О дифференцировании гипергеометрической функции по параметру*

П. Л. ИВАНКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: ivankoovpl@mail.ru

УДК 511.4

Ключевые слова: гипергеометрические функции, оценки линейных форм, эффективные конструкции.

Аннотация

Получены новые оценки снизу для линейных форм с целыми коэффициентами от значений некоторых гипергеометрических функций.

Abstract

P. L. Ivankov, On the differentiation of a hypergeometric function with respect to the parameter, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 91—94.

A new lower bound for integer-valued linear forms of values of certain hypergeometric functions is established.

Пусть

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi_\lambda(z)}{\partial \lambda} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu \left(\frac{1}{\lambda+1} + \ldots + \frac{1}{\lambda+\nu} \right) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}, \tag{2}$$

где λ — дробное рациональное число. Функции (1) и (2) удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$y_0' = \left(1 - \frac{\lambda}{z}\right) y_0 + \frac{\lambda}{z}, \quad y_1' = \left(1 - \frac{\lambda}{z}\right) y_1 - \frac{1}{z} y_0 + \frac{1}{z}. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть ξ — ненулевое рациональное число, h_0, h_1, h_2 — нетривиальный набор целых чисел, и пусть*

$$H = \max(3, |h_1|, |h_2|).$$

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006—2007 гг.)», проект РНП 2.1.1.2381.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 91—94.

Тогда выполняется неравенство

$$\left|h_0 + h_1\varphi_\lambda(\xi) + h_2\frac{\partial\varphi_\lambda(\xi)}{\partial\lambda}\right| > H^{-2-\frac{\gamma}{\ln\ln H}},$$

где положительная постоянная γ зависит от λ и ξ.

Ранее арифметические свойства значений функций (1) и (2) рассматривались в работах [1, 5]. Доказательство сформулированной теоремы опирается на эффективную конструкцию функциональной приближающей формы, имеющей при $z = 0$ максимально возможный порядок нуля. Пусть

$$R(z) = P_0(z) + P_1(z)\varphi_\lambda(z) + P_2(z)\frac{\partial\varphi_\lambda(z)}{\partial\lambda}, \tag{4}$$

где

$$P_j(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{js}z^s, \quad j = 0, 1, 2, \text{ —} \tag{5}$$

многочлены степени n с неопределёнными коэффициентами. Если

$$R(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu z^\nu,$$

то при $\nu \geqslant n+1$

$$v_\nu = \sum_{s=0}^{n} p_{1s}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{\lambda+x} - \sum_{s=0}^{n} p_{2s}\left(\frac{1}{\lambda+1} + \ldots + \frac{1}{\lambda+\nu-s}\right)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{\lambda+x}. \tag{6}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию (построенную по аналогии с соответствующей функцией статьи [3]):

$$\Phi(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{\zeta+x}\cdot\frac{\prod_{x=1}^{3n+1}(\zeta+x)}{\prod_{s=0}^{n}(\zeta-\lambda+s)^2}\,d\zeta, \tag{7}$$

где ν — неотрицательное целое число, а Γ — положительно ориентированная окружность радиуса $2n$ с центром в начале координат. Если $n+1 \leqslant \nu \leqslant 3n+1$, то степень числителя подынтегральной функции по крайней мере на две единицы меньше степени знаменателя, а все полюсы (при достаточно большом n) лежат внутри контура интегрирования. Следовательно,

$$\Phi(\nu) = 0, \quad n+1 \leqslant \nu \leqslant 3n+1. \tag{8}$$

При $\nu = 3n+2$ значение функции $\Phi(\nu)$ равно умноженному на -1 вычету подынтегральной функции из правой части (7) в точке $\zeta = -3n-2$, т. е.

$$\Phi(3n+2) = -\frac{1}{\prod_{s=0}^{n}(-3n-2-\lambda+s)^2} \neq 0. \tag{9}$$

Применив теорему о вычетах, получим

$$\Phi(\nu) = \sum_{s=0}^{n} \frac{d}{d\zeta}\left(\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{\zeta+x}\cdot\frac{\prod\limits_{x=1}^{3n+1}(\zeta+x)}{\prod\limits_{\sigma=0,\,\sigma\neq s}^{n}(\zeta-\lambda+\sigma)^2}\right)_{\zeta=\lambda-s} =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} A_s \prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{\lambda+x} - \sum_{s=0}^{n} B_s\left(\frac{1}{\lambda+1}+\ldots+\frac{1}{\lambda+\nu-s}\right)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{\lambda+x},$$

где

$$A_s = \prod_{x=0}^{s-1}\frac{1}{\lambda-x}\left(\left(\frac{\prod\limits_{x=1}^{3n+1}(\zeta+x)}{\prod\limits_{\sigma=0,\,\sigma\neq s}^{n}(\zeta-\lambda+\sigma)^2}\right)'_{\zeta=\lambda-s} - \sum_{\tau=0}^{s-1}\frac{1}{\lambda-\tau}\cdot\frac{\prod\limits_{x=1}^{3n+1}(\lambda-s+x)}{\prod\limits_{\sigma=0,\,\sigma\neq s}^{n}(\sigma-s)^2}\right),$$

$$B_s = \frac{\prod\limits_{x=1}^{3n-s+1}(\lambda+x)}{\prod\limits_{\sigma=0,\,\sigma\neq s}^{n}(\sigma-s)^2}.$$

Мы видим, что если в (6) положить

$$p_{1s} = A_s, \quad p_{2s} = B_s,$$

то при $\nu \geqslant n+1$ получим, что $v_\nu = \Phi(\nu)$. С учётом (8) и (9) получаем отсюда, что если при этом

$$P_0(z) = -\sum_{\nu=0}^{n} v_\nu z^\nu,$$

то форма (4) будет отлична от тождественного нуля и будет иметь при $z=0$ порядок нуля, равный $3n+2$. Построение функциональной приближающей формы на этом заканчивается.

Осталось оценить модули и наименьший общий знаменатель коэффициентов многочленов (5). Несложная вычислительная процедура приводит к следующим результатам. Модули оцениваются сверху величиной $e^{\gamma_1 n}n^n$, а оценкой наименьшего общего знаменателя служит $e^{\gamma_1 n}$, где положительная постоянная γ_1 зависит лишь от λ. Для получения оценки наименьшего общего знаменателя коэффициентов p_{2s} можно применить лемму 2 книги [4, с. 194], а для коэффициентов p_{0s} и p_{1s} используются также леммы 3 и 4 статьи [2]. При этом существенным обстоятельством является рациональность числа λ.

Дальнейшие рассуждения носят стандартный характер. Функции $\varphi_\lambda(z)$ и $\frac{\partial\varphi_\lambda(z)}{\partial\lambda}$ линейно независимы над полем рациональных дробей (см. [1, 5]) и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (3). Поэтому в данном случае применимы рассуждения из § 10, 11 главы 5 книги [4]. Эти рассуждения позволяют, опираясь на приведённое выше построение функциональной формы $R(z)$, получить следующий результат.

Если $\xi \neq 0$ — рациональное число, то существуют числовые линейные формы

$$l_k = a_{k0} + a_{k1}\varphi_\lambda(\xi) + a_{k2}\frac{\partial\varphi_\lambda(\xi)}{\partial\lambda}, \quad k = 0, 1, 2,$$

с целыми коэффициентами, по модулю не превосходящими $e^{\gamma_2 n}n^n$ и такими, что определитель $|a_{kj}|_{k,j=0,1,2}$ отличен от нуля. При этом $|l_k| \leqslant e^{\gamma_2 n}n^{-2n}$. Положительная постоянная γ_2 зависит от λ и ξ.

Из последнего утверждения рассматриваемая теорема выводится хорошо известным приёмом.

Литература

[1] Белогривов И. И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1967. — № 2. — С. 55—62.

[2] Иванков П. Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций // Мат. сб. — 1991. — Т. 182, № 2. — С. 283—302.

[3] Иванков П. Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с различными параметрами // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, вып. 6. — С. 25—31.

[4] Шидловский А. Б. Диофантовы приближения и трансцендентные числа. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

[5] Mahler K. Applications of a theorem by A. B. Shidlovski // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1968. — Vol. 305. — P. 149—173.