),\ L_5 \right\} =$$
$$= \max\left\{ \eta \max_{1\leqslant i\leqslant 4,\ j\geqslant 5} \frac{jL_i-iL_j}{L_j-L_i},\ L_5 \right\} = \eta(L_5-L_4).$$

Формула (6) доказана.

6. Лемма, полезная для доказательства существования производной

Для доказательства существования производной нам будет полезно следующее утверждение.

Лемма 2. *Для иррационального числа x и δ, малого по абсолютной величине, найдутся натуральные числа $t = t(x,\delta)$ и $z \in [1, a_{t+2}+1]$, такие что*

$$\frac{q_t q_{t-1}}{2^{a_1+\ldots+a_{t+1}+z}} \leqslant \frac{?(x+\delta)-?(x)}{\delta}. \tag{11}$$

Также найдутся натуральные числа $t' = t'(x,\delta)$ и $z' \in [1, a_{t+2}+1]$, такие что

$$\frac{?(x+\delta)-?(x)}{\delta} \leqslant \frac{(z'+1)^2 q_{t'+1}^2}{2^{a_1+\ldots+a_{t'+1}+z'-4}}. \tag{12}$$

Доказательство. Достаточно доказать лемму 2 для положительного δ. Пусть натуральное n таково, что $F_n \cap (x, x+\delta) = \varnothing$, $F_{n+1} \cap (x, x+\delta) = \xi$. Пусть $(x, x+\delta) \subset [\xi^0, \xi^1]$, где ξ^0, ξ^1 — две последовательные точки из множества F_n. Тогда $\xi = \xi^0 \oplus \xi^1$. Как легко убедиться, для некоторого t окажется $\xi^0 = p_t/q_t$. В то же время рациональные ξ и ξ^1 должны быть либо подходящими, либо промежуточными дробями для x (напомним, что промежуточная дробь — это дробь вида $\frac{p_t a + p_{t-1}}{q_t a + q_{t-1}}$, $1 \leqslant a < a_{t+1}$). В любом случае знаменатель числа ξ^1 будет не меньше q_{t-1}. Значит,

$$\delta \leqslant \frac{1}{q_t q_{t-1}}. \tag{13}$$

Определим натуральное z как минимальное целое, такое что либо

$$\xi_- = \xi^0 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z} \in (x, \xi),$$

либо

$$\xi_+ = \xi^1 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z} \in (\xi, x+\delta).$$

Тогда

$$\xi_{--} = \xi^0 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z-1} \leqslant x$$

и

$$\xi_{++} = \xi^1 \oplus \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{z-1} \geqslant x+\delta.$$

Поскольку числа $\xi_{--} < \xi_- < \xi < \xi_+ < \xi_{++}$ являются последовательными элементами из F_{n+z+1} и $?(x)$ возрастает, то

$$\frac{1}{2^{n+z+1}} \leqslant \min\{\xi_+ - \xi,\ \xi - \xi_-\} \leqslant ?(x+\delta) - ?(x) \leqslant ?(\xi_{++}) - ?(\xi_{--}) = \frac{4}{2^{n+z+1}}. \tag{14}$$

Рассмотрим два случая.

1. $\xi_- \in (x, \xi)$;
2. $\xi_- \notin (x, \xi)$, но тогда $\xi_+ \in (\xi, x+\delta)$.

В первом случае имеем $\delta > \xi - \xi_-$. Если, кроме того, выполнено (случай 1_1) $z = 1$, то $\xi_- = p/q$, $q = z_* q_t + q_{t-1} \leqslant q_{t+1}$, $1 \leqslant z_* \leqslant a_{t+1}$, $\xi = (p - p_t)/(q - q_t)$, $n + 2 = a_1 + \ldots + a_t + z_* \leqslant a_1 + \ldots + a_{t+1}$ и

$$\delta > \frac{1}{(q - q_t) q} \geqslant \frac{1}{(z_* + 1)^2 q_t^2}. \tag{15}$$

Если же $z > 1$ (случай 1_2), то $\xi = p_{t+1}/q_{t+1}$, $\xi_{--} = p_{t+2}/q_{t+2}$, $z = a_{t+2} + 1$, $n + 1 = a_1 + \ldots + a_{t+1}$ и

$$\delta > \frac{1}{(z q_{t+1} + q_t) q_{t+1}} \geqslant \frac{1}{(z+1) q_{t+1}^2}. \tag{16}$$

Во втором случае имеем $z \leqslant a_{t+2}$, $\xi = p_{t+1}/q_{t+1}$, $n + 1 = a_1 + \ldots + a_{t+1}$. Делаем вывод, что

$$\delta > \xi_+ - \xi \geqslant \frac{1}{(z q_{t+1} + q^1) q_{t+1}} \geqslant \frac{1}{(z+1) q_{t+1}^2} \tag{17}$$

(здесь $q^1 < q_{t+1}$ — знаменатель числа ξ^1).

Из (16), (17) и равенств для суммы $a_1 + \ldots + a_{t+1}$ в случаях 1_2, 2 получаем

$$\delta > \frac{1}{(z+1)q_{t+1}^2}. \tag{18}$$

В случаях 1_2, 2 выполнено $a_1 + \ldots + a_{t+1} - 1 \leqslant n + 1 \leqslant a_1 + \ldots + a_{t+1}$. Принимая во внимание (13), (14) и (18), видим, что

$$\frac{q_t q_{t-1}}{2^{a_1+\ldots+a_{t+1}+z}} \leqslant \frac{?(x+\delta) - ?(x)}{\delta} \leqslant \frac{(z+1)q_{t+1}^2}{2^{a_1+\ldots+a_{t+1}+z-4}}.$$

Значит, справедливы неравенства (11), (12) с $t = t'$, $z = z'$. Отметим, что неравенство (11) остаётся верным и в случае 1_1, поскольку $n + 2 \leqslant a_1 + \ldots + a_{t+1}$ и имеют место (13), (14). Что же касается верхней оценки, в случае 1_1 она получается из (14), (15) с $t' = t - 1$ и $z' = z_*$. Лемма 2 доказана. □

7. Доказательство теоремы 1

Существование производной и её равенство $+\infty$ в первом утверждении теоремы 1 вытекает из нижней оценки леммы 2, поскольку всегда выполнено $q_t q_{t-1} \gg \lambda_1^{2t}$ и, кроме того, $a_1 + \ldots + a_{t+1} + a_{t+2} + 1 \leqslant \kappa t + o(t)$ (здесь надо учесть, что $\kappa = \limsup\limits_{t\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_t}{t} < \kappa_1$).

Для того чтобы доказать второе утверждение теоремы 1, для малого положительного $\eta > 0$ и натурального r положим

$$q = r^2, \quad m = [r(\kappa_1 - 1 + \eta)] + 1 > r(\kappa_1 - 1 + \eta).$$

Возьмём квадратичную иррациональность

$$x_r = [0; a_1, \ldots, a_t, \ldots] = \Bigl[0; \overline{\underbrace{1, \ldots, 1}_{q}, \underbrace{m, \ldots, m}_{r}}\Bigr].$$

Видим, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_t}{t} = \frac{q + mr}{q + r} \to \kappa_1 + \eta, \quad r \to \infty.$$

Полагая

$$w = \left[\frac{t}{q+r}\right],$$

имеем

$$\frac{q_{t+1}(q_{t+1} + q_{t+2})}{2^{a_1+\ldots+a_t}} \leqslant \frac{12m^3(k_t(a_1, \ldots, a_t))^2}{2^{a_1+\ldots+a_t}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{12m^3 2^{2w} \lambda_1^{2wq} \lambda_m^{2wr}}{2^{w(q+rm)}} \leqslant \exp\Bigl(\bigl(-\eta r^2 + O(r \log r)\bigr) w \log 2\Bigr).$$

Здесь показатель у коэффициента перед w отрицателен при достаточно больших r. Значит, правая часть стремится к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, $?'(x_r) = 0$.

8. Доказательство утверждения 1 теоремы 2

Согласно лемме 2 достаточно доказать соотношение

$$\frac{q_t^2}{2^{a_1+\ldots+a_t}} \to 0, \quad t \to \infty.$$

Определим n и $r_1, \ldots, r_n$ из условия $(a_1, \ldots, a_t) \in W_n(r_1, \ldots, r_n)$. Тогда из (9) получаем, что

$$\frac{q_t^2}{2^{a_1+\ldots+a_t}} \leqslant \frac{(\mu_n(r_1, \ldots, r_n))^2}{2^{\sum\limits_{j=1}^{n} jr_j}} \ll \exp\biggl(2\sum_{j=1}^{n} r_j L_j\biggr).$$

С другой стороны, для положительного достаточно малого η при всех достаточно больших t имеем, что $n \geqslant 5$ и $(r_1, \ldots, r_n) \in \Omega_{\kappa_2+\eta,n,t}$. Теперь мы применяем (6), откуда получаем неравенство

$$\frac{q_t^2}{2^{a_1+\ldots+a_t}} \leqslant \exp(2(L_5 - L_4)t\eta) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Таким образом, $?'(x) = 0$.

9. Доказательство утверждения 2 теоремы 2

Возьмём такие числа $p, q \in \mathbb{N}$, что

$$\kappa_2 - \varepsilon < \frac{4p+5q}{p+q} < \kappa_2.$$

Положим

$$x_{p,q} = [0; a_1, \ldots, a_t, \ldots] = \Bigl[0; \overline{\underbrace{4, \ldots, 4}_{p}, \underbrace{5, \ldots, 5}_{q}}\Bigr].$$

Очевидно, выполняется

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_t}{t} = \frac{4p+5q}{p+q}.$$

С другой стороны,

$$\frac{q_t q_{t-1}}{2^{a_1+\ldots+a_{t+2}}} \geqslant \left(\frac{\lambda_4^{2p}\lambda_5^{2q}}{2^{4p+5q}}\right)^{t+o(t)} = \exp\Bigl(2(pL_4 + qL_5)\bigl(t + o(t)\bigr)\Bigr).$$

Но

$$\frac{4p+5q}{p+q} < \kappa_2 = \frac{4L_5 - 5L_4}{L_5 - L_4},$$

и следовательно, $pL_4 + qL_5 > 0$. Итак,

$$\frac{q_t q_{t-1}}{2^{a_1+\ldots+a_{t+2}}} \to \infty$$

и $?'(x_{p,q}) = \infty$.

10. Доказательство теоремы 3

Сначала покажем, что выполнено

$$\min_{a_i\in\{1,2,3,4\},\ a_1+\ldots+a_t=n} k_t(a_1,\ldots,a_t) \geqslant$$
$$\geqslant \min\Big\{ \min_{a_i\in\{1,4\},\ a_1+\ldots+a_t=n-3} k_t(a_1,\ldots,a_t),$$
$$\min_{a_i\in\{1,4\},\ a_1+\ldots+a_t=n-2} k_t(a_1,\ldots,a_t), \min_{a_i\in\{1,4\},\ a_1+\ldots+a_t=n} k_t(a_1,\ldots,a_t)\Big\}. \qquad (19)$$

Заметим, что если зафиксировать в континуанте все элементы, кроме некоторых двух элементов a, b, то получим, что

$$k_t(\ldots,a,\ldots,b,\ldots) = Mab + Na + Kb + P.$$

Здесь положительные величины M, N, K, P не зависят от a, b. Если сумма $a+b=\tau$ не меняется, то

$$k_t(\ldots,a,\ldots,b,\ldots) = Ma(\tau-a) + Na + K(\tau-a) + P =$$
$$= -Ma^2 + (M\tau + N - K)a - K\tau + P.$$

Значит, для $a, b > 1$ мы можем утверждать, что выполнено неравенство

$$k_t(\ldots,a,\ldots,b,\ldots) \geqslant \min\{k_t(\ldots,a-1,\ldots,b+1,\ldots),\ k_t(\ldots,a+1,\ldots,b-1,\ldots)\}.$$

Таким образом, мы можем заменить пару 2, 3 неполных частных на пару 1, 4, и при этом континуант уменьшится. Также мы можем заменить пару 2, 2 на пару 1, 3, и континуант уменьшится. Пару 3, 3 мы можем заменить на пару 2, 4, при этом значение континуанта тоже уменьшится. Применение подобного рода процедур позволяет заменить множество

$$\{(a_1,\ldots,a_t)\colon a_i\in\{1,2,3,4\},\ a_1+\ldots+a_t=n\}$$

в левой части (19) на множество

$$\{(a_1,\ldots,a_t)\colon a_i\in\{1,2,3,4\},\ a_1+\ldots+a_t=n,\ \#\{a_i=3\}+\#\{a_i=2\}\leqslant 1\}.$$

Отсюда и получается неравенство (19).

С другой стороны,

$$k_{t_1+t_2}(a_1,\ldots,a_{t_1},a_1,\ldots,a_{t_2}) \geqslant k_{t_1}(a_1,\ldots,a_{t_1})k_{t_2}(a_1,\ldots,a_{t_2}).$$

Из последней формулы и соотношения (19) видим, что достаточно доказать, что для любого достаточно большого n выполнено

$$\min_{a_1+\ldots+a_t=n,\ a_j\in\{1,4\}} k_t(a_1,\ldots,a_t) \geqslant \big(\sqrt{2}\varepsilon_0\big)^n \qquad (20)$$

с некоторым положительным ε_0 (здесь минимум взят по всем таким t-наборам $a_1,\ldots,a_t$, что $a_1+\ldots+a_t=n$ и $a_j\in\{1,4\}$). Последнее неравенство легко проверяется по индукции по n. Основание индукции при $n=23, 24$ проверено на компьютере с помощью программы MAPLE (можно положить $\varepsilon_0 = 10^{-6}$). По теореме Сильвестра всякое натуральное t, большее чем $505 = 23 \times 24 - 23 - 24$, представимо в виде $t = 23x + 24y$ с неотрицательными целыми x, y. Значит, для $t \geqslant 506$ имеем

$$k_t(a_1, \ldots, a_t) \geqslant \prod_{1 \leqslant j \leqslant x} k_{23}\big(a_1^{(j)}, \ldots, a_{23}^{(j)}\big) \prod_{1 \leqslant j \leqslant y} k_{24}\big(b_1^{(j)}, \ldots, b_{24}^{(j)}\big),$$

где

$$(a_1, \ldots, a_t) = \big(a_1^{(1)}, \ldots, a_{23}^{(1)}, \ldots, a_1^{(x)}, \ldots, a_{23}^{(x)}, b_1^{(1)}, \ldots, b_{24}^{(1)}, \ldots, b_1^{(y)}, \ldots, b_{24}^{(y)}\big).$$

Теперь неравенство (20) вытекает из основания индукции при $n = 23, 24$. Теорема 3 доказана.

Авторы глубоко признательны профессору В. Н. Чубарикову за указание неточностей в первоначальном варианте работы, постоянное внимание к работе и доброжелательность.

Литература

[1] Jenkinson O. On the density of Hausdorff dimension of bounded type continued fraction sets: the Texan conjecture // Stoch. Dyn. — 2004. — Vol. 4. — P. 63—76.

[2] Kan I. D. Refining of the comparison rule for continuants // Discrete Math. Appl. — 2000. — Vol. 10, no. 5. — P. 477—480.

[3] Kesseböhmer M., Stratmann B. O. Fractal analysis for sets of nondifferentiability of Minkowski question mark function. — 2007. — `arXiv:math.NT/0706.0453v1`.

[4] Kinney J. R. Note on a singular function of Minkowski // Proc. Am. Math. Soc. — 1960. — Vol. 11. — P. 788—789.

[5] Minkowski H. Gesammelte Abhandlungen. Vol. 2. — 1911.

[6] Motzkin T. S., Straus E. G. Some combinatorial extremum problems // Proc. Am. Math. Soc. — 1956. — Vol. 7. — P. 1014—1021.

[7] Paradis J., Viader P., Bibiloni L. A new light on Minkowski's $?(x)$ function // J. Number Theory. — 1998. — Vol. 73. — P. 212—227.

[8] Paradis J., Viader P., Bibiloni L. The derivative of Minkowski's $?(x)$ function // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — Vol. 253. — P. 107—125.

[9] Salem R. On some singular monotone functions which are strictly increasing // Trans. Am. Math. Soc. — 1943. — Vol. 53. — P. 427—439.