Гиперболы над двумерными квазирешётками Фибоначчи*

В. Г. ЖУРАВЛЁВ
Владимирский государственный педагогический университет
e-mail: vzhuravlev@mail.ru

УДК 511.342

Ключевые слова: квазирешётки Фибоначчи, уравнения Пелля.

Аннотация

Для количества $n_s(\alpha, \beta; X)$ точек (x_1, x_2) из двумерной квазирешётки Фибоначчи $\mathcal{F}_s^2$ уровня $s = 0, 1, 2, \ldots$, лежащих на гиперболе $x_1^2 - \alpha x_2^2 = \beta$ и удовлетворяющих условиям $0 \leqslant x_1 \leqslant X$, $x_2 \geqslant 0$, доказывается асимптотическая формула

$$n_s(\alpha, \beta; X) \sim c_s(\alpha, \beta) \ln X \quad \text{при} \quad X \to \infty,$$

где коэффициент $c_s(\alpha, \beta)$ явно вычисляется. Как следствие из данной формулы выводится следующий результат. Пусть A_i, $i = 1, 2$, пробегают натуральные числа, $A_1 \leqslant X$, числа $\overleftarrow{A}_i$ получаются из A_i сдвигом в системе счисления Фибоначчи. Пусть $\tau = (-1 + \sqrt{5})/2$ — золотое сечение. Тогда для количества решений $n_s(X)$ диофантовой системы

$$\begin{cases} A_1^2 + \overleftarrow{A}_1^2 - 2A_2\overleftarrow{A}_2 + \overleftarrow{A}_2^2 = F_{2s}, \\ \overleftarrow{A}_1^2 - 2A_1\overleftarrow{A}_1 + A_2^2 - 2A_2\overleftarrow{A}_2 + 2\overleftarrow{A}_2^2 = F_{2s-1}, \end{cases}$$

где F_m — числа Фибоначчи, выполняется асимптотическое равенство

$$n_s(X) \sim \frac{c_s}{\operatorname{arch}(1/\tau)} \ln X \quad \text{при} \quad X \to \infty$$

с коэффициентом $c_s = 1/2$ или $c_s = 1$ для индексов $s = 0$ или $s \geqslant 1$ соответственно.

Abstract

V. G. Zhuravlev, Hyperbolas over two-dimensional Fibonacci quasilattices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 45—62.

For the number $n_s(\alpha, \beta; X)$ of points (x_1, x_2) in the two-dimensional Fibonacci quasilattices $\mathcal{F}_m^2$ of level $m = 0, 1, 2, \ldots$ lying on the hyperbola $x_1^2 - \alpha x_2^2 = \beta$ and such that $0 \leqslant x_1 \leqslant X$, $x_2 \geqslant 0$, the asymptotic formula

$$n_s(\alpha, \beta; X) \sim c_s(\alpha, \beta) \ln X \quad \text{as} \quad X \to \infty$$

is established, the coefficient $c_s(\alpha, \beta)$ is calculated exactly. Using this, the following result is obtained. Let F_m be the Fibonacci numbers, $A_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, and let $\overleftarrow{A}_i$ be

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00435.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 45—62.

the shift of A_i in the Fibonacci numeral system. Then the number $n_s(X)$ of all solutions (A_1, A_2) of the Diophantine system

$$\begin{cases} A_1^2 + \overleftarrow{A}_1^2 - 2A_2\overleftarrow{A}_2 + \overleftarrow{A}_2^2 = F_{2s}, \\ \overleftarrow{A}_1^2 - 2A_1\overleftarrow{A}_1 + A_2^2 - 2A_2\overleftarrow{A}_2 + 2\overleftarrow{A}_2^2 = F_{2s-1}, \end{cases}$$

$0 \leqslant A_1 \leqslant X$, $A_2 \geqslant 0$, satisfies the asymptotic formula

$$n_s(X) \sim \frac{c_s}{\operatorname{arcosh}(1/\tau)} \ln X \quad \text{as} \quad X \to \infty.$$

Here $\tau = (-1 + \sqrt{5})/2$ is the golden ratio, and $c_s = 1/2$ or 1 for $s = 0$ or $s \geqslant 1$, respectively.

1. Введение

Последними яркими достижениями в арифметической теории квадратичных форм являются результаты Г. Шимуры [13—15] о представлениях чисел тотально положительно определёнными формами $f(x)$, определёнными над кольцами целых чисел $\mathcal{O}$ тотально вещественных алгебраических полей F. Использованный Шимурой подход основан на некоторой комбинации тета-рядов, рядов Эйзенштейна и локальных интегралов.

В данной работе мы применяем новый метод квазирешёток Фибоначчи $\mathcal{F}_s$ [3, 4] к исследованию диагональных квадратичных форм вида

$$f(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2, \tag{1.1}$$

определённых над вещественным квадратичным полем $F = \mathbb{Q}(\tau)$, где $\tau = (-1 + \sqrt{5})/2$ — золотое сечение. Коэффициент α в (1.1) выбирается из кольца Фибоначчи $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\tau]$ — кольца целых чисел поля F — и удовлетворяет условиям

$$\alpha > 0, \quad \alpha' < 0, \tag{1.2}$$

где α' — вещественно сопряжённое с α число. В [4] данный метод был применен к тотально положительно определённым формам специального вида — сумме квадратов $f(x) = x_1^2 + \ldots + x_m^2$.

Особенность квазирешёток $\mathcal{F}_s$ состоит в том, что они не образуют периодических систем точек, т. е. равенство $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_s + t$ возможно только для сдвига $t = 0$ (рис. 1).

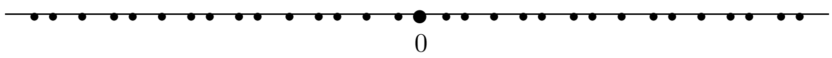

Рис. 1. Одномерные квазирешётки $\mathcal{F}_s$

Однако квазирешётки $\mathcal{F}_s$ обладают следующими важными свойствами Мейера:

$$\mathcal{F}_s + \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_s + \mathcal{R}_s, \quad \mathcal{F}_s - \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_s + \mathcal{R}_s, \tag{1.3}$$

где $\mathcal{R}_s$ — двуточечные множества $\{0, \pm\tau^{s+1}\}$. Свойства (1.3) означают, что квазирешётки Фибоначчи $\mathcal{F}_s$ «почти» замкнуты относительно операций сложения и вычитания.

Краткие формулировки основных результатов работы

1. Пусть $H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$ — множество точек (x_1, x_2) с координатами из кольца Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$, лежащих на гиперболе

$$x_1^2 - \alpha x_2^2 = \beta, \tag{1.4}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\tau]$ и коэффициент α удовлетворяет условиям (1.2). Тогда имеет место разложение в прямое произведение

$$H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]} = P \times F_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]},$$

где P — дискретная группа точек с координатами, удовлетворяющими уравнению Пелля

$$x_1^2 - \alpha x_2^2 = 1, \tag{1.5}$$

$F_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$ — конечное подмножество точек из $H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$, попавших в фундаментальную область $F_{\beta,\mathbb{R}} = H_{\beta,\mathbb{R}}/P$ на вещественной гиперболе $H_{\beta,\mathbb{R}}$ относительно действия группы P (теорема 4.1).

2. Обозначим через $n_s(\alpha, \beta; X)$ количество точек (x_1, x_2) из двумерной квазирешётки Фибоначчи $\mathcal{F}_s^2 = \mathcal{F}_s \times \mathcal{F}_s$, лежащих на гиперболе (1.4) и удовлетворяющих условиям $0 \leqslant x_1 \leqslant X$, $x_2 \geqslant 0$. В теореме 5.1 доказано, что тогда при $X \to +\infty$ выполняется асимптотическая формула

$$n_s(\alpha, \beta; X) \sim c_s(\alpha, \beta) \ln X, \tag{1.6}$$

где

$$c_s(\alpha, \beta) = \frac{|I_s(\alpha, \beta)| f(\alpha, \beta)}{t_e}.$$

Здесь $|I_s(\alpha, \beta)|$ — угловая мера (5.11), $t_e = \operatorname{arch}(e_1)$, (e_1, e_2) — фундаментальное решение уравнения Пелля (1.5), $f(\alpha, \beta)$ — число точек из множества $F_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$.

3. Из формулы (1.6) вытекает следующий результат (следствие 5.1). Количество $n_s(\alpha, 1; X)$ точек (x_1, x_2) из квазирешётки $\mathcal{F}_s^2$, координаты которых удовлетворяют уравнению Пелля (1.5), вычисляется по асимптотической формуле

$$n(\alpha, 1; X) \sim \frac{|I_s(\alpha, \beta)|}{t_e} \ln X,$$

где угловая мера $|I_s(\alpha, \beta)|$ больше 0 для любого уровня $s \geqslant 0$.

Таким образом, мы видим, что метод квазирешёток Фибоначчи $\mathcal{F}_s$ позволяет решать не только классические задачи о представлении чисел квадратичными формами над кольцами алгебраических чисел, но и, как показано в [2,4] и в настоящей работе, хорошо работает в новом направлении теории чисел — теории диофантовых уравнений над квазирешётками.

2. Квазирешётки Фибоначчи

2.1. Одномерные квазирешётки

Одномерная квазирешётка Фибоначчи нулевого уровня определяется следующим образом:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \delta(\mathbb{Z}) = \{\delta(N) = N + [(N+1)\tau]\tau \colon N \in \mathbb{Z}\}.$$

Для произвольного целого s квазирешётка $\mathcal{F}_s$ уровня s получается из $\mathcal{F}_0$ гомотетией

$$\mathcal{F}_s = \tau^s \cdot \mathcal{F}_0 \tag{2.1}$$

с коэффициентом τ^s, где $\tau = (-1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение, удовлетворяющее уравнению $x^2 + x - 1 = 0$. Из (2.1) вытекает следующая параметризация квазирешёток $\mathcal{F}_s$:

$$\mathcal{F}_s = \delta_s(\mathbb{Z}),$$

где

$$\delta_s(N) = \tau^s \cdot \delta(N) = \tau^s(N + [(N+1)\tau]\tau). \tag{2.2}$$

2.2. Свойства квазирешётки Фибоначчи $\mathcal{F}_0$

Перечислим основные свойства квазирешётки Фибоначчи $\mathcal{F}_0$ (подробности см. в [2]).

1. Сопряжённый образ для квазирешётки $\mathcal{F}_0$ характеризуется условием

$$\mathcal{F}_0' = \delta'(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\tau] \cap J,$$

где $J = [-1, \tau)$, штрих обозначает сопряжение в вещественно-квадратичном поле $\mathbb{Q}(\tau)$ и

$$\mathbb{Z}[\tau] = \{a + b\tau \colon a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ —}$$

кольцо Фибоначчи. Оно является кольцом целых чисел поля $\mathbb{Q}(\tau)$.

2. В квазирешётке $\mathcal{F}_0$ между соседними точками только два расстояния $\tilde{\tau} = 1 + \tau$ и 1 с отношением длин, равным τ (см. рис. 1).

2.3. Свойства квазирешёток Фибоначчи $\mathcal{F}_s$ произвольного уровня

1. Для любого неотрицательного уровня s выполняется включение

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_0.$$

2. Квазирешётка $\mathcal{F}_{s+1}$ получается инфляцией квазирешётки $\mathcal{F}_s$, т. е. добавлением между точками $x_1 < x_2$, находящимися на расстоянии $\tau^s \cdot \tilde{\tau}$, ещё одной точки x с условием $x - x_1 = \tau^{s+1} \cdot \tilde{\tau}$, т. е. делящей отрезок $[x_1, x_2]$ в отношении τ. Обратный переход $\mathcal{F}_{s+1} \to \mathcal{F}_s$ осуществляется с помощью склеивания отрезков или дефляции.

3. Сопряжённый образ $\mathcal{F}'_s = \tau'^s \cdot \mathcal{F}'_0$, где $\tau'^s = (-1)^s \tilde{\tau}^s$, характеризуется условием

$$\mathcal{F}'_s = \delta'_s(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\tau] \cap J_s, \tag{2.3}$$

при этом

$$\delta'_s(N) = (-1)^s \tilde{\tau}^s (N - [(N+1)\tau]\tilde{\tau}),$$
$$J_s = [-\tilde{\tau}^s, \tilde{\tau}^{s-1}) \text{ для чётных } s, \quad J_s = [-\tilde{\tau}^{s-1}, \tilde{\tau}^s) \text{ для нечётных } s. \tag{2.4}$$

2.4. Двумерные квазирешётки и r-системы

Рассмотрим уравнение

$$x_1^2 - \alpha x_2^2 = \beta \tag{2.5}$$

и сопряжённое ему уравнение

$$x_1'^2 - \alpha' x_2'^2 = \beta'. \tag{2.6}$$

Пусть $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$ из кольца Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$ и коэффициент α удовлетворяет условию $\alpha' < 0$. Это означает, что (2.5) и (2.6) — уравнения гиперболы и эллипса соответственно. Условимся обозначать через H_X и E_X множества всех точек, координаты которых удовлетворяют данным уравнениям и принадлежат некоторому полю, кольцу или квазирешётке X из поля комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Основной метод, который мы будем применять к исследованию уравнений (2.5), основывается на использовании квазирешёток Фибоначчи $\mathcal{F}_s$ подходящего уровня s. Точнее, мы будем использовать не сами квазирешётки $\mathcal{F}_s$, а их прямые произведения: двумерные квазирешётки

$$\mathcal{F}_s^2 = \mathcal{F}_s \times \mathcal{F}_s. \tag{2.7}$$

Уровень s выбирается так, чтобы выполнялось включение

$$E_{\mathbb{R}} \subset J_s^2, \tag{2.8}$$

где $J_s^2 = J_s \times J_s$ — квадратная область. В методе проекции (см., например, [8—10]) она называется «окном» или внутренним пространством. Из равенства (2.3) и включения (2.8) получаем основное соотношение

$$H_{\mathbb{Z}[\tau]} = H_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{F}_s^2, \tag{2.9}$$

устанавливающее связь между разрешимостью диофантова уравнения (2.5) над кольцом Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$ и существованием точек из квазирешётки $\mathcal{F}_s^2$, лежащих на гиперболе $H_{\mathbb{R}}$. Важным свойством множества точек $H_{\mathbb{Z}[\tau]}$, вытекающим из равенства (2.9), является то, что

$$\text{множество } H_{\mathbb{Z}[\tau]} \text{ образует } r\text{-систему}. \tag{2.10}$$

Это означает существование такого фиксированного радиуса $r > 0$, зависящего лишь от уровня s, что любые две точки из множества $H_{\mathbb{Z}[\tau]}$ находятся на расстоянии не менее чем r. Заметим, что хотя множество $H_{\mathbb{Z}[\tau]}$ и не является

(r, R)-системой Делоне в обычной евклидовой метрике, оно становится таковым в гиперболической метрике, более естественной в данной ситуации. Отсюда, в частности, будет следовать, что более редкое в общем случае подмножество $H_{\mathcal{F}_s} \subset H_{\mathbb{Z}[\tau]}$ — гиперболическая квазирешётка.

3. Уравнение Пелля над кольцом Фибоначчи

Чтобы решить задачу о структуре точек на гиперболе $H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$ (2.5), сначала необходимо рассмотреть ту же задачу для *уравнения Пелля*

$$x_1^2 - \alpha x_2^2 = 1. \tag{3.1}$$

Предложение 3.1.

1. *Множество решений P уравнения Пелля* (3.1) *над кольцом Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$ образует коммутативную группу относительно операции умножения*

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{3.2}$$

2. *Группа P разлагается в прямое произведение*

$$P = \langle(-1, 0)\rangle \times P^+ \tag{3.3}$$

циклической группы $\langle(-1, 0)\rangle$ второго порядка и бесконечной циклической группы

$$P^+ = \{e^i : i \in \mathbb{Z}\} \tag{3.4}$$

с образующим элементом $e = (e_1, e_2)$, являющимся фундаментальным решением уравнения Пелля (3.1) *и удовлетворяющим условию $e_1 > 1$, $e_2 > 0$, e_1 минимально.*

Доказательство. Рассмотрим порядок $\mathbb{Z}[\tau, \sqrt{\alpha}]$ из биквадратичного расширения $\mathbb{Q}(\tau, \sqrt{\alpha})$, состоящий из чисел

$$\mathbb{Z}[\tau, \sqrt{\alpha}] = \{x_1 + \sqrt{\alpha} x_2 : x_i \in \mathbb{Z}[\tau]\},$$

т. е. полный модуль максимального ранга 4 над $\mathbb{Q}$, образующий кольцо с единицей. Пусть

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\tau,\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}(\tau)}(x_1 + \sqrt{\alpha} x_2) = (x_1 + \sqrt{\alpha} x_2)(x_1 - \sqrt{\alpha} x_2) = x_1^2 - \alpha x_2^2 \text{ —}$$

норма элемента $x_1 + \sqrt{\alpha} x_2$ относительно квадратичного расширения $\mathbb{Q}(\tau, \sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}(\tau)$. Тогда множество элементов порядка $\mathbb{Z}[\tau, \sqrt{\alpha}]$ с нормой

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\tau,\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}(\tau)}(x_1 + \sqrt{\alpha} x_2) = 1$$

образуют группу по умножению. Отсюда и из (3.2) вытекает, что P также группа, поскольку (3.2) — это операция умножения в поле $\mathbb{Q}(\tau, \sqrt{\alpha})$, записанная через координаты x_1, x_2. Единичным элементом группы P является $(1, 0)$.

Выделим в группе P элемент второго порядка $(-1, 0)$. Тогда группу P можем разложить в прямое произведение (3.3), где P^+ — подгруппа из P, состоящая из точек (x_1, x_2), где $x_1 > 0$.

Предположим, что, кроме единичного элемента $(1,0)$, группа P^+ содержит хотя бы один элемент $(x_1,x_2) \neq (1,0)$. Заменяя этот элемент на $(x_1,x_2)^{\pm 1}$, можем считать выполненным условие $x_1 > 1$. Поскольку согласно (3.2)

$$(x_1,x_2)^2 = (x_1^2 + \alpha x_2^2, 2x_1x_2),$$

из неравенства $x_1 < x_1^2+\alpha x_2^2$ выводим, что так выбранный элемент (x_1,x_2) имеет бесконечный порядок и, следовательно, порождает бесконечную циклическую подгруппу $\langle (x_1,x_2)\rangle$ в группе P^+. Фактор-группа $P^+/\langle (x_1,x_2)\rangle$ порождается элементами $(y_1,y_2) \in P^+$ с условием приведения

$$1 \leqslant y_1 < x_1, \quad y_2 \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Таких элементов существует конечное число, так как в силу (2.9)

$$P^+ = H^+_{1,\mathbb{Z}[\tau]} = H^+_{1,\mathbb{R}} \cap \mathcal{F}^2_s \tag{3.6}$$

для некоторого уровня s, зависящего от α. Поэтому из (3.6) следует, что группа P^+ является r-системой (см. определение (2.10)).

Выберем из области (3.5) элемент $e = (e_1,e_2)$ группы P^+ с минимально возможной первой координатой $e_1 > 1$, который и порождает всю группу $P^+ = \langle e\rangle$. Элемент

$$e = (e_1,e_2) \in P, \quad e_1 > 1, \quad e_2 > 0, \quad e_1 \text{ минимальный},$$

назовём *фундаментальным решением* уравнения Пелля (3.1).

Поле $\mathbb{Q}(\tau,\sqrt{\alpha})$ степени $n=4$ над $\mathbb{Q}$ допускает следующие изоморфные вложения в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} &\tau \mapsto \tau, \quad \sqrt{\alpha} \mapsto \pm\sqrt{\alpha}, \\ &\tau \mapsto \tau', \quad \sqrt{\alpha} \mapsto \pm\sqrt{\alpha'}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

По условию $\alpha > 0$, $\alpha' < 0$, поэтому среди (3.7) будет $s = 2$ вещественных вложений и $2t = 2$ комплексных. Так как $s + t - 1 = 2$, то по теореме Дирихле [1, с. 131] любая единица ε из порядка $\mathbb{Z}[\tau,\sqrt{\alpha}]$ однозначно представима в виде произведения

$$\varepsilon = (-1)^{\nu}\varepsilon_1^{a_1}\varepsilon_2^{a_2}, \tag{3.8}$$

где ε_1, ε_2 — основные единицы порядка $\mathbb{Z}[\tau,\sqrt{\alpha}]$, $\nu = 0,1$, а степени a_1, a_2 — произвольные целые числа. Известно, что для любой единицы ε, в частности для ε_1,

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\tau,\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}}(\varepsilon_1) = \pm 1. \tag{3.9}$$

Поскольку норма обладает композиционным свойством

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\tau,\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}}(\varepsilon_1) = \mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\tau)/\mathbb{Q}}\big(\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\tau,\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}(\tau)}(\varepsilon_1)\big)$$

и в кольце Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$ любая единица имеет вид $\pm\tau^b$, где $b \in \mathbb{Z}$, то из (3.9) следует равенство

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\tau,\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}(\tau)}(\varepsilon_1) = e_1^2 - \alpha e_2^2 = \pm\tau^b, \tag{3.10}$$

где $\varepsilon_1 = e_1 - \sqrt{\alpha}e_2$ — разложение с коэффициентами e_1, e_2 из $\mathbb{Z}[\tau]$. Элемент $\varepsilon = \varepsilon_1^2\tau^{-b}$ снова является единицей порядка $\mathbb{Z}[\tau, \sqrt{\alpha}]$, и его норма согласно (3.10) равна

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\tau,\sqrt{\alpha})/\mathbb{Q}(\tau)}(\varepsilon) = 1. \tag{3.11}$$

Пусть ε имеет разложение $\varepsilon = x_1 + \sqrt{\alpha}x_2$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\tau]$. Тогда из (3.11) следует, что

$$x_1^2 - \alpha x_2^2 = 1, \tag{3.12}$$

и значит, точка (x_1, x_2) принадлежит группе P (3.3). Предположим, что оказалось, что

$$x_2 = 0.$$

Тогда из (3.12) следует, что $x_1 = \pm 1$, т. е. $\varepsilon = \pm 1$. Отсюда получаем, что $\varepsilon_1^2 = \pm\tau^b$, и так как ε_1 — вещественная единица, то

$$\varepsilon_1^2 = \tau^b. \tag{3.13}$$

Из разложения $b = b_1 + 2b_2$, где $b_i \in \mathbb{Z}$ и $b_1 = 0$ или $b_1 = 1$, и из равенства (3.13) получаем, что

$$\varepsilon_1 = \pm\tau^{b_2}\sqrt{\tau^{b_1}}.$$

Если $b_1 = 0$, то $\varepsilon_1 = \pm\tau^{b_2}$. Поскольку ε_1 — основная единица порядка $\mathbb{Z}[\tau, \sqrt{\alpha}]$, это возможно только в случае $b_2 = \pm 1$. Если же $b_1 = 1$, то $\varepsilon_1 = \pm\tau^{b_2}\sqrt{\tau}$ и по той же причине получаем, что $b_2 = 0$ или $b_2 = -1$. Так как τ — основная единица поля $\mathbb{Q}(\tau)$, то при этих условиях мы всегда можем изначально выбрать основную единицу ε_1 в (3.8) так, чтобы

$$\varepsilon_1 = \tau, \text{ если } b_1 = 0, \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\tau}, \text{ если } b_1 = 1. \tag{3.14}$$

Допустим, что выполняется одно из условий в (3.14). Тогда, повторяя аналогичные рассуждения для основной единицы ε_2 из разложения (3.8), получим другую единицу

$$\eta = \varepsilon_2^2\tau^b = y_1 + \sqrt{\alpha}y_2, \quad \text{где} \quad y_2 \neq 0.$$

Действительно, если окажется $y_2 = 0$, то после подходящей замены мы снова придём к равенствам

$$\varepsilon_2 = \tau \quad \text{или} \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\tau}. \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15) вытекает, что ε_1, ε_2 не могут быть основными единицами порядка $\mathbb{Z}[\tau, \sqrt{\alpha}]$.

Полученное противоречие показывает, что, не уменьшая общности, можем считать, что у единицы $\varepsilon = x_1 + \sqrt{\alpha}x_2$

$$x_2 \neq 0.$$

После замены $x_i \mapsto \pm x_i$ получаем точку (x_1, x_2) на гиперболе (3.1) с условием $x_2 > 0$. Более того, из уравнения (3.1) следует, что $x_1 > 1$. Тем самым мы нашли в группе P^+ элемент $(x_1, x_2) \neq (1, 0)$.

Предложение 3.1 доказано. □

4. Гиперболы над кольцом Фибоначчи

4.1. Структура множества точек $H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$

Обозначим через $H_{1,\mathbb{R}}$ и $H_{\beta,\mathbb{R}}$ множества всех точек (x_1, x_2) с координатами из $\mathbb{R}$, удовлетворяющих уравнениям (3.1) и (2.5) соответственно, и пусть $H^+_{\beta,\mathbb{R}}$ — положительная ветвь гиперболы $H_{\beta,\mathbb{R}}$, состоящая из точек, у которых $x_1 > 0$, если $\beta > 0$, и $x_2 > 0$, если $\beta < 0$.

Отображение

$$I = [0,1) \underset{\sim}{\longrightarrow} H^+_{\beta,\mathbb{R}}: \quad t \mapsto x(\beta, t) \tag{4.1}$$

задаёт параметризацию ветвей гипербол. Мы будем использовать следующие сокращения:

$$x(\beta, t) = \big(x_1(\beta, t), x_2(\beta, t)\big) = \left(\sqrt{\beta}\,\mathrm{ch}(t), \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{sh}(t)\right), \tag{4.2}$$

если $\beta > 0$, и

$$x(\beta, t) = \big(x_1(\beta, t), x_2(\beta, t)\big) = \left(\sqrt{-\beta}\,\mathrm{sh}(t), \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}}\,\mathrm{ch}(t)\right), \tag{4.3}$$

если $\beta < 0$. Здесь

$$\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ —}$$

гиперболические косинус и синус.

Пусть $x(1, t) \in H_{1,\mathbb{R}}$ и $y(\beta, u) \in H_{\beta,\mathbb{R}}$ — две произвольные точки. Определим их произведение $x(1, t) \cdot y(\beta, u)$ по формуле умножения (3.2). Данная операция задаёт действие гиперболы $H_{1,\mathbb{R}}$ на произвольную гиперболу $H_{\beta,\mathbb{R}}$ с помощью правила

$$H_{1,\mathbb{R}} \times H_{\beta,\mathbb{R}} \to H_{\beta,\mathbb{R}}: \quad x(1, t) \times y(\beta, u) \mapsto x(1, t) \cdot y(\beta, u). \tag{4.4}$$

Операция умножения (4.4) и параметризация ветвей гипербол (4.1) связаны между собой соотношением

$$x(1, t) \cdot y(\beta, u) = y(\beta, t + u) \tag{4.5}$$

при условии, что $x(1, t) \in H^+_{1,\mathbb{R}}$ и $y(\beta, u) \in H^+_{\beta,\mathbb{R}}$.

Пусть $F_{\beta,\mathbb{R}} = H_{\beta,\mathbb{R}}/P$ — фундаментальная область на гиперболе $H_{\beta,\mathbb{R}}$ относительно действия на неё дискретной группы $P = H_{1,\mathbb{Z}[\tau]}$. Используя равенство

$$H_{\beta,\mathbb{R}}/P = H^+_{\beta,\mathbb{R}}/P^+,$$

где $P^+ = H^+_{1,\mathbb{Z}[\tau]}$ — циклическая группа (3.4) с порождающим элементом $e = (e_1, e_2)$, и свойство инвариантности (4.5) параметризации гипербол, видим, что в качестве *фундаментальной области* $F_{\beta,\mathbb{R}}$ можно выбрать следующие множества:

$$F_{\beta,\mathbb{R}} = \{x = (x_1, x_2) \in H_{\beta,\mathbb{R}} \colon \sqrt{\beta} \leqslant x_1 < e_1\sqrt{\beta},\ x_2 > 0\}, \qquad \text{если} \quad \beta > 0,$$

$$F_{\beta,\mathbb{R}} = \left\{x = (x_1, x_2) \in H_{\beta,\mathbb{R}} \colon \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \leqslant x_2 < e_1\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}},\ x_1 > 0\right\}, \qquad \text{если} \quad \beta < 0. \tag{4.6}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\tau]$, $\alpha > 0$, $\alpha' < 0$, $H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$ — *множество точек* (x_1, x_2) *на гиперболе* (2.5) *с координатами из кольца Фибоначчи* $\mathbb{Z}[\tau]$, $F_{\beta,\mathbb{R}}$ — *фундаментальная область* (4.6) *на вещественной гиперболе* $H_{\beta,\mathbb{R}}$ *относительно действия дискретной группы* P (3.3). *Тогда имеет место разложение в прямое произведение*

$$H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]} = P \times F_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]},$$

где

$$F_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]} = F_{\beta,\mathbb{R}} \cap H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]} - \tag{4.7}$$

конечное множество точек из $H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$, *попавших в фундаментальную область* $F_{\beta,\mathbb{R}}$ (4.6).

Доказательство. Осталось проверить конечность множества (4.7). Она вытекает из компактности фундаментальной области $F_{\beta,\mathbb{R}}$ и свойства множества точек $H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$ быть r-системой (см. определение (2.10)). □

4.2. Эффективные алгоритмы

Эффективность вычисления фундаментального решения $e = (e_1, e_2)$ уравнения Пелля (3.1) основывается на равенстве

$$P = H_{1,\mathbb{R}} \cap \mathcal{F}_s^2, \tag{4.8}$$

где $\mathcal{F}_s^2$ — двумерная квазирешётка Фибоначчи (2.7) подходящего уровня $s = 0, 1, 2, \ldots$. Он выбирается из условия включения

$$E_{\beta',\mathbb{R}} \subset J_s^2 \tag{4.9}$$

эллипса (2.6) в квадратную область J_s^2, где полуинтервал J_s определяется равенствами (2.4). С помощью параметризации $\delta_s(N_1) = \tau^s(N_1 + [(N_1+1)\tau])$ первая координата e_1 вычисляется как $e_1 = \delta_s(N_1)$ с наименьшим $N_1 = 1, 2, 3, \ldots$, таким что вторая координата имеет вид $e_2 = \delta_s(N_2)$, где параметр N_2 находится из условий, что точка $e = (e_1, e_2)$ лежит на вещественной гиперболе $H_{1,\mathbb{R}}$ и $N_2 = 1, 2, 3, \ldots$.

Иногда указанный выше процесс удаётся существенно ускорить, используя разложение в цепную дробь числа $\sqrt{\alpha}$. В качестве неполных частных вместо натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ нужно выбирать числа $\delta_{s_\alpha}(N)$ из квазирешётки $\mathcal{F}_{s_\alpha}(N)$ уровня s_α, зависящего от разлагаемого числа α.

На этом пути с помощью квазирешёток Фибоначчи $\mathcal{F}_s$ строятся быстрые алгоритмы вычисления фундаментальных единиц для алгебраических полей четвёртой степени сигнатуры $(2,1)$. Алгоритмы вычисления единиц для других алгебраических полей можно найти в [5,6,11,12]. В [7] приведено конструктивное построение единиц для параметрических семейств многочленов четвёртой степени.

Эффективность вычисления всех фундаментальных решений $x = (x_1, x_2) \in H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$ с координатами из кольца Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$, удовлетворяющих уравнению гиперболы (2.5), опирается на включение

$$F_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]} \subset F_{\beta,\mathbb{R}} \cap \mathcal{F}^2_{s_{\alpha,\beta}}. \tag{4.10}$$

В данном случае выбор уровня $s_{\alpha,\beta}$ квазирешётки $\mathcal{F}^2_{s_{\alpha,\beta}}$ уже зависит от двух чисел α и β. Из включения (4.10) следует, что первая координата имеет вид $x_1 = \delta_{s_{\alpha,\beta}}(N_1)$, где границы изменения параметра N_1 явным образом задаются граничными условиями (4.6) для фундаментальной области $F_{\beta,\mathbb{R}}$. Тем самым на начальной стадии известно максимально возможное количество шагов для вычисления всех фундаментальных решений $x = (x_1, x_2)$. В этом заключается существенное отличие этого метода от алгоритма вычисления фундаментального решения $e = (e_1, e_2)$ уравнения Пелля (3.1).

Числовой пример. Покажем, как работает указанная выше схема, на примере вычисления фундаментального решения $e = (e_1, e_2)$ уравнения Пелля

$$x_1^2 - 2(1+\tau)x_2^2 = 1 \tag{4.11}$$

с коэффициентом $\alpha = 2(1+\tau) = \sqrt{5} + 1$.

Первый шаг. Действуем по обычному алгоритму Лагранжа. Если в качестве уровня выбрать $s_\alpha = 2$, то получим разложение

$$\sqrt{\sqrt{5}+1} = \delta_2(3) + \cfrac{1}{\delta_2(10) + \cfrac{1}{\delta_2(6) + \cfrac{1}{\delta_2(10) + \dots}}} = [\delta_2(3); \overline{\delta_2(10), \delta_2(6)}]$$

в периодическую цепную дробь с длиной периода 2. Её неполные частные

$$q_i = \delta_2(N_i) = \tau^2(N_i + [(N_i+1)\tau]\tau)$$

принадлежат квазирешётке Фибоначчи $\mathcal{F}_2$ (2.1), т. е. являются положительными числами из вещественного квадратичного кольца $\mathbb{Z}[\tau]$. Далее вычисляем подходящие дроби

$$\frac{P_0}{Q_0}, \quad \frac{P_1}{Q_1}, \dots$$

и проверяем, какая из точек $(x_1, x_2) = (P_i, Q_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, лежит на гиперболе (4.11). Первой оказывается точка

$$\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = (P_1, Q_1) = (7 + 4\tau, 4 + 2\tau). \tag{4.12}$$

Второй шаг. Находим минимальный уровень s, для которого выполняется включение (4.9). Таким будет уровень $s = 1$. Затем, перебирая последовательно $N_1 = 1, 2, 3, \ldots$, ищем на гиперболе (4.11) первую точку вида $(x_1, x_2) = \big(\delta_1(N_1), \delta_1(N_2)\big)$. Натуральный параметр N_2 однозначно определяется из уравнения (4.11), если такой номер N_2 существует (реально для каждого N_1 нужно проверить один-два номера N_2). Первой будет точка

$$(x_1, x_2) = \big(\delta_1(11), \delta_1(6)\big),$$

т. е. как раз найденная ранее точка $\big(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\big)$ (4.12). Отсюда следует, что уравнение Пелля (4.11) над кольцом Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$ имеет фундаментальное решение

$$e = (e_1, e_2) = \big(\delta_1(11), \delta_1(6)\big) = (7 + 4\tau, 4 + 2\tau).$$

5. Гиперболы над квазирешётками $\mathcal{F}_s^2$

5.1. Умножение точек на эллипсах и гиперболах

Чтобы правильно определить умножение точек на эллипсах, воспользуемся следующей их параметризацией:

$$I = [0, 1) \underset{\sim}{\longrightarrow} E_{\beta',\mathbb{R}}\colon \quad t' \mapsto x'(\beta', t'),$$

где

$$x'(\beta', t') = \big(x_1'(\beta', t'), x_2'(\beta', t')\big) = \left(\sqrt{\beta'}\cos(2\pi t'), \frac{\sqrt{\beta'}}{\sqrt{-\alpha'}}\sin(2\pi t')\right)$$

и $\beta' > 0$. Определим умножение точек $x'(1, t') \in E_{1,\mathbb{R}}$ и $y'(\beta', u') \in E_{\beta',\mathbb{R}}$, полагая

$$\begin{aligned} &x'(1, t') \cdot y'(\beta', u') = \\ &= \big(x_1'(1, t')y_1'(\beta', u') + \alpha' x_2'(1, t')y_2'(\beta', u'),\ x_1'(1, t')y_2'(\beta', u') + x_2'(1, t')y_1'(\beta', u)\big). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Заметим, что формула умножения (5.1) получается из аналогичной формулы умножения на гиперболах (3.2) с помощью операции сопряжения в квадратичном поле $\mathbb{Q}(\tau)$. Параметризация эллипсов и операция умножения связаны между собой формулой

$$x'(1, t') \cdot y'(\beta', u') = y'(\beta', t' + u'). \tag{5.2}$$

Это позволяет задать действие единичного эллипса $E_{1,\mathbb{R}}$ на произвольный эллипс $E_{\beta,\mathbb{R}}$ с помощью правила

$$E_{1,\mathbb{R}} \times E_{\beta,\mathbb{R}} \to E_{\beta,\mathbb{R}}\colon \quad x'(1, t') \times y'(\beta', u') \mapsto y'(\beta', t' + u').$$

Аналогично определим действие гиперболы $H_{1,\mathbb{R}}$ на произвольную гиперболу $H_{\beta,\mathbb{R}}$ с помощью двойственного правила

$$H_{1,\mathbb{R}} \times H_{\beta,\mathbb{R}} \to H_{\beta,\mathbb{R}} \colon x(1,t) \times y(\beta,u) \mapsto y'(\beta,t+u),$$

где $t,u \in \mathbb{R}$ и $x(\beta,t)$ определены равенствами (4.2) и (4.3).

5.2. Коммутативные диаграммы

Первая диаграмма имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} E_{1,\mathbb{Q}(\tau)} & \times & E_{\beta,\mathbb{Q}(\tau)} & \longrightarrow & E_{\beta,\mathbb{Q}(\tau)} \\ \big\downarrow{\scriptstyle '} & & \big\downarrow{\scriptstyle '} & & \big\downarrow{\scriptstyle '} \\ H_{1,\mathbb{Q}(\tau)} & \times & H_{\beta,\mathbb{Q}(\tau)} & \longrightarrow & H_{\beta,\mathbb{Q}(\tau)} \end{array}, \tag{5.3}$$

при этом верхнее и нижнее умножение определено в (5.1) и (3.2) соответственно, а вертикальные стрелки обозначают ограничения биекции

$$\mathbb{Q}(\tau)^2 \xrightarrow[\sim]{\ '\ } \mathbb{Q}(\tau)^2 \colon \quad x = (x_1, x_2) \mapsto x' = (x_1', x_2') \tag{5.4}$$

на соответствующие множества из (5.3).

Вторая диаграмма объединяет действия на эллипсах и окружностях:

$$\begin{array}{ccccc} E_{1,\mathbb{R}} & \times & E_{\beta,\mathbb{R}} & \longrightarrow & E_{\beta,\mathbb{R}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ C_{1,\mathbb{R}} & \times & C_{\beta,\mathbb{R}} & \longrightarrow & C_{\beta,\mathbb{R}} \end{array}, \tag{5.5}$$

где $C_{\beta,\mathbb{R}}$ обозначает окружность радиуса $\sqrt{\beta'}$ и умножение точек на окружностях вычисляется по обычной формуле

$$(x_1', x_2') \cdot (y_1', y_2') = (x_1'y_1' - x_2'y_2', x_1'y_2' + x_2'y_1'). \tag{5.6}$$

Первая вертикальная стрелка в диаграмме обозначает отображение

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, \sqrt{-\alpha} x_2),$$

а вторая и третья — отображение

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{\beta'}} x_1, \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{\beta'}} x_2 \right).$$

Из определений (5.4), (5.6) вытекает коммутативность диаграмм (5.3) и (5.5). Композиция этих диаграмм приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} H_{1,\mathbb{Q}(\tau)} & \times & H_{\beta,\mathbb{Q}(\tau)} & \longrightarrow & H_{\beta,\mathbb{Q}(\tau)} \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ C_{1,\mathbb{R}} & \times & C_{\beta,\mathbb{R}} & \longrightarrow & C_{\beta,\mathbb{R}} \end{array}. \tag{5.7}$$

Здесь вертикальные стрелки обозначают отображения

$$(x_1,x_2) \overset{1}{\mapsto} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta'}}x_1', \frac{1}{\sqrt{\beta'}}x_2'\right), \qquad (x_1,x_2) \overset{\alpha}{\mapsto} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta'}}x_1', \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{\beta'}}x_2'\right).$$

Рассмотрим ограничение диаграммы (5.7) на произведение $P \times H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$, где $P = H_{1,\mathbb{Z}[\tau]}$ — множество решений уравнения Пелля (3.1) над кольцом Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$. Получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} P & \times & H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]} & \longrightarrow & H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]} \\ \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ C_{1,\mathbb{R}} & \times & C_{1,\mathbb{R}} & \longrightarrow & C_{1,\mathbb{R}} \end{array}. \tag{5.8}$$

5.3. P_+^+-орбиты

Пусть $P = \langle(-1,0)\rangle \times P^+$ — разложение группы P (3.3) на циклическую группу 2-го порядка $\langle(-1,0)\rangle$ и бесконечную циклическую группу $P^+ = \{e^i\colon i \in \mathbb{Z}\}$ (3.4). Выделим из группы P полугруппу

$$P_+^+ = \{e^i\colon i = 0,1,2,\ldots\}.$$

Для произвольной точки $x = (x_1,x_2)$ из $H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$ определим её P_+^+-орбиту:

$$P_+^+x = \bigl\{x(i) = \bigl(x_1(i), x_2(i)\bigr) = e^i x\colon i = 0,1,2,\ldots\bigr\}.$$

Выясним, сколько найдётся точек $x(i)$ из указанной орбиты с ограничением $x_1(i) \leqslant X$. Для этого воспользуемся параметризацией точек на гиперболах. Пусть

$$e = \left(\operatorname{ch}(t_e), \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{sh}(t_e)\right), \quad x = \left(\sqrt{\beta}\operatorname{ch}(t_x), \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{sh}(t_x)\right),$$

где $\beta > 0$. Тогда согласно формуле (5.2) можем записать, что

$$e^i = \left(\operatorname{ch}(it_e), \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{sh}(it_e)\right).$$

Следовательно, первая координата точки $x(i) = e^i x$ из орбиты $P_+^+ x$ удовлетворяет неравенству

$$x_1(i) = \beta \operatorname{ch}(it_e + t_x) \leqslant X. \tag{5.9}$$

Поскольку асимптотически $\operatorname{arch}(X) \sim \ln X$ при $X \to +\infty$, то из (5.9) вытекает следующая оценка для числа точек $x(i)$:

$$i \leqslant \frac{\ln X}{t_e}\bigl(1 + o(1)\bigr). \tag{5.10}$$

В случае $\beta < 0$ эта же оценка получается с помощью формулы (4.3).

5.4. Распределение точек на окружности

Согласно диаграмме (5.8) умножение e на точку $x = x(\beta, t) \in H_{\beta,\mathbb{Z}[\tau]}$ эквивалентно повороту соответствующей точки $x' \in C_{1,\mathbb{R}}$ на некоторый угол ε. Поскольку в силу формулы (4.5)

$$e^i x(\beta, t) = x(\beta, it_e + t),$$

то $x_1(\beta, it_e + t) \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Отсюда заключаем, что отношение $\varepsilon/(2\pi)$ — иррациональное число. Следовательно, точки $x'(\beta', it'_{e'} + t')$ равномерно распределены на единичной окружности $C_{1,\mathbb{R}}$ при $i \to +\infty$.

5.5. Распределение точек на гиперболах

Из того, что точки на окружности $C_{1,\mathbb{R}}$ распределены равномерно, и неравенства (5.10) вытекают следующие два результата.

Теорема 5.1.

1. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\tau]$, $\alpha > 0$, $\alpha' < 0$ и $\beta' > 0$, $n_s(\alpha, \beta; X)$ — количество точек $x = (x_1, x_2)$ из двумерной квазирешётки Фибоначчи $\mathcal{F}_s^2$, лежащих на гиперболе* (2.5) *и удовлетворяющих условиям $0 \leqslant x_1 \leqslant X$, $x_2 \geqslant 0$. Тогда при $X \to +\infty$ выполняется асимптотическая формула*

   $$n_s(\alpha, \beta; X) \sim c_s(\alpha, \beta) \ln X$$

   с коэффициентом

   $$c_s(\alpha, \beta) = \frac{|I_s(\alpha, \beta)| f(\alpha, \beta)}{t_{e'}}.$$

   При этом $|I_s(\alpha, \beta)|$ — угловая мера пересечения эллипса $E_\mathbb{R}$ с квадратной областью J_s^2, равная сумме длин всех интервалов из множества

   $$I_s(\alpha, \beta) = \left\{ t \in [0,1] \colon \bigl(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\bigr) \in \frac{1}{\sqrt{\beta'}} J_s \times \sqrt{\frac{-\alpha'}{\beta'}} J_s \right\}, \tag{5.11}$$

   $t_e = \operatorname{arch}(e_1)$, где (e_1, e_2) — фундаментальное решение уравнения Пелля (3.1) *над кольцом Фибоначчи $\mathbb{Z}[\tau]$, $f(\alpha, \beta)$ — число точек $x = (x_1, x_2)$ с координатами из $\mathbb{Z}[\tau]$, лежащих на гиперболе* (2.5) *и принадлежащих фундаментальной области приведения $F_{\beta,\mathbb{R}}$* (4.6).

2. *Если* $|I_s(\alpha,\beta)| = 0$, *то на гиперболе* (2.5), *возможно, лежит лишь одна точка из квазирешётки* $\mathcal{F}_s^2$. $\square$

Следствие 5.1.

1. *Для любого* $\alpha \in \mathbb{Z}[\tau]$, $\alpha > 0$, $\alpha' < 0$, *найдутся точки* $x = (x_1, x_2)$ *из квазирешётки Фибоначчи* $\mathcal{F}_s^2$, *координаты которой удовлетворяют уравнению Пелля* (3.1).
2. *Количество таких точек* $n_s(\alpha, 1; X)$, *удовлетворяющих условиям* $0 \leqslant x_1 \leqslant X$, $x_2 \geqslant 0$, *вычисляется по асимптотической формуле*

$$n(\alpha, 1; X) \sim \frac{|I_s(\alpha,\beta)|}{t_e} \ln X \tag{5.12}$$

при $X \to +\infty$, *где* $|I_s(\alpha,\beta)| > 0$ *для любого уровня* $s \geqslant 0$. $\square$

5.6. Система счисления Фибоначчи

Для формулировки следующего результата нам потребуется понятие сдвига $\overleftarrow{A}$ натуральных чисел A, записанных в системе счисления Фибоначчи:

$$A = \sum_{i \geqslant 1} \varepsilon_i F_i, \tag{5.13}$$

где коэффициенты ε_i равны 0 или 1 и удовлетворяют правилу сокращения $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = 0$ и

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \ldots, \quad F_{i+2} = F_i + F_{i+1}, \ldots \text{ —}$$

числа Фибоначчи. Если число A имеет разложение (5.13), то сдвинутое число $\overleftarrow{A}$ вычисляется по формуле

$$\overleftarrow{A} = \sum_{i \geqslant 1} \varepsilon_i F_{i-1}. \tag{5.14}$$

Операция сдвига (5.14) допускает следующую аналитическую запись:

$$\overleftarrow{A} = [(A+1)\tau]. \tag{5.15}$$

Формула (5.15) позволяет продолжить сдвиг $\overleftarrow{A}$ с натуральных чисел $\mathbb{N}$ на множество всех целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$.

Следствие 5.2. *Пусть* A_i, $i = 1, 2$, *пробегают натуральные числа,* $A_1 \leqslant X$ *и числа* $\overleftarrow{A}_i$ *получаются из* A_i *сдвигом* (5.14) *в системе счисления Фибоначчи. Тогда количество решений* $n_s(X) = n_s(-\tilde{\tau}, 1; X)$ *диофантовой системы*

$$\begin{cases} A_1^2 + \overleftarrow{A}_1^2 - 2A_2\overleftarrow{A}_2 + \overleftarrow{A}_2^2 = F_{2s}, \\ \overleftarrow{A}_1^2 - 2A_1\overleftarrow{A}_1 + A_2^2 - 2A_2\overleftarrow{A}_2 + 2\overleftarrow{A}_2^2 = F_{2s-1}, \end{cases} \tag{5.16}$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots$, *удовлетворяет асимптотическому равенству*

$$n_s(X) \sim \frac{c_s}{\operatorname{arch}(\tilde{\tau})} \ln X \tag{5.17}$$

при $X \to +\infty$. Здесь коэффициент c_s равен $1/2$ и 1 для уровней $s = 0$ и $s \geqslant 1$ соответственно.

Доказательство. Выберем $\alpha = \tau$. Тогда уравнение Пелля (3.1) примет вид

$$x_1^2 - \tau x_2^2 = 1. \tag{5.18}$$

Воспользуемся параметризацией (см. (2.2))

$$x_i = \delta_s(A_i) = \tau^s(A_i + [(A_i + 1)\tau]\tau) \tag{5.19}$$

точек x_i из квазирешётки $\mathcal{F}_s$, где $A_i \in \mathbb{Z}$. Теперь если подставить выражения для x_i (5.19) в уравнение (5.18), то получим равенство

$$\delta_s(A_1)^2 - \tau\delta_s(A_2)^2 = \tilde{\tau}^{2s}.$$

Данное равенство равносильно системе уравнений (5.16). Чтобы в этом убедиться, достаточно применить известную формулу

$$\tilde{\tau}^{2s} = F_{2s} + F_{2s-1}\tau,$$

где $\tilde{\tau} = 1 + \tau = 1/\tau$.

Для нахождения фундаментального решения $e = (e_1, e_2)$ уравнения Пелля (3.1) заметим, что эллипс $E_{\mathbb{R}}$ с уравнением

$$x_1'^2 + \tilde{\tau} x_2'^2 = 1$$

содержится в прямоугольной области J_s^2 уровня $s = 1$. Поэтому нужно найти такое наименьшее e_1 из квазирешётки первого уровня $\mathcal{F}_1$, что $e_1 > 1$ и соответствующая точка $e = (e_1, e_2)$ на гиперболе (3.1) имела бы вторую координату e_2 также из квазирешётки $\mathcal{F}_1$. Легко убедиться, что такой точкой будет

$$e = (e_1, e_2) = \big(\tau\delta(2), \tau\delta(2)\big) = (\tilde{\tau}, \tilde{\tau}). \tag{5.20}$$

Пусть $s = 0$. Для вычисления угловой меры $|I_0(-\tilde{\tau}, 1)|$ заметим, что точка (τ, τ) лежит на пересечении эллипса $E_{\mathbb{R}}$ (2.6) с биссектрисой первого координатного угла. Поэтому множество $I_0(-\tilde{\tau}, 1)$ (см. определение (5.11)) представляет собой интервал $(3/8, 7/8)$ и, значит, имеет меру $|I_0(-\tilde{\tau}, 1)| = 1/2$.

Если же $s \geqslant 1$, то эллипс $E_{\mathbb{R}}$ содержится в области J_s^2. В этом случае $|I_s(-\tilde{\tau}, 1)| = 1$.

Требуемая асимптотическая формула (5.17) вытекает из (5.12) и (5.20). □

Литература

[1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1985.

[2] Журавлёв В. Г. Суммы квадратов над ∘-кольцом Фибоначчи // Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2006. — Т. 337. — С. 165—190.

[3] Журавлёв В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. мат. — 2007. — Т. 71, № 2. — С. 287—321.

[4] Журавлёв В. Г. Одномерные квазирешётки Фибоначчи и их приложения к диофантовым уравнениям и алгоритму Евклида // Алгебра и анализ. — 2007. — Т. 19, № 3. — С. 177—208.

[5] Матвеев Е. М. Об основных единицах некоторых полей // Мат. сб. — 1992. — Т. 183, № 7. — С. 35—48.

[6] Buchmann J. On the computation of unites and class numbers by a generalization of Lagrange's algorithm // J. Number Theory. — 1987. — Vol. 26, no. 1. — P. 8—30.

[7] Leprévost F., Pohst M., Schöpp A. Units in some parametric families of quartic fields // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2002. — Vol. 56. — P. 1—13.

[8] Meyer Y. Algebraic Numbers and Harmonic Analysis. — Amsterdam: North-Holland, 1972. — (North-Holland Math. Library; Vol. 2).

[9] Moody R. V. Meyer sets and their duals // The Mathematical of Long-Range Aperiodic Order. Proc. of the NATO Advanced Study Institute, Waterloo, Ontario, Canada, August 21–September 1, 1995 / R. V. Moody, ed. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1997. — (NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci.; Vol. 489). — P. 403—441.

[10] Moody R. V. Model sets: a survey // From Quasicrystals to More Complex Systems: Les Houches School, February 23–March 6, 1998 / F. Alex, F. Dénoyer, J. P. Gazeau, eds. — Berlin: EPD Science, Les Ulis, Springer, 2000. — P. 145—166.

[11] Pohst M. Computational Algebraic Number Theory. — Basel: Birhäuser, 1993.

[12] Pohst M., Zassenhaus H. On effective computation of fundamental unites // Math. Comp. — 1982. — Vol. 38. — P. 293—329.

[13] Shimura G. The number of representations of an integer by a quadratic form // Duke Math. J. — 1999. — Vol. 100, no. 1. — P. 59—92.

[14] Shimura G. The representation of integers as sums of squares // Am. J. Math. — 2002. — Vol. 124. — P. 1059—1081.

[15] Shimura G. Quadratic Diophantine equations, the class number, and the mass formula // Bull. Am. Math. Soc. — 2006. — Vol. 43, no. 3. — P. 285—304.