

Специальные значения обобщённых полилогарифмов

С. А. ЗЛОБИН

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: sirg_zlobin@mail.ru

УДК 511.3

Ключевые слова: обобщённые полилогарифмы, кратные дзета-функции, интегральные представления, тождества.

Аннотация

В работе изучаются значения обобщённых полилогарифмов в различных точках и связи между ними. Полностью исследуются полилогарифмы малых весов в точках $1/2$ и -1 . Формулируется гипотеза о структуре линейного пространства, порождённого значениями обобщённых полилогарифмов.

Abstract

S. A. Zlobin, *Special values of generalized polylogarithms*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 63–89.

The values of generalized polylogarithms at various points and their relationships are examined. A detailed investigation is given of the polylogarithms of small weight at the points $1/2$ and -1 . A conjecture about the structure of the linear space generated by values of generalized polylogarithms is put forward.

1. Введение

Напомним, что полилогарифмы $\text{Li}_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, определяются рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$. Эти специальные функции являются классическим объектом исследований. В точке $z = 1$ эти функции дают значения знаменитой дзета-функции Римана, подробно исследуемой в теории чисел. В последнее время резко возрос интерес к различным обобщениям полилогарифмов и дзета-функции. В настоящей статье мы будем рассматривать функции

$$\begin{aligned}\text{Li}_{s_1, \dots, s_l}(z) &= \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}, \\ \text{Le}_{s_1, \dots, s_l}(z) &= \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}}\end{aligned}$$

при натуральных s_j . Ряды, определяющие эти обобщённые полилогарифмы, имеют радиус сходимости 1, а сами полилогарифмы могут быть аналитически продолжены в область $D = \mathbb{C} \setminus \{z: |\arg(1-z)| < \pi\}$ (комплексная плоскость с разрезом по действительной прямой от 1 до $+\infty$). В точке $z = 1$ при $s_1 > 1$ ряды сходятся, и мы получаем кратную дзета-функцию:

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_l) = \text{Li}_{s_1, s_2, \dots, s_l}(1), \quad \tilde{\zeta}(s_1, s_2, \dots, s_l) = \text{Le}_{s_1, s_2, \dots, s_l}(1).$$

Кратная дзета-функция активно изучается (см., например, обзор [4]). Однако в этой статье мы будем рассматривать обобщённые полилогарифмы в точках $z \neq 1$.

Известны следующие значения классических полилогарифмов:

$$\text{Li}_1(z) = -\ln(1-z), \quad (1)$$

$$\text{Li}_k(-1) = -(1-2^{1-k})\zeta(k), \quad k > 1, \quad (2)$$

$$\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln^2 2 = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2}\ln^2 2, \quad (3)$$

$$\text{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{12}\pi^2 \ln 2 + \frac{1}{6}\ln^3 2 = \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2) \ln 2 + \frac{1}{6}\ln^3 2. \quad (4)$$

При $k \geq 4$ неизвестно (и предположительно не существует) аналогичного выражения $\text{Li}_k(1/2)$ через $\ln 2$ и значения дзета-функции. Тожество (1) следует из ряда Тейлора для $\ln(1-z)$. Из равенства

$$\text{Li}_k(1) + \text{Li}_k(-1) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^k}$$

непосредственно следует (2). Равенство (3) было известно ещё Л. Эйлеру. Так, используя равенство

$$\zeta(2) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 2^n} + \ln^2 2,$$

он в 1731 г. вычислил $\zeta(2) = 1,644934\dots$ с шестью верными знаками; значение $\zeta(2) = \pi^2/6$ было получено Эйлером позже, в 1735 г. Равенство (4) принадлежит Дж. Ландену. Доказательства равенств (3) и (4) можно найти в [19, (1.16), (6.12)]. В данной статье мы рассмотрим аналоги (1)–(4) для обобщённых полилогарифмов, а также докажем некоторые другие равенства.

2. Интегральные представления обобщённых полилогарифмов

Для вектора $\vec{s} = (s_1, \dots, s_l)$ определим его *вес* $w(\vec{s}) = s_1 + \dots + s_l$ и *длину* $l(\vec{s}) = l$. Существуют различные интегральные представления обобщённых полилогарифмов $\text{Li}_{\vec{s}}(z)$ и $\text{Le}_{\vec{s}}(z)$ в виде интегралов размерности веса вектора $\vec{s}$.

Теорема 1. Справедливо следующее интегральное представление для обобщённых полилогарифмов:

$$\begin{aligned} \text{Le}_{s_1, s_2, \dots, s_l}(z) &= z \int_{[0,1]^m} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_m}{\prod_{j=1}^l (1 - zx_1 x_2 \dots x_{r_j})}, \\ \text{Li}_{s_1, s_2, \dots, s_l}(z) &= z^l \int_{[0,1]^m} \frac{\prod_{j=1}^{l-1} (x_1 x_2 \dots x_{r_j}) dx_1 dx_2 \dots dx_m}{\prod_{j=1}^l (1 - zx_1 x_2 \dots x_{r_j})}, \end{aligned}$$

где $r_j = s_1 + s_2 + \dots + s_j$, $m = r_l = w(\vec{s})$.

Эта теорема доказывается разложением каждой дроби вида $1/(1-t)$ в сумму геометрической прогрессии и последующим интегрированием по кубу (более общее утверждение было доказано в [2, лемма 2]). Интегралы из теоремы 1 продолжают обобщённые полилогарифмы в область $D = \mathbb{C} \setminus \{z: |\arg(1-z)| < \pi\}$.

Обобщённые полилогарифмы также имеют представления в виде *повторных интегралов Чена*. Поставим в соответствие вектору $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ с натуральными компонентами слово $x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{s_l-1} x_1$ в алфавите $\{x_0, x_1\}$ (x_i^k обозначает букву x_i , записанную k раз подряд). Введём следующие дифференциальные формы:

$$\omega_{x_0}(t) = \frac{dt}{t}, \quad \omega_{x_1}(t) = \frac{dt}{1-t}, \quad \tilde{\omega}_{x_0}(t) = \frac{dt}{t}, \quad \tilde{\omega}_{x_1}(t) = \frac{dt}{t(1-t)}.$$

Теорема 2. При любом $z \in D$ справедливы интегральные представления

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\vec{s}}(z) &= \int_0^z \omega_{y_1}(t_1) \int_0^{t_1} \omega_{y_2}(t_2) \dots \int_0^{t_{m-1}} \omega_{y_m}(t_m), \\ \text{Le}_{\vec{s}}(z) &= \int_0^z \tilde{\omega}_{y_1}(t_1) \int_0^{t_1} \tilde{\omega}_{y_2}(t_2) \dots \int_0^{t_{m-2}} \tilde{\omega}_{y_{m-1}}(t_{m-1}) \int_0^{t_{m-1}} \omega_{y_m}(t_m), \end{aligned} \tag{5}$$

где слово $y_1 y_2 \dots y_m$ ($y_i \in \{x_0, x_1\}$) соответствует вектору $\vec{s}$ (в частности, $m = w(\vec{s})$).

Например, вектору $\vec{s} = (2, 1)$ соответствует слово $x_0 x_1 x_1$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \text{Li}_{2,1}(z) &= \int_0^z \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{1}{1-t_2} \int_0^{t_2} \frac{1}{1-t_3}, \\ \text{Le}_{2,1}(z) &= \int_0^z \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{1}{t_2(1-t_2)} \int_0^{t_2} \frac{1}{1-t_3}. \end{aligned}$$

Теорема 2 может быть получена из теоремы 1 заменой переменных

$$x_1 = \frac{t_1}{z}, \quad x_2 = \frac{t_2}{t_1}, \dots, \quad x_m = \frac{t_m}{t_{m-1}}.$$

Более прямое доказательство (для $\text{Li}_{\vec{s}}(z)$) можно найти, например, в [4, § 6].

3. Тождества для обобщённых полилогарифмов

Все известные соотношения для значений (обобщённых) полилогарифмов, в частности (1)–(4), являются однородными по весу в следующем смысле. Придадим ряду $\text{Li}_{\vec{s}}(z)$ (или $\text{Le}_{\vec{s}}(z)$) вес, равный весу вектора $\vec{s}$. Таким образом, ряд $\zeta(s_1, \dots, s_l)$ также имеет вес $w(\vec{s})$, значения логарифма по (1) имеют вес, равный 1, а рациональные числа по определению имеют нулевой вес. Вес произведения двух величин равен сумме их весов.

Функции $\text{Le}_{\vec{s}}(z)$ и $\text{Li}_{\vec{s}}(z)$ могут быть линейно выражены друг через друга. А именно (см. [6])

$$\text{Le}_{s_1, \dots, s_l}(z) = \sum_{\vec{p}} \text{Li}_{\vec{p}}(z), \quad \text{Li}_{s_1, \dots, s_l}(z) = \sum_{\vec{p}} (-1)^{\alpha(\vec{p})} \text{Le}_{\vec{p}}(z), \quad (6)$$

где $\vec{p}$ пробегает все векторы вида $(s_1 * s_2 * \dots * s_l)$. Знак «*» может быть либо знаком «+», либо знаком «,», а $\alpha(\vec{p})$ равняется количеству знаков «+». Например,

$$\begin{aligned} \text{Le}_{s_1, s_2, s_3}(z) &= \text{Li}_{s_1, s_2, s_3}(z) + \text{Li}_{s_1+s_2, s_3}(z) + \text{Li}_{s_1, s_2+s_3}(z) + \text{Li}_{s_1+s_2+s_3}(z), \\ \text{Li}_{s_1, s_2, s_3}(z) &= \text{Le}_{s_1, s_2, s_3}(z) - \text{Le}_{s_1+s_2, s_3}(z) - \text{Le}_{s_1, s_2+s_3}(z) + \text{Le}_{s_1+s_2+s_3}(z). \end{aligned}$$

Известно следующее явное выражение некоторых обобщённых полилогарифмов (см., например, [26, раздел 1]):

$$\text{Li}_{\{1\}_k}(z) = \frac{(-\ln(1-z))^k}{k!} \quad (7)$$

($\{a\}_k$ означает k -мерный вектор, все координаты которого равны a). Для других полилогарифмов выражение через элементарные функции неизвестно.

Теорема 3. Для произвольных натуральных a, b и $z \in D$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} \text{Li}_{a,b}(z) &= (-1)^b \sum_{k=1}^a \binom{a+b-k-1}{b-1} \text{Li}_{k, a+b-k}(z) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^b (-1)^{b-k} \binom{a+b-k-1}{a-1} \text{Li}_k(z) \text{Li}_{a+b-k}(z). \end{aligned}$$

Доказательство. Достаточно доказать тождество внутри единичного круга $|z| < 1$ (тогда аналитическое продолжение обеспечивает его справедливость

в D). Из определения обобщённого полилогарифма получаем

$$\text{Li}_{a,b}(z) = \sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^a n_2^b} = \sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^a (n_1 - n_2)^b}.$$

Разложим последнюю дробь в сумму простейших по переменной n_1 :

$$\begin{aligned} \text{Li}_{a,b}(z) = \sum_{n_1 > n_2 \geq 1} z^{n_1} & \left((-1)^b \sum_{k=1}^a \binom{a+b-k-1}{b-1} \frac{1}{n_1^k n_2^{a+b-k}} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^b (-1)^{b-k} \binom{a+b-k-1}{a-1} \frac{1}{(n_1 - n_2)^k n_2^{a+b-k}} \right). \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что

$$\sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^k n_2^{a+b-k}} = \text{Li}_{k,a+b-k}(z)$$

по определению и

$$\sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \frac{z^{n_1}}{(n_1 - n_2)^k n_2^{a+b-k}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{z^{m+n_2}}{m^k n_2^{a+b-k}} = \text{Li}_k(z) \text{Li}_{a+b-k}(z). \quad \square$$

Следствие 1. Для любого натурального n и $z \in D$ справедливо тождество

$$2\text{Li}_{1,2n-1}(z) = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} \text{Li}_k(z) \text{Li}_{2n-k}(z). \quad (8)$$

Доказательство. Положим в теореме $a = 1$ и $b = 2n - 1$. $\square$

Равенство (8) было получено в [11, раздел 6.3] (по крайней мере для $z = 1/2$).

Следствие 2. Для любого $z \in D$ справедливо тождество

$$2\text{Li}_{2,1}(z) + \text{Li}_{1,2}(z) = \text{Li}_1(z) \text{Li}_2(z).$$

Доказательство. Положим в теореме $a = 2$ и $b = 1$. $\square$

Следствие 3. Для любого $z \in D$ справедливо тождество

$$4\text{Li}_{3,1}(z) + 2\text{Li}_{2,2}(z) = \text{Li}_2(z)^2.$$

Доказательство. Из теоремы при $a = 3$ и $b = 1$ следует, что

$$2\text{Li}_{3,1}(z) + \text{Li}_{2,2}(z) + \text{Li}_{1,3}(z) = \text{Li}_1(z) \text{Li}_3(z).$$

Умножая это равенство на 2 и вычитая из него (8) при $n = 2$, получаем искомое равенство. $\square$

Следствия 2 и 3 могут быть получены с помощью описанных ниже соотношений тасования (см., например, [4, § 5]). Пусть $z \in (0, 1)$, $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ — векторы

с натуральными компонентами с весами $p = w(\vec{s}_1)$, $q = w(\vec{s}_2)$. Формула (5) для $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\vec{s}_1}(z) &= \int_{z > t_1 > t_2 > \dots > t_p > 0} \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_p, \\ \text{Li}_{\vec{s}_2}(z) &= \int_{z > t_{p+1} > t_{p+2} > \dots > t_{p+q} > 0} \omega_{p+1} \omega_{p+2} \cdots \omega_{p+q}, \end{aligned}$$

где ω_i — это либо dt_i/t_i , либо $dt_i/(1 - t_i)$. Обозначим через S'_{p+q} множество подстановок σ множества $\{1, \dots, p+q\}$, таких что

$$\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(2) < \dots < \sigma^{-1}(p), \quad \sigma^{-1}(p+1) < \sigma^{-1}(p+2) < \dots < \sigma^{-1}(p+q).$$

Разбивая декартово произведение

$$\begin{aligned} &\{z > t_1 > t_2 > \dots > t_p > 0\} \times \{z > t_{p+1} > t_{p+2} > \dots > t_{p+q} > 0\} = \\ &= \bigsqcup_{\sigma \in S'_{p+q}} \{z > t_{\sigma(1)} > t_{\sigma(2)} > \dots > t_{\sigma(p+q)} > 0\} \sqcup \{\text{множество меры нуль}\}, \end{aligned}$$

получаем

$$\text{Li}_{\vec{s}_1}(z) \text{Li}_{\vec{s}_2}(z) = \sum_{\sigma \in S'_{p+q}} \int_{z > t_{\sigma(1)} > t_{\sigma(2)} > \dots > t_{\sigma(p+q)} > 0} \omega_{\sigma(1)} \omega_{\sigma(2)} \cdots \omega_{\sigma(p+q)}.$$

Таким образом, произведение $\text{Li}_{\vec{s}_1}(z) \text{Li}_{\vec{s}_2}(z)$ является линейной комбинацией $\text{Li}_{\vec{t}}(z)$ с целыми положительными коэффициентами (соотношение тасования); сумма коэффициентов равна биному

$$\binom{w(\vec{s}_1) + w(\vec{s}_2)}{w(\vec{s}_1)},$$

а векторы $\vec{t}$ удовлетворяют равенствам

$$l(\vec{t}) = l(\vec{s}_1) + l(\vec{s}_2), \quad w(\vec{t}) = w(\vec{s}_1) + w(\vec{s}_2),$$

причём аналитическое продолжение обеспечивает выполнение этого тождества и в области D . Таким образом, второе доказательство следствий 2 и 3 завершено.

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения тасования:

$$\text{Li}_1(z) \text{Li}_4(z) = 2\text{Li}_{4,1}(z) + \text{Li}_{3,2}(z) + \text{Li}_{2,3}(z) + \text{Li}_{1,4}(z), \quad (9)$$

$$\text{Li}_2(z) \text{Li}_3(z) = 6\text{Li}_{4,1}(z) + 3\text{Li}_{3,2}(z) + \text{Li}_{2,3}(z), \quad (10)$$

$$\text{Li}_1(z) \text{Li}_{2,2}(z) = 2\text{Li}_{2,2,1}(z) + 2\text{Li}_{2,1,2}(z) + \text{Li}_{1,2,2}(z). \quad (11)$$

Пусть у нас есть вектор $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ с натуральными компонентами. Как и ранее, поставим в соответствие вектору $\vec{s}$ слово $x_0^{s_1-1} x_1 \cdots x_0^{s_k-1} x_1 = v x_1$. Пусть σ — это отображение, действующее на таких словах и меняющее буквы x_0 и x_1 между собой. Определим двойственный вектор $\vec{s}'$ как вектор, соответствующий слову $\sigma(v) x_1$. Например, вектору $\vec{s} = (2, 1, 3)$ соответствует слово

$x_0 x_1^2 x_0^2 x_1 = v x_1$ и $\sigma(v) x_1 = x_1 x_0^2 x_1^3$, $\vec{s}' = (1, 3, 1, 1)$. Справедлива следующая теорема (см. [2, лемма 12]).

Теорема 4 (о двойственности). При $z \in D$ выполняется тождество

$$\text{Le}_{\vec{s}}\left(\frac{-z}{1-z}\right) = -\text{Le}_{\vec{s}'}(z).$$

Следствие 4 (о полной сумме полилогарифмов постоянного веса). Пусть W_n — все векторы веса n . Тогда для любого $z \in D$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} \text{Le}_{\{1\}_n}(z) &= \sum_{\vec{p} \in W_n} \text{Li}_{\vec{p}}(z) = -\text{Li}_n\left(\frac{-z}{1-z}\right), \\ \text{Li}_{\{1\}_n}(z) &= \sum_{\vec{p} \in W_n} (-1)^{n-l(\vec{p})} \text{Le}_{\vec{p}}(z) = \frac{(-\ln(1-z))^k}{k!}. \end{aligned}$$

Доказательство. Из (6) следуют тождества

$$\sum_{\vec{p} \in W_n} \text{Li}_{\vec{p}}(z) = \text{Le}_{\{1\}_n}(z), \quad \sum_{\vec{p} \in W_n} (-1)^{n-l(\vec{p})} \text{Le}_{\vec{p}}(z) = \text{Li}_{\{1\}_n}(z).$$

Теорема 4 при $\vec{s} = (n)$ даёт

$$\text{Le}_{\{1\}_n}(z) = -\text{Li}_n\left(\frac{-z}{1-z}\right),$$

что доказывает первую необходимую пару равенств. Вторая пара следует из тождества (7). $\square$

Так как обобщённый полилогарифм $\text{Li}_{\vec{s}}(z)$ является линейной комбинацией $\text{Le}_{\vec{t}}(z)$, то функция $\text{Li}_{\vec{s}}(-z/(1-z))$ будет линейной комбинацией $\text{Le}_{\vec{t}'}(z)$, а следовательно, и $\text{Li}_{\vec{u}}(z)$. Приведём точную формулу (см. [6, теорема 1]) (в формулировке вместо векторов полилогарифмов используются соответствующие им слова).

Теорема 5. Пусть $z \in D$ и s_j — натуральные числа. Тогда выполняется равенство

$$\text{Li}_{x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{s_l-1} x_1}\left(\frac{-z}{1-z}\right) = (-1)^l \sum_{w(p_1)=s_1-1, \dots, w(p_l)=s_l-1} \text{Li}_{p_1 x_1 \dots p_l x_1}(z).$$

Например, если $s_1 = 3$, $s_2 = 1$, то

$$\begin{aligned} \text{Li}_{3,1}\left(\frac{-z}{1-z}\right) &= \sum_{w(p)=2} \text{Li}_{p x_1 x_1}(z) = \\ &= \text{Li}_{x_0 x_0 x_1 x_1}(z) + \text{Li}_{x_0 x_1 x_1 x_1}(z) + \text{Li}_{x_1 x_0 x_1 x_1}(z) + \text{Li}_{x_1 x_1 x_1 x_1}(z) = \\ &= \text{Li}_{3,1}(z) + \text{Li}_{2,1,1}(z) + \text{Li}_{1,2,1}(z) + \text{Li}_{1,1,1,1}(z). \end{aligned}$$

В [11, раздел 7] было получено тождество, связывающее обобщённые полилогарифмы в точках z и $1-z$ (в этой работе это названо *свёрткой Гёльдера*, так как работа ведётся с аргументом, обратно пропорциональным нашему).

Теорема 6. Пусть $m \geq 2$, $y_1 y_2 \cdots y_m$ – слово в алфавите $\{x_0, x_1\}$, причём $y_1 = x_0$ и $y_m = x_1$. Обозначим через τ функцию, явно заданную на этом алфавите: $\tau(x_0) = x_1$, $\tau(x_1) = x_0$. Тогда при любом $z \in \mathbb{C}$, не лежащем на одном из лучей $\{z \in \mathbb{R}: z \leq 0\}$, $\{z \in \mathbb{R}: z \geq 1\}$ выполнено

$$\zeta(y_1 y_2 \cdots y_m) = \sum_{i=1}^{m+1} \text{Li}_{y_i \cdots y_m}(z) \text{Li}_{\tau(y_{i-1}) \cdots \tau(y_1)}(1-z),$$

где предполагается, что $\text{Li}_{\emptyset}(z) \equiv 1$.

Например, применяя теорему 6 к слову $x_0^{m-1} x_1$, получаем

$$\begin{aligned} \zeta(m) &= \sum_{i=1}^m \text{Li}_{x_0^{m-i} x_1}(z) \text{Li}_{x_1^{i-1}}(1-z) + \text{Li}_{x_0 x_1^{m-1}}(1-z) = \\ &= \sum_{i=1}^m \text{Li}_{m-i+1}(z) \text{Li}_{\{1\}_{i-1}}(1-z) + \text{Li}_{2, \{1\}_{m-2}}(1-z). \end{aligned}$$

Эта теорема была доказана в [11] для $z \in (0, 1)$ с помощью представления (5). В более широкой области будет выполняться то же тождество, поскольку возможно аналитическое продолжение.

В [6, теорема 2] была явно приведена формула, выражающая $\text{Li}_{\bar{s}}(1-z)$ в виде многочлена с рациональными коэффициентами от $\text{Li}_{\bar{t}}(z)$, $\ln z$ и значений кратной дзета-функции. Другой подход к получению формул при дробно-линейных преобразованиях аргумента обобщённого полилогарифма изложен в [22]. С использованием формального производящего ряда для полилогарифмов в этой работе изучены преобразования $z \rightarrow 1-z$, $z \rightarrow 1-1/z$, $z \rightarrow 1/z$.

4. Знакопеременная кратная дзета-функция

Определим *знакопеременную кратную дзета-функцию*

$$\zeta(s_1, \dots, s_l; \sigma_1, \dots, \sigma_l) = \sum_{n_1 > \dots > n_l \geq 1} \frac{\sigma_1^{n_1} \cdots \sigma_l^{n_l}}{n_1^{s_1} \cdots n_l^{s_l}}$$

для натуральных s_j и $\sigma_j = \pm 1$ (в случае, если все σ_j являются комплексными корнями из единицы, используют название *окрашенная кратная дзета-функция*). Такие суммы также иногда называют (знакопеременными) *эйлеровыми*. Часто объединяют степень s_j и знак σ_j в один символ: s_j при $\sigma_j = 1$ и $\bar{s}_j$ при $\sigma_j = -1$. Например, $\zeta(\bar{s}_1, s_2, \dots, s_l) = \text{Li}_{s_1, s_2, \dots, s_l}(-1)$. Знакопеременная кратная дзета-функция несомненно достойна отдельного изучения, однако в настоящей статье она будет играть вспомогательную роль.

Также нам потребуется функция

$$\mu(a_1, \dots, a_l) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_l=1}^{\infty} \frac{a_1^{k_1} \cdots a_l^{k_l}}{(k_1 + k_2 + \dots + k_l) \cdots (k_{l-1} + k_l) k_l}.$$

Если $a_1 = -1$ и $a_j = \pm 1$ при $j > 1$, то ряд сходится, и при помощи замены переменных $n_j = k_j + \dots + k_l$ получаем

$$\mu(a_1, \dots, a_l) = \zeta(\{1\}_l; \sigma_1, \dots, \sigma_l), \quad (12)$$

где $\sigma_1 = -1$ и $\sigma_j \equiv a_{j-1} + a_j - 1 \pmod{4}$ при $j > 1$.

Теорема 7. Для любых натуральных s_j и $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, выполняется

$$\text{Li}_{s_1, \dots, s_l} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = (-1)^l \mu(z, \{1\}_{s_l-1}, \dots, z, \{1\}_{s_1-1}).$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $z \in (-1, 0)$ (так как возможно аналитическое продолжение). Обозначим через $y_1 y_2 \dots y_m$ слово $x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{x_l-1} x_1$. По теореме 2

$$\text{Li}_{s_1, \dots, s_l} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = \int_0^{\frac{-z}{1-z}} \omega_{y_1}(t_1) \int_0^{t_1} \omega_{y_2}(t_2) \dots \int_0^{t_{m-1}} \omega_{y_m}(t_m).$$

После замены переменных $t_{m+1-i} = -z/(1-z) \cdot (1-u_i)$ получим

$$\text{Li}_{s_1, \dots, s_l} \left(\frac{-z}{1-z} \right) = \int_0^1 \nu_{y_m}(u_1) \int_0^{u_1} \nu_{y_{m-1}}(u_2) \dots \int_0^{u_{m-1}} \nu_{y_1}(u_m),$$

где

$$\nu_{x_0}(u) = \frac{du}{1-u}, \quad \nu_{x_1}(u) = \frac{-z du}{1-zu}.$$

Последовательно интегрируя по переменным $u_m, u_{m-1}, \dots, u_1$, приходим к выражению

$$(-1)^l \mu(z, \{1\}_{s_l-1}, \dots, z, \{1\}_{s_1-1}). \quad \square$$

Следствие 5. Для любых натуральных s_j выполняется равенство

$$\text{Li}_{s_1, \dots, s_l} \left(\frac{1}{2} \right) = (-1)^l \mu(-1, \{1\}_{s_l-1}, \dots, -1, \{1\}_{s_1-1}).$$

Доказательство. Перейдём в теореме 7 к пределу при $z \rightarrow -1$. $\square$

Следствие 6. Для любых натуральных s_j и $|z| < 1$ справедливо

$$\mu(z, \{1\}_{s_l-1}, \dots, z, \{1\}_{s_1-1}) = \sum_{w(p_1)=s_1-1, \dots, w(p_l)=s_l-1} \text{Li}_{p_1 x_1 \dots p_l x_1}(z).$$

Доказательство. Требуемое тождество напрямую следует из теорем 5 и 7. $\square$

Следствие 5 было доказано в [11, (6.8)]. Оно устанавливает взаимно-однозначное соответствие между значениями полилогарифмов $\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$ и знакопеременной кратной дзета-функцией с $s_j = 1$, $\sigma_1 = -1$ и произвольными $\sigma_j = \pm 1$

при $j > 1$. Следствие 6 для $z = -1$ (которое может быть получено предельным переходом) было доказано в [11, теорема 9.4].

На основании экспериментальных данных, мы выдвигаем следующую гипотезу.

Гипотеза 1. Любое значение знакопеременной кратной дзета-функции веса w является рациональной линейной комбинацией любых из следующих значений:

- 1) $\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$, $w(\vec{s}) = w$,
- 2) $\text{Le}_{\vec{s}}(1/2)$, $w(\vec{s}) = w$,
- 3) $\text{Li}_{\vec{s}}(-1)$, $w(\vec{s}) = w$,
- 4) $\text{Le}_{\vec{s}}(-1)$, $w(\vec{s}) = w$,
- 5) $\zeta(\{1\}_w; -1, \sigma_2, \dots, \sigma_w)$ с произвольными $\sigma_j = \pm 1$ при $j > 1$.

Покажем, что пункты 1)–5) равносильны. Действительно, 1) $\iff$ 2) и 3) $\iff$ 4) по (6), 2) $\iff$ 4) по теореме 4, 1) $\iff$ 5) по следствию 5. В [11, раздел 7] было показано, что утверждение гипотезы 1 выполняется для (незнакопеременной) кратной дзета-функции. Достаточно воспользоваться теоремой 6 для $z = 1/2$, а затем для каждого произведения двух полилогарифмов применить соотношение тасования. Также несложно доказать утверждение для знакопеременной кратной дзета-функции длины не больше 2. Дополнительно гипотеза была проверена автором для веса не больше 8. Проверка осуществлялась с помощью вычисления эйлеровых сумм с высокой точностью (см. [11, раздел 7]) и применения алгоритма PSLQ (см. [16]) для поиска линейных соотношений с целыми коэффициентами.

5. Значения обобщённых полилогарифмов в точке $z = 1/2$

Теорема 8 (о полной сумме полилогарифмов в точке $z = 1/2$ постоянного веса). Пусть W_n — все векторы веса n . Тогда выполнены равенства

$$\begin{aligned} \text{Le}_{\{1\}_n}\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{\vec{p} \in W_n} \text{Li}_{\vec{p}}\left(\frac{1}{2}\right) = (1 - 2^{1-n})\zeta(n), \\ \text{Li}_{\{1\}_n}\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{\vec{p} \in W_n} (-1)^{n-l(\vec{p})} \text{Le}_{\vec{p}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln^n 2}{n!}. \end{aligned}$$

Доказательство. Требуемые равенства получаются из следствия 4 для $z = 1/2$ и (2). $\square$

Ещё одно соотношение на значения обобщённых полилогарифмов в точке $z = 1/2$ следует из теоремы 6 (применённой для $z = 1/2$).

Из (8) получаем значение $\text{Li}_{1,2n-1}(1/2)$ при любом натуральном n , которое лежит в кольце $\mathbb{Q}[\text{Li}_1(1/2), \text{Li}_2(1/2), \dots, \text{Li}_{2n}(1/2)]$.

Лемма 1. Справедливо следующее интегральное представление:

$$\text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{m!(n+1)!} \int_{1/2}^1 (\ln(2t))^m (-\ln t)^{n+1} \frac{dt}{1-t}.$$

Доказательство. Из интегрального представления (5) следует, что

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) &= \int_0^{1/2} \left(\int_{t_{m+1}}^{1/2} \frac{dt_m}{1-t_m} \cdots \int_{t_2}^{1/2} \frac{dt_1}{1-t_1} \right) \times \\ &\times \left(\int_0^{t_{m+1}} \frac{dt_{m+2}}{1-t_{m+2}} \cdots \int_0^{t_{m+n+2}} \frac{dt_{m+n+2}}{1-t_{m+n+2}} \right) \frac{dt_{m+1}}{t_{m+1}} = \\ &= \int_0^{1/2} \frac{(\ln(2(1-t_{m+1})))^m}{m!} \cdot \frac{(-\ln(1-t_{m+1}))^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{dt_{m+1}}{t_{m+1}}. \end{aligned}$$

Замена $t = 1 - t_{m+1}$ завершает доказательство леммы. $\square$

Следствие 7. Для любых целых $m \geq 0$ и $n \geq 0$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n+1+k}{n+1} \text{Li}_{2, \{1\}_{n+k}} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\ln^{m-k} 2}{(m-k)!}, \\ \text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m+k}{m} \text{Li}_{\{1\}_{m+k}, 2} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\ln^{n-k} 2}{(n-k)!}. \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. Первое равенство следует из подстановки в подынтегральное выражение леммы 1 тождества

$$(\ln(2t))^m = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (-\ln t)^k \ln^{m-k} 2,$$

а второе — из тождества

$$(-\ln t)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (\ln(2t))^k \ln^{n-k} 2. \quad \square$$

Лемма 1 использовалась в [11] для вычисления значения $\text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n}$, которое дано в следующей теореме; мы предлагаем её новое доказательство.

Теорема 9. Для любых целых $m \geq 0$ и $n \geq 0$ значение $\text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n}(1/2)$ выражается в виде многочлена от нескольких переменных с рациональными

коэффициентами при аргументах $\ln 2$, $\zeta(a)$ с $a \in [n+2, n+m+2]$ и $\text{Li}_b(1/2)$ с $b \in [m+1, m+n+2]$. А именно, справедлива формула

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n+1+k}{n+1} \zeta(n+2+k) \frac{\ln^{m-k} 2}{(m-k)!} + \\ &+ (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{m+k}{m} \text{Li}_{m+1+k} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\ln^{n+1-k} 2}{(n+1-k)!}. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем вначале теорему для $m = 0$, т. е. докажем равенство

$$\text{Li}_{2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) = \zeta(n+2) - \sum_{k=0}^{n+1} \text{Li}_{k+1} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\ln^{n+1-k} 2}{(n+1-k)!}. \quad (14)$$

Из леммы 1 следует, что

$$\text{Li}_{2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{(n+1)!} \int_{1/2}^1 (-\ln t)^{n+1} \frac{dt}{1-t}.$$

Подобный интеграл был вычислен в [3] (см. доказательство теоремы 7); мы используем тот же метод. Разложение $1/(1-t)$ в сумму геометрической прогрессии даёт

$$\text{Li}_{2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{r=1}^{\infty} \int_{1/2}^1 t^{r-1} (-\ln t)^{n+1} dt. \quad (15)$$

Рассмотрим равенство

$$\int_{1/2}^1 t^{\sigma+r-1} dt = \frac{1}{\sigma+r} - \frac{1}{2^{\sigma+r}(\sigma+r)}.$$

Продифференцируем его $n+1$ раз по σ , а затем положим $\sigma = 0$. Получим

$$\int_{1/2}^1 t^{r-1} (-\ln t)^{n+1} dt = (n+1)! \left(\frac{1}{r^{n+2}} - \frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\ln^{n+1-k} 2}{r^{k+1} (n+1-k)!} \right).$$

Подставляя это значение интеграла в (15), получаем (14). Также (14) можно получить из теоремы 6, выбирая $z = 1/2$, $m = n+2$, $y_1 \cdots y_m = x_0^{n+1} x_1$.

Докажем теперь теорему в случае произвольного m . В (13) к каждому $\text{Li}_{2, \{1\}_{n+k}}(1/2)$ применим (14):

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n+1+k}{n+1} \frac{\ln^{m-k} 2}{(m-k)!} \times \\ &\times \left(\zeta(n+2+k) - \sum_{l=0}^{n+1+k} \text{Li}_{l+1} \left(\frac{1}{2} \right) \frac{\ln^{n+1+k-l} 2}{(n+1+k-l)!} \right) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n+1+k}{n+1} \zeta(n+2+k) \frac{\ln^{m-k} 2}{(m-k)!} -$$

$$- \sum_{l=0}^{n+m+1} S_{m,n,l} \operatorname{Li}_{l+1} \left(\frac{1}{2} \right) \ln^{n+m+1-l} 2,$$

где

$$S_{m,n,l} = \sum_{k=\max(0, l-n-1)}^m (-1)^k \binom{n+1+k}{n+1} \frac{1}{(m-k)!(n+1+k-l)!}.$$

Утверждение теоремы будет доказано, если мы покажем, что $S_{m,n,l} = 0$ при $l < m$ и

$$S_{m,n,l} = (-1)^m \binom{l}{m} \frac{1}{(n+m+1-l)!}$$

при $m \leq l \leq m+n+1$. При $l \leq n+1$ представим $S_{m,n,l}$ в виде гипергеометрической функции

$$\frac{1}{m!(n+1-l)!} \cdot {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -m, n+2 \\ n+2-l \end{matrix}; 1 \right],$$

а в случае $l > n+1$ в виде

$$(-1)^{l-n-1} \binom{l}{n+1} \frac{1}{(m-l+n+1)!} \cdot {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -m+l-n-1, l+1 \\ l-n \end{matrix}; 1 \right].$$

В обоих случаях значение гипергеометрической функции можно вычислить по теореме Гаусса (см. [1, (2.1.3 (14))], в данном случае являющейся теоремой Вандермонда:

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} -k, b \\ c \end{matrix}; 1 \right] = \frac{(c-b)_k}{(c)_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ — символ Похгаммера. Мы получаем выражения

$$\frac{1}{m!(n+1-l)!} \cdot \frac{(-l)_m}{(n+2-l)_m},$$

$$(-1)^{l-n-1} \binom{l}{n+1} \frac{1}{(m-l+n+1)!} \cdot \frac{(-n-1)_{m-l+n+1}}{(l-n)_{m-l+n+1}},$$

которые приводятся к требуемому виду. $\square$

В разделе 6 мы покажем, что значения $\operatorname{Le}_{2,\{1\}_n}(1/2)$ при любом n и $\operatorname{Le}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n}(1/2)$ при нечётном $m+n$ лежат в кольце $\mathbb{Q}[\ln 2, \zeta(2), \zeta(3), \dots]$.

Теорема 9 была доказана в [11, теорема 8.5] с помощью производящих функций. Метод производящих функций часто оказывается полезным для вычисления значений полилогарифмов, у которых векторы меняются по периодическому закону.

Теорема 10. Для любого целого неотрицательного m значения $\text{Li}_{\{2\}_m}(1/2)$ и $\text{Li}_{1,\{2\}_m}(1/2)$ принадлежат кольцу $\mathbb{Q}[\ln 2, \zeta(2), \zeta(3), \dots]$. Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо тождество

$$G(z) := \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \text{Li}_{\{2\}_m} \left(\frac{1}{2} \right) z^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \text{Li}_{1,\{2\}_m} \left(\frac{1}{2} \right) z^{2m+1} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1+z/2)\Gamma(1/2-z/2)}.$$

Доказательство. Сначала оценим $\text{Li}_{\{2\}_m}(1/2)$ и $\text{Li}_{1,\{2\}_m}(1/2)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\{2\}_{m+1}} \left(\frac{1}{2} \right) &< \text{Li}_{1,\{2\}_m} \left(\frac{1}{2} \right) = \\ &= \sum_{n_1=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_1} n_1} \sum_{n_2=m}^{n_1-1} \frac{1}{n_2^2} \cdots \sum_{n_m=2}^{n_{m-1}-1} \frac{1}{n_m^2} \sum_{n_{m+1}=1}^{n_m-1} \frac{1}{n_{m+1}^2}. \end{aligned}$$

Используя соотношения

$$\sum_{n=1}^r \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2), \quad \sum_{n=p}^r \frac{1}{n^2} < \int_{p-1}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{p-1}, \quad p > 1,$$

получаем

$$\text{Li}_{\{2\}_{m+1}} \left(\frac{1}{2} \right) < \text{Li}_{1,\{2\}_m} \left(\frac{1}{2} \right) < \frac{\zeta(2)}{(m-1)!} \sum_{n_1=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_1} n_1} < \frac{\zeta(2) \ln 2}{(m-1)!}.$$

Таким образом, оба степенных ряда имеют бесконечный радиус сходимости.

По следствию 5 и соотношению (12) выполняются равенства

$$\begin{aligned} \text{Li}_{\{2\}_m} \left(\frac{1}{2} \right) &= (-1)^m \mu(\{-1, 1\}_m) = (-1)^m \zeta(\{\bar{1}\}_{2m}), \\ \text{Li}_{1,\{2\}_m} \left(\frac{1}{2} \right) &= (-1)^{m+1} \mu(\{-1, 1\}_m, -1) = (-1)^{m+1} \zeta(\{\bar{1}\}_{2m+1}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_m \geq 1} \frac{(-1)^{n_1+n_2+\dots+n_m}}{n_1 n_2 \cdots n_m} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + (-1)^j \frac{z}{j} \right),$$

откуда получаем (см. [1, 1.3(1)]), что

$$G(z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1+z/2)\Gamma(1/2-z/2)}.$$

Для $|z| < 1$ имеем, что $G(z) \neq 0$ и

$$\begin{aligned} (\ln G(z))' &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + (-1)^j \frac{z}{j} \right) \right)' = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (-1)^j z/j} \frac{(-1)^j}{j} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{jk+j+k} z^k}{j^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{Li}_{k+1}((-1)^{k+1}) z^k, \end{aligned}$$

или

$$G(z) = C \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \text{Li}_k((-1)^k) z^k}{k} \right),$$

причём $C = 1$, так как $G(0) = 1$. Эта формула позволяет вычислить коэффициент при z^k в разложении Тейлора функции $G(z)$ в точке $z = 0$. Так как

$$\text{Li}_k((-1)^k) = \begin{cases} -\ln 2, & \text{если } k = 1, \\ \zeta(k), & \text{если } k \text{ чётное,} \\ -(1 - 2^{1-k})\zeta(k), & \text{если } k \text{ нечётное и } k > 1, \end{cases}$$

то этот коэффициент будет лежать в кольце $\mathbb{Q}[\ln 2, \zeta(2), \zeta(3), \dots, \zeta(k)]$. Теорема теперь полностью доказана. $\square$

Теорема 10 была неявно (для знакопеременной кратной дзета-функции) доказана в [10] (см. формулы (13) и (62)). В [12] явно доказано (см. теоремы 3 и 4, а также замечания в конце разделов 4.2 и 4.4), что значения

$$\begin{aligned} &\text{Li}_{\{3,1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right), \quad \text{Li}_{2,1,\{3,1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right), \quad \text{Li}_{1,1,\{3,1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right), \quad \text{Li}_{1,\{3,1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right), \\ &\text{Li}_{\{1,3\}_n} \left(\frac{1}{2} \right), \quad \text{Li}_{3,\{1,3\}_n} \left(\frac{1}{2} \right), \quad \text{Li}_{2,\{1,3\}_n} \left(\frac{1}{2} \right), \quad \text{Li}_{1,\{1,3\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

лежат в кольце $\mathbb{Q}[\ln 2, \zeta(2), \zeta(3), \dots]$. При этом приведены производящие функции, которые позволяют вычислить все эти значения.

6. Значения обобщённых полилогарифмов в точке $z = -1$

Значения обобщённых полилогарифмов в точке $z = -1$ могут быть сведены к значениям в точке $z = 1/2$ при помощи теорем 4 и 5. Таким образом, условно сходящиеся ряды полилогарифмов (при $z = -1$) можно привести к сумме более быстро сходящихся рядов. Как и в случае значений в точке $z = 1/2$, имеется ряд специфических теорем.

Теорема 11 (о полной сумме полилогарифмов в точке $z = -1$ постоянного веса). Пусть W_n — все векторы веса n . Тогда выполнены равенства

$$\begin{aligned} \text{Le}_{\{1\}_n}(-1) &= \sum_{\vec{p} \in W_n} \text{Li}_{\vec{p}}(-1) = -\text{Li}_n\left(\frac{1}{2}\right), \\ \text{Li}_{\{1\}_n}(-1) &= \sum_{\vec{p} \in W_n} (-1)^{n-l(\vec{p})} \text{Le}_{\vec{p}}(-1) = \frac{(-\ln 2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Доказательство. Требуемые равенства получаются из следствия 4 для $z = -1$. $\square$

Из теоремы 5 следует, что

$$\text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n}(-1) = (-1)^{m+n+1} \left(\text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{Li}_{\{1\}_{m+n+2}} \left(\frac{1}{2} \right) \right).$$

Применяя (7) и теорему 9, получаем формулу для $\text{Li}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n}(-1)$.

В [17, теорема 7.2] с помощью вычисления комплексных интегралов была доказана следующая теорема.

Теорема 12. Для любых натуральных m, n с нечётной суммой $m+n$ значение $\text{Le}_{m,n}(-1)$ принадлежит кольцу $\mathbb{Q}[\ln 2, \zeta(2), \dots, \zeta(m+n)]$, а именно справедлива формула

$$\begin{aligned} 2\text{Le}_{m,n}(-1) &= (1 - (-1)^n) \zeta(n) \zeta(\overline{m}) + \zeta(\overline{m+n}) + \\ &+ 2(-1)^n \sum_{j+2k=n} \binom{m+j-1}{m-1} \zeta(\overline{m+j}) \zeta(\overline{2k}) + \\ &+ 2(-1)^n \sum_{i+2k=m} \binom{n+i-1}{n-1} \zeta(n+i) \zeta(\overline{2k}), \end{aligned}$$

где i, j, k — целые неотрицательные числа и полагается, что $\zeta(\overline{0}) = -1/2$. В случае $n = 1$ применяется следующее правило: в правой части равенства первое слагаемое $2\zeta(1)\zeta(\overline{m})$ уничтожается со слагаемым из суммы по i при $i = 0$.

Теорема 13. Для любого натурального n значение $\text{Le}_{1,n}(-1)$ принадлежит кольцу $\mathbb{Q}[\ln 2, \zeta(2), \dots, \zeta(n+1)]$, а именно справедлива формула

$$2\text{Le}_{1,n}(-1) = \sum_{k=1}^n \zeta(\overline{k}) \zeta(\overline{n-k+1}) - n\zeta(n+1).$$

Доказательство. В случае чётного n требуемая формула непосредственно следует из теоремы 12 (подставляем $m = 1$). В случае нечётного n воспользуемся (8) при $z = -1$:

$$2\text{Li}_{1,n}(-1) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \zeta(\overline{k}) \zeta(\overline{n+1-k}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2\text{Le}_{1,n}(-1) &= 2\text{Li}_{1,n}(-1) + 2\zeta(\overline{n+1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \zeta(\overline{k})\zeta(\overline{n+1-k}) - 2 \sum_{p=0}^{(n+1)/2} \zeta(\overline{2p})\zeta(\overline{n+1-2p}). \end{aligned}$$

Преобразуем вычитаемое в $n\zeta(n+1)$. Известно [1, 1.12 (2), 1.13 (22)], что

$$\zeta(\overline{2p}) = (-1)^p (1 - 2^{1-2p}) \frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!} B_{2p}, \quad \zeta(2q) = (-1)^{q+1} \frac{(2\pi)^{2q}}{2(2q)!} B_{2q}$$

для целых $p \geq 0$ и $q \geq 1$. Следовательно, искомое равенство

$$2 \sum_{p=0}^{(n+1)/2} \zeta(\overline{2p})\zeta(\overline{n+1-2p}) = n\zeta(n+1)$$

равносильно следующему соотношению для чисел Бернулли:

$$\sum_{p=0}^q (1 - 2^{1-2p})(1 - 2^{1-(2q-2p)}) \frac{B_{2p}B_{2q-2p}}{(2p)!(2q-2p)!} = -(2q-1) \frac{B_{2q}}{(2q)!}.$$

Оно является частным случаем равенства У. Госпера (см. [20, (34)])

$$\sum_{p=0}^r (1 - 2^{1-p})(1 - 2^{1-(r-p)}) \frac{B_p B_{r-p}}{p!(r-p)!} = -(r-1) \frac{B_r}{r!}. \quad (16)$$

Действительно, $B_{2k-1} = 0$ при $k > 1$ (см. [1, 1.13 (17)]), поэтому $(1 - 2^{1-k})B_k = 0$ при любом нечётном $k \geq 1$. Доказательство равенства (16) автору любезно сообщил У. Госпер. Рассмотрим производящую функцию для многочленов Бернулли (см. [1, 1.13 (2)]):

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 2\pi.$$

Перемножая производящие функции, получаем тождество

$$\sum_{p=0}^r \frac{B_p(x)B_{r-p}(y)}{p!(r-p)!} = \frac{r(x+y-1)B_{r-1}(x+y-1) - (r-1)B_r(x+y-1)}{r!}.$$

Подставляя $x = y = 1/2$ и используя значение $B_k(1/2) = -(1 - 2^{1-k})B_k$ (см. [7, (23.1.21)]), получаем (16). Доказательство теоремы окончено. $\square$

Используя соотношение

$$\text{Li}_{m,n}(-1) = \text{Le}_{m,n}(-1) - \text{Li}_{m+n}(-1),$$

легко выписать формулы для значений $\text{Li}_{m,n}(-1)$ при нечётном $m+n$ и $\text{Li}_{1,n}(-1)$ при любом n . В частности, равенство

$$2\text{Li}_{1,n}(-1) = \sum_{k=1}^n \zeta(\overline{k})\zeta(\overline{n-k+1}) - n\zeta(n+1) - 2\zeta(\overline{n+1})$$

равносильно теореме 13 и было доказано Н. Нилсеном [23, с. 50, (6)]. Из теоремы 4 следует, что

$$\text{Le}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n} \left(\frac{1}{2} \right) = -\text{Le}_{m+1, n+1}(-1),$$

откуда получаем значения $\text{Le}_{2, \{1\}_n}(1/2)$ при любом n и $\text{Le}_{\{1\}_m, 2, \{1\}_n}(1/2)$ при нечётном $m+n$.

В разделе 7, найдя все значения обобщённых полилогарифмов веса 5, мы получим любопытную формулу

$$\text{Le}_{1,3,1} \left(\frac{1}{2} \right) = -\text{Le}_{2,1,2}(-1) = \frac{53}{64}\zeta(5) - \frac{1}{16}\zeta(2)\zeta(3).$$

Представляется интересным вопрос: можно ли обобщить эту формулу?

7. Обобщённые полилогарифмы при малых весах

Предположим, что мы вычислили значения $\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$ для всех векторов $\vec{s}$ некоторого веса. Тогда значения $\text{Le}_{\vec{s}}(1/2)$, $\text{Le}_{\vec{s}}(-1)$, $\text{Li}_{\vec{s}}(-1)$ для тех же векторов можно вычислить, используя равенство (6) и теоремы 4 и 5. В этом разделе мы исследуем значения $\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$ для всех векторов веса не больше 5, а в приложении дадим таблицы этих значений и значений, вычисляемым по ним.

ВЕС 1. Есть только один (обобщённый) полилогарифм веса 1, и $\text{Li}_1(1/2) = \ln 2$ по равенству (1).

ВЕС 2. Из (7) получаем значение $\text{Li}_{1,1}(1/2)$, а значение $\text{Li}_2(1/2)$ дано в (3).

ВЕС 3. Значение $\text{Li}_3(1/2)$ дано в (4), $\text{Li}_{2,1}(1/2)$ и $\text{Li}_{1,2}(1/2)$ получаем из теоремы 9, $\text{Li}_{1,1,1}(1/2)$ — из (7).

ВЕС 4. Значение $\text{Li}_4(1/2)$ мы считаем отдельной константой, $\text{Li}_{1,1,1,1}(1/2)$ получаем из (7), $\text{Li}_{2,1,1}(1/2)$, $\text{Li}_{1,2,1}(1/2)$ и $\text{Li}_{1,1,2}(1/2)$ выводятся из теоремы 9, $\text{Li}_{2,2}(1/2)$ — из теоремы 10, $\text{Li}_{1,3}(1/2)$ — из следствия 1, $\text{Li}_{3,1}(1/2)$ — из следствия 3 (с учётом найденного $\text{Li}_{2,2}(1/2)$). Альтернативно $\text{Li}_{1,3}(1/2)$ и $\text{Li}_{3,1}(1/2)$ можно вывести из формул, данных в [12].

ВЕС 5. Значение $\text{Li}_5(1/2)$ мы считаем отдельной константой, $\text{Li}_{1,1,1,1,1}(1/2)$ выводится из (7), $\text{Li}_{2,1,1,1}(1/2)$, $\text{Li}_{1,2,1,1}(1/2)$, $\text{Li}_{1,1,2,1}(1/2)$ и $\text{Li}_{1,1,1,2}(1/2)$ получаем из теоремы 9, $\text{Li}_{1,2,2}(1/2)$ — из теоремы 10, $\text{Li}_{1,1,3}(1/2)$ и $\text{Li}_{1,3,1}(1/2)$ — из формул, данных в [12]. Остаётся найти семь значений Li с индексами

$$(4, 1), \quad (3, 2), \quad (3, 1, 1), \quad (2, 3), \quad (2, 2, 1), \quad (2, 1, 2), \quad (1, 4).$$

Из теоремы 8 с учётом уже найденных значений получим, что сумма этих семи значений равна скалярному произведению

$$\left(\frac{59}{32}, \frac{1}{16}, -\frac{7}{8}, 0, 0, \frac{1}{120}, -2, 0 \right) \cdot \vec{B}, \quad (17)$$

где

$$\vec{B} = \left(\zeta(5), \zeta(2)\zeta(3), \zeta(4) \ln 2, \zeta(3) \ln^2 2, \zeta(2) \ln^3 2, \ln^5 2, \text{Li}_5 \left(\frac{1}{2} \right), \text{Li}_4 \left(\frac{1}{2} \right) \ln 2 \right).$$

Из теоремы 6 при $z = 1/2$ и равенства $y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 = x_0^3 x_1^2$ следует, что

$$\begin{aligned} \text{Li}_{4,1} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{Li}_{3,1,1} \left(\frac{1}{2} \right) &= \zeta(4, 1) - \text{Li}_{3,1} \left(\frac{1}{2} \right) \text{Li}_1 \left(\frac{1}{2} \right) - \\ &- \text{Li}_{2,1} \left(\frac{1}{2} \right) \text{Li}_{1,1} \left(\frac{1}{2} \right) - \text{Li}_{1,1} \left(\frac{1}{2} \right) \text{Li}_{1,1,1} \left(\frac{1}{2} \right) - \text{Li}_1 \left(\frac{1}{2} \right) \text{Li}_{2,1,1} \left(\frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Используя значения обобщённых полилогарифмов веса не больше 4 и значение $\zeta(4, 1) = 2\zeta(5) - \zeta(2)\zeta(3)$ (вычисления значений кратной дзета-функции малого веса и их таблицы можно найти, например, в [21]), получим

$$\text{Li}_{4,1} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{Li}_{3,1,1} \left(\frac{1}{2} \right) = \left(2, -1, -\frac{9}{8}, \frac{15}{16}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{24}, 0, 1 \right) \cdot \vec{B}. \quad (18)$$

Аналогично, используя соотношения

$$\zeta(3, 2) = -\frac{11}{2}\zeta(5) + 3\zeta(2)\zeta(3), \quad \zeta(2, 3) = \frac{9}{2}\zeta(5) - 2\zeta(2)\zeta(3),$$

найдем, что

$$\text{Li}_{3,2} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{Li}_{2,2,1} \left(\frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{11}{2}, \frac{47}{16}, \frac{47}{16}, -\frac{45}{16}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{8}, 0, -3 \right) \cdot \vec{B}, \quad (19)$$

$$\text{Li}_{2,3} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{Li}_{2,1,2} \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{37}{16}, -\frac{43}{16}, \frac{37}{16}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, 0, 3 \right) \cdot \vec{B}. \quad (20)$$

Складывая (18)–(20) и вычитая результат из (17), находим, что

$$\text{Li}_{1,4} \left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{27}{32}, \frac{7}{16}, 0, -\frac{7}{16}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{30}, -2, -1 \right) \cdot \vec{B}.$$

Из (9)–(11) при $z = 1/2$ получаем, что

$$2\text{Li}_{4,1} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{Li}_{3,2} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{Li}_{2,3} \left(\frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{27}{32}, -\frac{7}{16}, 0, \frac{7}{16}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, 2, 2 \right) \cdot \vec{B}, \quad (21)$$

$$6\text{Li}_{4,1} \left(\frac{1}{2} \right) + 3\text{Li}_{3,2} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{Li}_{2,3} \left(\frac{1}{2} \right) = \left(0, \frac{7}{16}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{16}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{12}, 0, 0 \right) \cdot \vec{B}, \quad (22)$$

$$2\text{Li}_{2,2,1} \left(\frac{1}{2} \right) + 2\text{Li}_{2,1,2} \left(\frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{3}{16}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, 0, 0 \right) \cdot \vec{B}. \quad (23)$$

Из шести линейно независимых уравнений (18)–(23) находим шесть оставшихся значений.

Все значения обобщённых полилогарифмов веса не больше 5 в точках $z = 1/2$ и $z = -1$ приведены в приложении.

К сожалению, соотношения тасования и равенства из раздела 5 не позволяют найти все значения обобщённых полилогарифмов какого-либо веса, равного или большего 6, в точках $z = 1/2$ и $z = -1$ (о размерности соответствующего линейного пространства и введении новых констант будет сказано в следующем разделе).

Некоторые из значений полилогарифмов малого веса были получены давно. Так, например, равенство

$$\text{Le}_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2)\ln 2$$

было найдено С. Рамануджаном (см. [8, р. 258]).

Обратимся теперь к значениям знакопеременной кратной дзета-функции. В [13, 14] Д. Дж. Бродхёрст получил ряд соотношений для них, а также выдвинул много интересных гипотез. Он использовал численное экспериментирование с помощью алгоритма PSLQ, а также строго нашёл значения для некоторых длин и весов (например, двойных сумм веса не больше 44). Другой подход к исследованию значений малого веса был предложен Й. Вермасереном [25, раздел 5]. Им были вычислены значения вплоть до веса 9 (в [25] только до веса 7). Метод Вермасерена фактически использует следующую гипотезу, явно сформулированную в [9, гипотеза 7.1].

Гипотеза 2. Все алгебраические соотношения между значениями знакопеременной кратной дзета-функции порождаются с помощью соотношений тасования и стаффл-соотношений.

Используя эту гипотезу, М. Бижот, один из авторов [9], нашёл значения знакопеременной кратной дзета-функции веса не больше 8.

8. Пространство, порождённое значениями обобщённых полилогарифмов

Пусть $\mathcal{L}_w$ — $\mathbb{Q}$ -линейное пространство, порождённое значениями $\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$ при векторах $\vec{s}$ веса w . С помощью линейных соотношений (6) и теоремы 4 легко показать, что каждое из трёх линейных пространств, порождённых $\{\text{Le}_{\vec{s}}(1/2)\}_{w(\vec{s})=w}$, $\{\text{Li}_{\vec{s}}(-1)\}_{w(\vec{s})=w}$ и $\{\text{Le}_{\vec{s}}(-1)\}_{w(\vec{s})=w}$, совпадает с $\mathcal{L}_w$. Если верна гипотеза 1, то $\mathcal{L}_w$ содержит и все значения знакопеременной кратной дзета-функции веса w .

Обозначим через $\mathbb{F}_w$ размерность $\mathcal{L}_w$ над $\mathbb{Q}$. Очевидно, $\mathbb{F}_1 = 1$. В разделе 7 было показано, что $\mathbb{F}_2 \leq 2$, $\mathbb{F}_3 \leq 3$ и $\mathbb{F}_4 \leq 5$. Более того, $\mathbb{F}_2 = 2$ в силу линейной независимости π^2 и $\ln^2 2$ над $\mathbb{Q}$, что следует из трансцендентности числа $\pi/\ln 2$. Действительно, предположим, что $\pi/\ln 2$ алгебраическое. Тогда число $\pi i/\ln 2$ алгебраическое, но не рациональное (потому что чисто мнимое).

Из теоремы Гельфонда следует, что число $2^{\pi i / \ln 2} = e^{\pi i} = -1$ трансцендентное, противоречие.

Гипотеза 3. При $w \geq 1$ выполнено $\mathbb{F}_w = f_w$, где $\{f_w\}$ — последовательность Фибоначчи, задаваемая рекуррентным соотношением $f_w = f_{w-2} + f_{w-1}$ и начальными значениями $f_0 = f_1 = 1$.

Обозначим через $\mathbb{F}_w^A$ размерность (над $\mathbb{Q}$) $\mathbb{Q}$ -линейного пространства, порождённого значениями знакопеременной кратной дзета-функции веса w . Так как это пространство содержит $\{\text{Li}_{\vec{s}}(-1)\}_{w(\vec{s})=w}$, то $\mathbb{F}_w^A \geq \mathbb{F}_w$. Если справедлива гипотеза 1, то $\mathbb{F}_w^A = \mathbb{F}_w$. В [14, (14)] было высказано предположение, что $\mathbb{F}_w^A = f_w$, а в [15] была доказана оценка $\mathbb{F}_w^A \leq f_w$ (и следовательно, $\mathbb{F}_w \leq f_w$).

По гипотезе 3 выполнено $\mathbb{F}_6 = 13$, однако есть всего 12 «классических» констант веса 6:

$$\begin{aligned} & \zeta(6), \quad \zeta(3)^2, \quad \zeta(5) \ln 2, \quad \zeta(2) \zeta(3) \ln 2, \quad \zeta(4) \ln^2 2, \quad \zeta(3) \ln^3 2, \quad \zeta(2) \ln^4 2, \\ & \ln^6 2, \quad \text{Li}_6\left(\frac{1}{2}\right), \quad \text{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) \ln 2, \quad \text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) \ln^2 2, \quad \text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) \zeta(2), \end{aligned}$$

участвующих в выражениях для значений обобщённых полилогарифмов и предположительно линейно независимых над $\mathbb{Q}$. Поэтому (гипотетически) существуют значения полилогарифмов веса 6, которые не являются рациональной линейной комбинацией этих 12 констант. Таким, по-видимому, является значение $\text{Le}_{5,1}(-1)$. В [17, раздел 7] указывается, что для значений $\text{Le}_{2n+1,1}(-1)$, $n \geq 2$ (в статье обозначаемых через $-\mu_n$), неизвестны их связи с классическими константами. Другим примером может служить значение $\text{Li}_{2,2,1,1}(1/2)$. В обоих случаях не удалось численно найти выражение через упомянутые выше 12 констант, однако удалось сделать это для комбинации $\text{Li}_{2,2,1,1}(1/2) + (9/4)\text{Le}_{5,1}(-1)$.

В [14] для веса 6 вместо $\text{Le}_{5,1}(-1)$ была предложена константа $\zeta(\bar{5}, \bar{1})$, а для веса 7 нужны две новые константы, например $\zeta(\bar{5}, 1, \bar{1})$ и $\zeta(3, 3, \bar{1})$. В [25] даются следующие константы:

$$\sum_{n_1 \geq n_2 \geq 1} \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{n_1^5 n_2}, \quad \sum_{n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1} \frac{(-1)^{n_1}}{n_1^5 n_2 n_3}, \quad \sum_{n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1} \frac{(-1)^{n_2+n_3}}{n_1^5 n_2 n_3}.$$

Числа f_w могут быть также определены с помощью производящей функции

$$\sum_{w=0}^{\infty} f_w x^w = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

Несложно показать (с помощью производящей функции или непосредственно), что $f_w = \text{Card}(\mathcal{B}_w)$, где

$$\mathcal{B}_w = \left\{ (s_1, s_2, \dots, s_l) : \sum_{j=1}^l s_j = w, \quad s_j \in \{1, 2\} \right\}.$$

Естественно выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 4. В качестве базиса $\mathcal{L}_w$ можно выбрать любое из следующих множеств чисел:

- 1) $\{\text{Li}_{\vec{s}}(1/2) : \vec{s} \in \mathcal{B}_w\}$;
- 2) $\{\text{Li}_{\vec{s}}(-1) : \vec{s} \in \mathcal{B}_w\}$;
- 3) $\{\text{Le}_{\vec{s}}(-1) : \vec{s} \in \mathcal{B}_w\}$.

Мы не включаем сюда вариант с функцией $\text{Le}_{\vec{s}}(z)$ в точке $z = 1/2$, так как он не подходит из-за равенства

$$5\text{Le}_{1,1,1}\left(\frac{1}{2}\right) = 6\text{Le}_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Как показывает следующее утверждение, два варианта 1) и 2) с $\text{Li}_{\vec{s}}(z)$ на самом деле равносильны.

Утверждение 1. Для любого натурального w линейные пространства над $\mathbb{Q}$, порождённые множествами чисел $\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$, $\vec{s} \in \mathcal{B}_w$, и $\text{Li}_{\vec{t}}(-1)$, $\vec{t} \in \mathcal{B}_w$, совпадают. В частности, из линейной независимости над $\mathbb{Q}$ чисел одного множества следует линейная независимость чисел другого множества.

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что при $\vec{s} \in \mathcal{B}_w$ функция $\text{Li}_{\vec{s}}(-z/(1-z))$ представляется в виде целочисленной линейной комбинации $\text{Li}_{\vec{t}}(z)$, $\vec{t} \in \mathcal{B}_w$. Для $z = -1$ и $z = 1/2$ тогда получим, что каждое число $\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$, $\vec{s} \in \mathcal{B}_w$, является целочисленной линейной комбинацией чисел $\text{Li}_{\vec{t}}(-1)$, $\vec{t} \in \mathcal{B}_w$, и наоборот, что и доказывает утверждение. $\square$

Далее мы рассмотрим вариант 1) с функцией $\text{Li}_{\vec{s}}(z)$ в точке $z = 1/2$. При этом разобьём гипотезу о базисе на две независимые гипотезы.

Гипотеза 5. Числа $\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$, $\vec{s} \in \mathcal{B}_w$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Гипотеза 6. При любом $\vec{s}_0$ веса w значение $\text{Li}_{\vec{s}_0}(1/2)$ является рациональной линейной комбинацией чисел $\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$, $\vec{s} \in \mathcal{B}_w$.

Из гипотезы 5 следует, что $\mathbb{F}_w \geq f_w$, а гипотеза 6 даёт неравенство $\mathbb{F}_w \leq f_w$. Гипотеза 5 справедлива по крайней мере для $w = 1$ и $w = 2$. Гипотезу 6 для $w \leq 5$ несложно проверить с помощью таблиц, данных в приложении. Для $w \leq 9$ эта гипотеза была проверена численно с помощью PSLQ, т. е. были найдены требуемые выражения, выполняющиеся с большой точностью.

Заметим аналогию с размерностью $\mathbb{D}_w$ пространства, порождённого значениями кратной дзета-функции $\zeta(s_1, \dots, s_l)$ веса w . Д. Загир ([27]) предположил следующее.

Гипотеза 7. При $w \geq 2$ выполнено $\mathbb{D}_w = d_w$, где последовательность $\{d_w\}$ задаётся рекуррентным соотношением $d_w = d_{w-3} + d_{w-2}$ и начальными значениями $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$.

Числа d_w могут быть определены с помощью производящей функции

$$\sum_{w=0}^{\infty} d_w x^w = \frac{1}{1 - x^2 - x^3}.$$

В [15, 24] доказывается неравенство $\mathbb{D}_w \leq d_w$. Нетривиальных доказанных оценок снизу на $\mathbb{D}_w$ нет (тривиальной оценкой здесь мы называем $\mathbb{D}_w \geq 1$).

М. Хоффман [18] выдвинул следующую согласованную гипотезу.

Гипотеза 8. В качестве базиса $\mathbb{Q}$ -линейного пространства, порождённого значениями $\zeta(\vec{s})$ веса w можно выбрать числа $\zeta(t_1, t_2, \dots, t_l)$, где $\sum_{j=1}^l t_j = w$ и $t_j \in \{2, 3\}$.

Х. Н. Мин проверил, что для любого вектора $\vec{s}_0$ веса не больше 16 значение $\zeta(\vec{s}_0)$ является рациональной линейной комбинацией значений кратных дзета-функций из предполагаемого базиса.

Если $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$, то $\text{Li}_{\vec{s}}(-1) = \zeta(\vec{s}_1, s_2, \dots, s_l)$. Следовательно, если справедливы гипотезы 1, 5 и 6, то справедлива и следующая гипотеза.

Гипотеза 9. В качестве базиса $\mathbb{Q}$ -линейного пространства, порождённого значениями знакопеременной кратной дзета-функции $\zeta(\vec{s}; \vec{\sigma})$ веса w можно выбрать числа $\zeta(\vec{t}_1, t_2, \dots, t_l)$, где $\sum_{j=1}^l t_j = w$ и $t_j \in \{1, 2\}$.

В заключение отметим результат В. Н. Сорокина [5] о линейной независимости над $\mathbb{Q}$ значений обобщённых полилогарифмов в рациональных точках $\alpha = p/q \neq 0$, находящихся около нуля. А именно, обобщённые полилогарифмы $\text{Li}_{\vec{s}}(z)$ веса $w(\vec{s}) \leq r$ линейно независимы в точке p/q , где $|p/q| < (2pe^r)^{-N_r}$, $N_r = 2^r - 1$.

Автор выражает благодарность Д. М. Брэдли за консультации по теме данной статьи, П. Лайсонеку за предоставленный исходный код вычисления значений обобщённых полилогарифмов, а также Дж. Сондоу за ряд предложений по улучшению статьи.

Приложение

В следующих таблицах даны все значения обобщённых полилогарифмов веса не больше 5 в точках $z = 1/2$ и $z = -1$. Эти значения были найдены в разделе 7 и не опираются на какие-либо гипотезы.

Значения веса 2 в форме $A\zeta(2) + B\ln^2 2$
(в таблице отражён вектор (A, B))

$\vec{s}$	$\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$	$\text{Le}_{\vec{s}}(1/2)$	$\text{Li}_{\vec{s}}(-1)$	$\text{Le}_{\vec{s}}(-1)$
2	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(-\frac{1}{2}, 0)$
1,1	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Значения веса 3 в форме $A\zeta(3) + B\zeta(2)\ln 2 + C\ln^3 2$
(в таблице отражён вектор (A, B, C))

$\vec{s}$	$\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$	$\text{Le}_{\vec{s}}(1/2)$	$\text{Li}_{\vec{s}}(-1)$	$\text{Le}_{\vec{s}}(-1)$
3	$(\frac{7}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$	$(\frac{7}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$	$(-\frac{3}{4}, 0, 0)$	$(-\frac{3}{4}, 0, 0)$
2,1	$(\frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{6})$	$(1, -\frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{8}, 0, 0)$	$(-\frac{5}{8}, 0, 0)$
1,2	$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$	$(\frac{5}{8}, 0, 0)$	$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$	$(-1, \frac{1}{2}, 0)$
1,1,1	$(0, 0, \frac{1}{6})$	$(\frac{3}{4}, 0, 0)$	$(0, 0, -\frac{1}{6})$	$(-\frac{7}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$

Значения веса 4 в форме
 $A\zeta(4) + B\zeta(3)\ln 2 + C\zeta(2)\ln^2 2 + D\ln^4 2 + E\text{Li}_4(1/2)$
(в таблице отражён вектор (A, B, C, D, E))

$\vec{s}$	$\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$	$\text{Le}_{\vec{s}}(1/2)$	$\text{Li}_{\vec{s}}(-1)$	$\text{Le}_{\vec{s}}(-1)$
4	$(0, 0, 0, 0, 1)$	$(0, 0, 0, 0, 1)$	$(-\frac{7}{8}, 0, 0, 0, 0)$	$(-\frac{7}{8}, 0, 0, 0, 0)$
3,1	$(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{24}, 0)$	$(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{24}, 1)$	$(-\frac{15}{8}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, 2)$	$(-\frac{11}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, 2)$
2,2	$(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{24}, 0)$	$(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{24}, 1)$	$(\frac{65}{16}, -\frac{7}{2}, 1, -\frac{1}{6}, -4)$	$(\frac{51}{16}, -\frac{7}{2}, 1, -\frac{1}{6}, -4)$
1,3	$(-\frac{5}{16}, \frac{7}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{24}, 0)$	$(-\frac{5}{16}, \frac{7}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{24}, 1)$	$(-\frac{5}{16}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0)$	$(-\frac{19}{16}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0)$
2,1,1	$(1, -\frac{7}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, -1)$	$(\frac{19}{16}, -\frac{3}{4}, 0, 0, 0)$	$(-1, \frac{7}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{24}, 1)$	$(\frac{5}{16}, -\frac{7}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{24}, -1)$
1,2,1	$(-3, \frac{11}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{12}, 3)$	$(-\frac{51}{16}, \frac{7}{2}, -1, \frac{1}{6}, 4)$	$(3, -\frac{11}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{8}, -3)$	$(-\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{24}, -1)$
1,1,2	$(3, -\frac{23}{8}, 1, -\frac{1}{6}, -3)$	$(\frac{11}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, -2)$	$(-3, \frac{23}{8}, -1, \frac{1}{8}, 3)$	$(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{24}, -1)$
1,1,1,1	$(0, 0, 0, \frac{1}{24}, 0)$	$(\frac{7}{8}, 0, 0, 0, 0)$	$(0, 0, 0, \frac{1}{24}, 0)$	$(0, 0, 0, 0, -1)$

Значения веса 5 в форме
 $A\zeta(5) + B\zeta(2)\zeta(3) + C\zeta(4)\ln 2 + D\zeta(3)\ln^2 2 +$
 $+ E\zeta(2)\ln^3 2 + F\ln^5 2 + G\text{Li}_5(1/2) + H\text{Li}_4(1/2)\ln 2$
(в таблицах отражён вектор (A, B, C, D, E, F, G, H))

$\vec{s}$	$\text{Li}_{\vec{s}}(1/2)$	$\text{Le}_{\vec{s}}(1/2)$
5	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$
4,1	$(\frac{1}{32}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{40}, 1, 1)$	$(\frac{1}{32}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{40}, 2, 1)$
3,2	$(\frac{23}{64}, \frac{23}{16}, -\frac{1}{16}, -\frac{23}{16}, \frac{7}{12}, -\frac{13}{120}, -3, -3)$	$(\frac{23}{64}, \frac{23}{16}, -\frac{1}{16}, -\frac{23}{16}, \frac{7}{12}, -\frac{13}{120}, -2, -3)$
3,1,1	$(\frac{63}{32}, -\frac{1}{2}, -1, \frac{7}{16}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{60}, -1, 0)$	$(\frac{151}{64}, \frac{7}{16}, -\frac{19}{16}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{15}, -2, -2)$
2,3	$(-\frac{81}{64}, -\frac{7}{8}, \frac{5}{16}, \frac{7}{8}, -\frac{5}{12}, \frac{11}{120}, 3, 3)$	$(-\frac{81}{64}, -\frac{7}{8}, \frac{5}{16}, \frac{7}{8}, -\frac{5}{12}, \frac{11}{120}, 4, 3)$

2,2,1	$(-\frac{375}{64}, \frac{3}{2}, 3, -\frac{11}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{60}, 3, 0)$	$(-\frac{227}{32}, \frac{1}{8}, \frac{51}{16}, 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{10}, 8, 4)$
2,1,2	$(\frac{369}{64}, -\frac{23}{16}, -3, \frac{23}{16}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{30}, -3, 0)$	$(\frac{311}{64}, -\frac{7}{8}, -\frac{11}{4}, \frac{7}{8}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{60}, -2, 0)$
2,1,1,1	$(1, 0, 0, -\frac{7}{16}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, -1, -1)$	$(2, -\frac{3}{8}, -\frac{7}{8}, 0, 0, 0, 0, 0)$
1,4	$(\frac{27}{32}, \frac{7}{16}, 0, -\frac{7}{16}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{30}, -2, -1)$	$(\frac{27}{32}, \frac{7}{16}, 0, -\frac{7}{16}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{30}, -1, -1)$
1,3,1	$(-\frac{3}{64}, 0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, 0, \frac{1}{120}, 0, 0)$	$(\frac{53}{64}, -\frac{1}{16}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
1,2,2	$(\frac{3}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{120}, 0, 0)$	$(\frac{89}{64}, \frac{7}{4}, 0, -\frac{7}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{15}, -4, -4)$
1,2,1,1	$(-4, 0, 1, \frac{7}{8}, -\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, 4, 3)$	$(-\frac{21}{32}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
1,1,3	$(-\frac{3}{64}, \frac{1}{16}, -\frac{5}{16}, \frac{7}{16}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{120}, 0, 0)$	$(-\frac{15}{32}, -\frac{3}{8}, 0, \frac{7}{8}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, 2, 2)$
1,1,2,1	$(6, 0, -3, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{12}, -6, -3)$	$(-\frac{11}{32}, \frac{5}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
1,1,1,2	$(-4, 0, 3, -1, \frac{1}{6}, 0, 4, 1)$	$(\frac{59}{32}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
1,1,1,1,1	$(0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{120}, 0, 0)$	$(\frac{15}{16}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
$\vec{s}$	$\text{Li}_{\vec{s}}(-1)$	$\text{Le}_{\vec{s}}(-1)$
5	$(-\frac{15}{16}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$(-\frac{15}{16}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
4,1	$(-\frac{29}{32}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$(-\frac{59}{32}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
3,2	$(\frac{41}{32}, -\frac{5}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$(\frac{11}{32}, -\frac{5}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
3,1,1	$(\frac{33}{32}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{7}{8}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{15}, -2, -2)$	$(\frac{15}{32}, \frac{3}{8}, 0, -\frac{7}{8}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{15}, -2, -2)$
2,3	$(\frac{51}{32}, -\frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$(\frac{21}{32}, -\frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
2,2,1	$(-\frac{73}{64}, -\frac{3}{2}, 0, \frac{7}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{15}, 4, 4)$	$(-\frac{89}{64}, -\frac{7}{4}, 0, \frac{7}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{15}, 4, 4)$
2,1,2	$(-\frac{177}{64}, \frac{23}{16}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$(-\frac{53}{64}, \frac{1}{16}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
2,1,1,1	$(1, 0, 0, -\frac{7}{16}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{30}, -1, -1)$	$(-\frac{27}{32}, -\frac{7}{16}, 0, \frac{7}{16}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, 1, 1)$
1,4	$(-\frac{17}{16}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, 0, 0, 0, 0, 0)$	$(-2, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, 0, 0, 0, 0, 0)$
1,3,1	$(-\frac{125}{64}, 0, \frac{15}{8}, -\frac{7}{8}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{60}, 2, 0)$	$(-\frac{311}{64}, \frac{7}{8}, \frac{11}{4}, -\frac{7}{8}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{60}, 2, 0)$
1,2,2	$(\frac{125}{16}, \frac{1}{8}, -\frac{65}{16}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{10}, -8, -4)$	$(\frac{227}{32}, -\frac{1}{8}, -\frac{51}{16}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{10}, -8, -4)$
1,2,1,1	$(-4, 0, 1, \frac{7}{8}, -\frac{5}{12}, \frac{11}{120}, 4, 3)$	$(\frac{81}{64}, \frac{7}{8}, -\frac{5}{16}, -\frac{7}{8}, \frac{5}{12}, -\frac{11}{120}, -4, -3)$
1,1,3	$(-\frac{125}{64}, -\frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, 2, 2)$	$(-\frac{151}{64}, -\frac{7}{16}, \frac{19}{16}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, 2, 2)$
1,1,2,1	$(6, 0, -3, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{40}, -6, -3)$	$(-\frac{23}{64}, -\frac{23}{16}, \frac{1}{16}, \frac{23}{16}, -\frac{7}{12}, \frac{13}{120}, 2, 3)$
1,1,1,2	$(-4, 0, 3, -1, \frac{1}{6}, \frac{1}{120}, 4, 1)$	$(-\frac{1}{32}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{40}, -2, -1)$
1,1,1,1,1	$(0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{120}, 0, 0)$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0)$

Литература

- [1] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Физматгиз, 1965.
- [2] Злобин С. А. Разложения кратных интегралов в линейные формы // Мат. заметки. — 2005. — Т. 77, вып. 5. — С. 683—706.
- [3] Злобин С. А., Сондоу Дж. Интегралы по многогранникам, кратные дзета значения и полилогарифмы, и константа Эйлера // Мат. заметки. — 2008. — Т. 84, вып. 4. — С. 609—626.
- [4] Зудилин В. В. Алгебраические соотношения для кратных дзета-значений // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, № 1. — С. 3—32.
- [5] Сорокин В. Н. О линейной независимости значений обобщённых полилогарифмов // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 8. — С. 139—154.
- [6] Уланский Е. А. Тождества для обобщённых полилогарифмов // Мат. заметки. — 2003. — Т. 73, вып. 4. — С. 613—624.
- [7] Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — New York: Dover, 1972.
- [8] Berndt B. Ramanujan's Notebooks. Part 1. — Berlin: Springer, 1989.
- [9] Bigotte M., Jacob G., Hoang Ngoc Minh, Oussous N. E., Petitot M. Algèbre des nombres d'Euler—Zagier, calculs effectifs et conjectures: preprint. — Lille, 1999; <http://www2.lifl.fr/~ejc2002/local/polylogs.ps>.
- [10] Borwein J. M., Bradley D. M., Broadhurst D. J. Evaluations of k -fold Euler/Zagier sums: A compendium of results for arbitrary k // Electron. J. Combin. — 1997. — Vol. 4, no. 2. — Research Paper 5.
- [11] Borwein J. M., Bradley D. M., Broadhurst D. J., Lisoněk P. Special values of multiple polylogarithms // Trans. Am. Math. Soc. — 2001. — Vol. 353, no. 3. — P. 907—941.
- [12] Bowman D., Bradley D. M. Resolution of some open problems concerning multiple zeta evaluations of arbitrary depth // Compositio Math. — 2003. — Vol. 139, no. 1. — P. 85—100.
- [13] Broadhurst D. J. Conjectured enumeration of irreducible multiple zeta values, from knots and Feynman diagrams. — 1996. — [arXiv:hep-th/9612012](https://arxiv.org/abs/hep-th/9612012).
- [14] Broadhurst D. J. On the enumeration of irreducible k -fold Euler sums and their roles in knot theory and field theory. — 1996. — [arXiv:hep-th/9604128](https://arxiv.org/abs/hep-th/9604128).
- [15] Deligne P., Goncharov A. B. Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 2005. — Vol. 38, no. 1. — P. 1—56.
- [16] Ferguson H. R. P., Bailey D. H., Arno S. Analysis of PSLQ, an integer relation finding algorithm // Math. Comp. — 1999. — Vol. 68. — P. 351—369.
- [17] Flajolet P., Salvy B. Euler sums and contour integral representations // Experiment. Math. — 1998. — Vol. 7, no. 1. — P. 15—35.
- [18] Hoffman M. E. The algebra of multiple harmonic series // J. Algebra. — 1997. — Vol. 194, no. 2. — P. 477—495.
- [19] Lewin L. Polylogarithms and Associated Functions. — New York: North-Holland, 1981.
- [20] <http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html>.
- [21] Hoang Ngoc Minh, Petitot M. Lyndon words, polylogarithms and the Riemann ζ function // Discrete Math. — 2000. — Vol. 217, no. 1-3. — P. 273—292.

- [22] Hoang Ngoc Minh, Petitot M., van der Hoeven J. L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices. — 1999. — <http://www.lifl.fr/~petitot/publis/fpsac99.ps>.
- [23] Nielsen N. Handbuch der Theorie der Gammafunktion. — New York: Chelsea, 1965.
- [24] Terasoma T. Mixed Tate motives and multiple zeta values // Invent. Math. — 2002. — Vol. 149. — P. 339—369; [arXiv:math.AG/0104231](#).
- [25] Vermaseren J. A. M. Harmonic sums, Mellin transforms and Integrals // Internat. J. Modern Phys. A. — 1999. — Vol. 14. — P. 2037—2076; [arXiv:hep-ph/9806280](#).
- [26] Waldschmidt M. Multiple polylogarithms: an introduction // Number Theory and Discrete Mathematics, Proc. of the Int. Conf. in Honour of Srinivasa Ramanujan, Chandigarh, 2000 / A. K. Agarwal et al., eds. — Basel: Birkhäuser, 2002. — P. 1—12.
- [27] Zagier D. Values of zeta functions and their applications // First European Congress of Mathematics (Paris, 1992). Vol. II / A. Joseph et al., eds. — Boston: Birkhäuser, 1994. — (Progress Math.; Vol. 120). — P. 497—512.

