Методы получения оценок континуантов

И. Д. КАН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: igor.kan@list.ru

УДК 511.4

Ключевые слова: континуанты, цепные дроби.

Аннотация

В статье рассматриваются типичные множества континуантов, встречающиеся в приложениях. Для каждого из этих множеств решается задача нахождения минимума и максимума. Методы нахождения этих экстремумов выявляются и объединяются по группам. Так возникают различные методы: базовых перестановок, квадратичных иррациональностей, единичной вариации аргументов и мажорирующих неравенств. Из них только последний основан на существенно новых идеях, остальные частично рассматривались ранее.

Abstract

I. D. Kan, Methods for estimating of continuants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 95—108.

The paper is concerned with special sets of continuants occuring in applications. For each of these sets, the problem of finding the maximal and minimal continuants is solved. Methods of finding these extrema are singled out and grouped. This results in the methods of basic permutations, quadratic irrationalities, unit variation, and majorizing inequalities. The lasted named one is the only method involving new ideas, the remaining ones were already examined in parts.

1. Введение

Для целого $t \geqslant 0$ и натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_t$ континуант $K_t(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ индуктивно определён соотношениями $K_0() = 1$, $K_1(a_1) = a_1$,

$$K_{j+1}(a_1, a_2, \ldots, a_{j+1}) = \\ = a_{j+1}K_j(a_1, a_2, \ldots, a_j) + K_{j-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, t-1. \quad (1)$$

Для цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_t] = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots + 1/a_t)\ldots)$ известно (см., например, [1]) соотношение

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_t] = \frac{K_{t+1}(a_0, a_1, \ldots, a_t)}{K_t(a_1, a_2, \ldots, a_t)} \quad (2)$$

Цепная дробь от пустого множества аргументов считается равной нулю.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 95—108.

Часто рассматриваются задачи с континуантами, аргументы которых ограничены сверху некоторой величиной n (см., например, [2, 6—11]). В теоретико-числовых приложениях (см., например, [9]) встречаются ограничения вида

$$a_1, a_2, \dots, a_t = S, \quad \frac{S}{t} \ll \mathrm{const}.$$

Такие типы ограничений порождают соответствующие множества континуантов, для которых ставится задача нахождения их минимумов и максимумов. Эта тема была частично затронута в [3, 4, 12] и получила своё развитие в настоящей работе.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Н. Г. Мощевитину за постановку задач настоящего исследования.

2. Обозначения и параметры

Для произвольных $a, b \in \mathbb{N}_0$ положим

$$a^{\langle b\rangle} = \begin{cases} \{\underbrace{a, a, \dots, a}_{b\ \text{чисел}}\}, & \text{если}\quad b \geqslant 1,\\ \varnothing, & \text{если}\quad b = 0.\end{cases}$$

Для любого количества конечных последовательностей $A_1, A_2, \dots, A_k$ через $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ обозначим последовательность, образованную всеми записанными подряд друг за другом элементами последовательностей $A_1, A_2, \dots, A_k$. Для f натуральных чисел $h_1 < h_2 < \dots < h_f$ и для их кратностей $p_1, p_2, \dots, p_f \geqslant 1$ определим множество

$$W_f = W_f(\bar{h}, \bar{p}) = \bigl\{(a_1, a_2, \dots, a_t)\colon a_i \in \{h_1, h_2, \dots, h_f\},\ \sharp\{i\colon a_i = h_j\} = p_j\}\bigr\},$$

где $t = p_1 + \dots + p_f$. Для произвольного разбиения каждого из чисел $p_1, \dots, p_f$ на сумму

$$p_j = l_j + r_j \tag{3}$$

двух неотрицательных слагаемых l_j и r_j положим

$$D_f = D_f(\bar{l}, \bar{r}) = \Bigl\{h_f^{\langle l_f\rangle}, h_{f-1}^{\langle l_{f-1}\rangle}, \dots, h_2^{\langle l_2\rangle}, h_1^{\langle l_1\rangle}, h_1^{\langle r_1\rangle}, h_2^{\langle r_2\rangle}, \dots, h_f^{\langle r_f\rangle}\Bigr\}.$$

Положим также

$$V_f = V_f(\bar{h}, \bar{p}) = \{(a_1, a_2, \dots, a_t) \in W_f(\bar{h}, \bar{p})\colon a_1 = h_1\}.$$

Кроме того, для произвольных $S, t, n \in \mathbb{N}$ положим

$$U(S, t, n) = \{(a_1, a_2, \dots, a_t)\colon a_i \in \{1, 2, \dots, n\},\ a_1 + a_2 + \dots + a_t = S\},$$
$$U_n(S) = \bigcup_t U(S, t, n), \quad U(S, t) = \bigcup_n U(S, t, n).$$

Через $[\xi]$ и $\{\xi\}$ обозначаются соответственно целая и дробная части числа $\xi \in \mathbb{R}$.

Выделим из множества $W_f(\bar{h}, \bar{p})$ две монотонные последовательности

$$b_0 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_{t-1}, \quad c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_t. \tag{4}$$

При этом для $j = 0, 1, \ldots, t$ и $\nu = 1, 2, \ldots, 2[t/2]$ положим

$$n_j = \begin{cases} b_j, & \text{если} \quad j \equiv 0 \pmod 2, \\ c_j, & \text{если} \quad j \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \qquad m_\nu = \begin{cases} c_\nu, & \text{если} \quad \nu \equiv 0 \pmod 2, \\ b_\nu, & \text{если} \quad \nu \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Для $m \in \mathbb{N}_0$ положим $m_- = [m/2]$, $m_+ = m - m_-$. Для $x \in \mathbb{Z}$, $n, z \in \mathbb{N}$ положим, кроме того,

$$N_z(x) = \begin{cases} \left\{n^{\langle x \rangle}\right\}, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ \left\{1^{\langle -1-x \rangle}, z, 1\right\}, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$T_z(m, x) = K_{2m+x+1}\Big(\underbrace{1, n, 1, n, \ldots, 1, n}_{2m_+ \text{ чисел}}, N_z(x), \underbrace{n, 1, n, 1 \ldots, n, 1}_{2m_- \text{ чисел}}\Big). \tag{6}$$

Для $S, n \in \mathbb{N}$ положим

$$S_0^{(n)} = \max\left\{1,\ (n+1)\left\{\frac{S}{n+1}\right\}\right\}, \quad S_1^{(n)} = n\left\{\frac{S}{n}\right\} + \min\{1,\ z-1\}. \tag{7}$$

Подмножество $P(S)$ интервала целых чисел $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ определим равенством

$$P(S) = \begin{cases} \{1, 2, \ldots, n-1\}, & \text{если} \quad S \geqslant n^2 - 1, \\ \left\{S_0^{(n)}, S_0^{(n)}, \ldots, S_1^{(n)}\right\}, & \text{если} \quad S < n^2 - 1 \\ & \text{и } S_0^{(n)} \leqslant S_1^{(n)}, \\ \left\{1, 2, \ldots, S_1^{(n)}\right\} \cup \left\{S_0^{(n)}, S_0^{(n)} + 1, \ldots, n-1\right\} & \text{иначе.} \end{cases} \tag{8}$$

3. Основные результаты

Теорема 1 [10]. *Максимальный континуант на множестве $V_f(\bar{h}, \bar{p})$ может быть найден по формуле*

$$\max_{V_f} K_t(a_1, a_2, \ldots, a_t) = K_t(b_0, b_1, \ldots, b_{t-1}). \tag{9}$$

Теорема 2. *Максимальный континуант на множестве $W_f(\bar{h}, \bar{p})$ может быть найден по формуле*

$$\max_{W_f} K_t(a_1, a_2, \ldots, a_t) = K_t\big(D_f(\bar{l}, \bar{r})\big), \tag{10}$$

где числа l_j и r_j ($j = 1, 2, \ldots, f$) из (3) подчинены условию

$$1 = \begin{cases} l_j, & \text{если} \quad j \equiv f \pmod 2, \\ r_j, & \text{если} \quad j \equiv f - 1 \pmod 2. \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 3. *Минимальный континуант на множестве $W_f(\bar{h},\bar{p})$ может быть найден по формуле*

$$\min_{W_f} K_t(a_1,a_2,\ldots,a_t)=K_t\bigl(n_0,n_1,\ldots,n_\varphi,b_{t_-}^{\langle t_+-t_-\rangle},m_\mu,m_{\mu-1},\ldots,m_2,m_1\bigr), \quad (12)$$

где $\varphi=2[(t+2)/4]-1$, $\mu=2[t/2]$.

Теорема 4. *Максимальный континуант на множестве $U_n(S)$ может быть найден по формуле*

$$\max_{U_n(S)} K_t(a_1,\ldots,a_t)=K_S\Bigl(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{S\ \text{чисел}}\Bigr).$$

Теорема 5. *При $2\leqslant t\leqslant S<nt$ максимальный континуант на множестве $U(S,t)$ может быть найден по формуле*

$$\max_{U(S,t)} K_t(a_1,\ldots,a_t)=\begin{cases}K_t\bigl(h_1^{\langle t\rangle}\bigr), & \text{если}\ \ S\equiv 0 \pmod t,\\ K_t\bigl(h_2,h_1^{\langle c\rangle},h_2^{\langle d-1\rangle}\bigr) & \text{в противном случае,}\end{cases} \quad (13)$$

где

$$h_1=\left[\frac{S}{t}\right],\quad h_2=h_1+1,\quad c=t\left\{-\frac{S}{t}\right\},\quad d=t\left\{\frac{S}{t}\right\}. \quad (14)$$

Теорема 6. *При $2\leqslant t\leqslant S$ минимальный континуант на множестве $U(S,n,t)$ может быть найден по формуле*

$$\min_{U(S,n,t)} K_t(a_1,a_2,\ldots,a_t)=T_z(m,x), \quad (15)$$

где

$$z\in\{1,2,\ldots,n-1\},\quad z\equiv S-t-1 \pmod{n-1}, \quad (16)$$

$$x=1-t+\frac{2(S-t+1-z)}{n-1},\quad m=t-|x|-1. \quad (17)$$

Теорема 7. *При $n\geqslant 2$, $S\geqslant 2n+2$ минимальный континуант на множестве $U_n(S)$ может быть найден по формуле*

$$\min_{U_n(S)} K_t(a_1,\ldots,a_t)=\min_{z\in P(S)} T_z(m,x), \quad (18)$$

где

$$0\leqslant x\leqslant n,\quad x\equiv z-S \pmod{n+1},\quad m=\frac{S-z-nx}{n+1}, \quad (19)$$

$$P^*(S)=\{z\in P(S)\colon m(z)\geqslant 1\}. \quad (20)$$

Следствие 1. *При $2\leqslant n\leqslant S-2$ имеет место оценка*

$$\min_{U_n(S)} K_t(a_1,\ldots,a_t)\geqslant\frac{1}{e^2}\bigl(\sqrt[n+1]{\mu_n}\bigr)^{S-n+1}, \quad (21)$$

где

$$\mu_n=\frac{n+2+\sqrt{n^2+4n}}{2}. \quad (22)$$

Замечание 1. В работе [2] для минимума из следствия 1 при $n = 4$ дана нижняя оценка в виде $\left(\sqrt{2+10^{-6}}\right)^S$, в то время как формула (21) даёт величины порядка $\left(\sqrt[5]{3+\sqrt{8}}\right)^S$. Для больших S (точнее, для $S \geqslant 350$) эта оценка более точная, поскольку

$$\sqrt[5]{3+\sqrt{8}} = 1{,}424\ldots > 1{,}414\ldots = \sqrt{2+10^{-6}}.$$

4. Вспомогательные утверждения

4.1. Метод базовых перестановок

Рассмотрим неравенство

$$K_{\alpha+\beta+\gamma}(u_1, u_2, \ldots, u_\alpha, v_1, v_2, \ldots, v_\beta, w_1, w_2, \ldots, w_\gamma) \leqslant \\ \leqslant K_{\alpha+\beta+\gamma}(u_1, u_2, \ldots, u_\alpha, v_\beta, v_{\beta-1}, \ldots, v_2, v_1, w_1, w_2, \ldots, w_\gamma). \quad (23)$$

Лемма 1А [12]. *При $v_1 \neq v_\beta$, $u_\alpha \neq w_1$ неравенство* (23) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$(v_1 - v_2)(u_\alpha - w_1) < 0. \quad (24)$$

Положим

$$[\bar{U}] = [0; u_\alpha, u_{\alpha-1}, \ldots, u_2, u_1], \quad [\bar{W}] = [0; u_\alpha, w_1, w_2, \ldots, w_\gamma]. \quad (25)$$

Чтобы использовать лемму 1А при $[\bar{U}] = 0$ или $[\bar{W}] = 0$, удобно в этих случаях формально положить $u_\alpha = +\infty$ или $w = +\infty$. Добавленные бесконечности не меняют, по определению, значений континуанта или цепной дроби от совокупности остальных аргументов, но могут участвовать в неравенстве (24).

Лемма 1В [3]. *При $v_1 \neq v_\beta$ неравенство* (23) *выполнено тогда и только тогда, когда выполнена одна из двух следующих групп условий: либо*

$$v_1 > v_\beta, \quad [\bar{U}] \geqslant [\bar{W}],$$

либо

$$v_1 < v_\beta, \quad (26)$$
$$[\bar{U}] \leqslant [\bar{W}]. \quad (27)$$

Кроме того, неравенство (23) *выполняется как равенство тогда и только тогда, когда $[\bar{U}] = [\bar{W}]$, где $[\bar{U}]$, $[\bar{W}]$ определены формулами* (25).

Определение 1. Пусть $\alpha + \beta + \gamma = t$,

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_t\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha, v_1, v_2, \ldots, v_\beta, w_1, w_2, \ldots, w_\gamma\}. \quad (28)$$

Пусть Π — перестановка на множестве индексов $\{1, 2, \ldots, t\}$, переводящая последовательность (28) в последовательность

$$\left\{a_{\Pi(1)}, a_{\Pi(2)}, \ldots, a_{\Pi(t)}\right\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha, v_\beta, v_{\beta-1}, \ldots, v_2, v_1, w_1, w_2, \ldots, w_\gamma\}. \tag{29}$$

Тогда назовём Π базовой перестановкой с серединой $(v_1, \ldots, v_\beta)$ или, кратко, $(\alpha+1, \alpha+\beta)$-перестановкой.

Простейшими свойствами континуантов (см., например, [12]), необходимыми для дальнейшего изложения, являются симметрия:

$$K_t(a_1, a_2, \ldots, a_t) = K_t(a_t, a_{t-1}, \ldots, a_2, a_1) \tag{30}$$

и отщепление единицы:

$$K_t(a_1+1, a_2, \ldots, a_t) = K_{t+1}(1, a_1, a_2, \ldots, a_t). \tag{31}$$

Определение 2. Базовую перестановку Π назовём тривиальной для последовательности (28), если равенство континуантов последовательностей (28) и (29) имеет место и может быть доказано путём применения равенств (30) и (возможно) (31).

Пример 1. Перестановка $\Pi : (2, 4, 5, 1, 1) \mapsto (2, 5, 4, 1, 1)$ тривиальна, поскольку ввиду (30) и (31)

$$K_5(2, 4, 5, 1, 1) = K_6(1, 1, 4, 5, 1, 1) = K_6(1, 1, 5, 4, 1, 1) = K_5(2, 5, 4, 1, 1).$$

Замечание 2. Всякая базовая перестановка, сохраняющая значение континуанта, тривиальна.

Определение 3. Базовую перестановку Π с серединой $(v_1, \ldots, v_\beta)$ при строгом (или нестрогом) выполнении неравенства (23) назовём повышающей (непонижающей соответственно) для последовательности (28). При строгом или нестрогом выполнении неравенства, противоположного к (23), назовём базовую перестановку Π понижающей (неповышающей соответственно) для последовательности (28).

Пусть $1 \leqslant k < l \leqslant t$. Тогда последовательность $\{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l\}$ назовём (k, l)-фрагментом последовательности $\{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$ с краями a_k и a_l. При $k \neq 1$ или $l \neq t$ края a_k и a_l назовём собственными.

Замечание 3. Повышающая (понижающая) базовая перестановка для фрагмента последовательности с серединой, не содержащей собственных краёв фрагмента, является также повышающей (понижающей соответственно) и для всей последовательности. (Обобщение данного свойства на случай тривиальных перестановок, вообще говоря, неверно.)

Лемма 2. *Для целых чисел r, h, g, таких что $r \geqslant 0$, $0 < h < g \leqslant +\infty$, имеет место неравенство*

$$\left[0; h^{\langle r \rangle}, g\right] \leqslant \frac{1}{h}, \tag{32}$$

причём равенство в (32) возможно лишь при $r = 1$, $g = +\infty$.

Лемма 3. *Максимальный континуант на множестве* $W_f(\bar{h},\bar{p})$ *достигается на некоторой последовательности* $D_f(\bar{l},\bar{r})$, *аргументы которой подчинены условию* (3).

Доказательство. Пусть максимальный континуант на множестве $W_f(\bar{h},\bar{p})$ достигается на последовательности $D = \{a_1,\dots,a_t\}$, и пусть для некоторого $\nu \in \{1,2,\dots,t\}$ выполняется равенство $a_\nu = h_1$. Пусть Π и Φ — произвольные базовые перестановки на $(1,\nu)$- и (ν,t)-фрагментах D соответственно, удовлетворяющие условию $a_{\Pi(\nu)} = a_{\Phi(\nu)} = h_1$. Тогда Π и Φ неповышающие для этих фрагментов. Поэтому, как следует из теоремы 1, вид рассматриваемых фрагментов определяется теоремой 1. (Ниже теорема 1 доказывается без ссылок на лемму 3 или какие-либо следствия из неё.) Ввиду замечания 3 лемма доказана. ☐

Лемма 4. *Пусть для последовательности* $D_f(\bar{l},\bar{r})$, *аргументы которой удовлетворяют условиям*

$$l_f = 1, \quad r_f = 0, \quad r_{f-1} > 0, \tag{33}$$

не существует повышающих базовых перестановок. Тогда аргументы последовательности D_f *удовлетворяют условию* (11).

Доказательство. Предположим, что $f \geqslant 3$ (иначе всё доказано), и проведём индукцию по f. По условию равенство (11) выполнено для $j = f$. Докажем, что $r_{f-1} = 1$ и $l_{f-2} > 0$. Допустим противное: пусть $r_{f-1} > 1$ или выполнено $r_{f-1} = 1$ и $l_{f-2} = 0$. В каждом из этих случаев рассмотрим базовую $(l_{f-1}+2, t-1)$-перестановку Π и применим к ней лемму 1В. Тогда неравенство (26) имеет место по построению, а неравенство (27) выполнено строго по лемме 2. Следовательно, перестановка Π повышающая, что противоречит условию. Таким образом, для $(l_{f-1}+2, t)$-фрагмента последовательности D_f, рассматриваемого как отдельная последовательность, доказано, что

$$r_{f-1} = 1, \quad l_{f-1} = 0, \quad l_{f-2} > 0. \tag{34}$$

Равенства (34) с точностью до симметрии континуанта совпадают с условиями (33) для меньшего значения f. Согласно замечанию 3 мы вправе применить индуктивное предложение. Лемма доказана. ☐

Пусть для некоторого $i \geqslant 0$ для последовательностей $\{b_j\}$ и $\{c_j\}$, определённых неравенствами (4), выполняются соотношения

$$b_{i+1} = h_u \leqslant h_v = c_{i+1}, \tag{35}$$

где $\{h_i\}$ — последовательность из определения W_f. Положим

$$H(i) = \{h_u, h_{u+1}, \dots, h_v\}.$$

Тогда $H(i) \neq \varnothing$.

Лемма 5. *При условии* (35) *для чисел* $s_1, s_2, \ldots, s_k \in H(i)$, $k \geqslant 0$, *имеют место неравенства*

$$[0; n_i, n_{i-1}, \ldots, n_0] - [0; s_1, s_2, \ldots, s_k, m_i, m_{i_1}, \ldots, m_1] \begin{cases} \geqslant 0, & \text{если } i \equiv 0 \pmod 2, \\ \leqslant 0, & \text{если } i \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

$$[0; m_i, m_{i-1}, \ldots, m_1] - [0; s_1, s_2, \ldots, s_k, n_i, n_{i_1}, \ldots, n_0] \begin{cases} \geqslant 0, & \text{если } i \equiv 0 \pmod 2, \\ \leqslant 0, & \text{если } i \equiv 1 \pmod 2. \end{cases} \tag{36}$$

Доказательство. По определению для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$ выполняются неравенства

$$c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_{i+1} \geqslant s_j \geqslant b_{i+1} \geqslant b_i \geqslant \ldots \geqslant b_1 > b_0.$$

Поэтому неравенства (36) вытекают из стандартного правила пошагового сравнения цепных дробей с учётом чётности шага (при этом случаи чётного и нечётного k рассматриваются по отдельности). Лемма доказана. □

4.2. Метод квадратичных иррациональностей

Определим по индукции величины $K_{l,n}$:

$$K_{0,n} = 1, \quad K_{1,n} = n+2, \quad K_{j+1,n} = (n+2)K_{j,n} - K_{j-1,n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Лемма 6. *Для* $l \geqslant 1$ *имеют место равенства*

$$\begin{aligned} &K_{2l-1}(1, n, 1, n, \ldots, 1) = K_{l-1,n}, \\ &K_{2l-1}(n, 1, n, 1, \ldots, n) = nK_{l-1,n}, \\ &K_{2l}(1, n, 1, n, \ldots, 1, n) = K_{l,n} - K_{l-1,n}. \end{aligned} \tag{37}$$

Доказательство леммы легко получается применением индукции по l.

Положим

$$k_{l,n} = K_l(n^{\langle l \rangle}), \quad \lambda_n = \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}.$$

Лемма 7. *Имеют место равенства*

$$k_{l,n} = \left\| \frac{\lambda_n^{l+2}}{\lambda_n^2 + 1} \right\|, \quad K_{l,n} = \left[\frac{\mu_n^{l+2}}{\mu_n^2 - 1} \right], \tag{38}$$

где μ_n *определено равенством* (22).

Для $K_{l,n}$ доказательство равенства, близкого к (38), имеется в [2]. Равенство (38) для $k_{l,n}$ доказывается аналогично.

Лемма 8. *Для* $n > 8$ *имеет место оценка*

$$\frac{1 + (1/\lambda_n^2)}{1 - (1/\mu_n^2)} \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n} \right)^n < \frac{41}{40} e^2. \tag{39}$$

Доказательство состоит в применении оценок

$$n \leqslant \lambda_n \leqslant n+1 \leqslant \mu_n \leqslant n+2$$

и неравенства $(1+1/n)^n < e$, известного из курса математического анализа.

Лемма 9. *Имеют место неравенства*

$$K_{n,n} < k_{n+1,n}, \quad K_{n-1,n} < k_{n,n}, \tag{40}$$

$$n > \frac{nK_{n-1,n} - k_{n,n}}{k_{n+1,n} - K_{n,n}}. \tag{41}$$

Доказательство. При $n \leqslant 8$ неравенства (40), (41) проверяются непосредственно. При $n > 8$ следует заменить величины из этих неравенств соответствующими выражениями из леммы 7 и разделить на λ_n^n, после чего применить оценку (39). Лемма доказана. □

4.3. Метод мажорирующих неравенств

Для $i, k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим

$$L = K_{i+j}(x_1, \ldots, x_i, z_1, \ldots, z_j), \quad M = K_{k+j}(y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1, z_2, \ldots, z_j)$$

с общим окончанием $(z_1, z_2, \ldots, z_j)$.

Определение 4. Скажем, что континуант M мажорируется континуантом L (обозначение $M \preceq L$), если имеют место неравенства

$$K_k(y_1, y_2, \ldots, y_k) \leqslant K_i(x_1, x_2, \ldots, x_i), \tag{42}$$

$$K_{k-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}) \leqslant K_{i-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}). \tag{43}$$

Если при выполнении неравенств (42), (43) имеют место строгость в (43) или же строгость в (42), но ещё дополненная условием $j \geqslant 1$, то скажем, что M строго мажорируется L (обозначение $M \prec L$).

Лемма 10. *При $i \geqslant 2$ имеет место строгое мажорирование*

$$K_{i+j}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, z_1, z_2, \ldots, z_j) \succ K_{i+j-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}+1, z_1, z_2, \ldots, z_j).$$

Лемма 11. *Если $M \preceq L$, то $M \leqslant L$. Кроме того, если $M \prec L$, то $M < L$.*

Доказательство следует из известной (см., например, [1]) формулы

$$\begin{aligned} &K_{i+j}(x_1, \ldots, x_i, z_1, \ldots, z_j) = \\ &\quad = K_i(x_1, \ldots, x_i)K_j(z_1, \ldots, z_j) + K_{i-1}(x_1, \ldots, x_{i-1})K_{j-1}(z_1, \ldots, z_{j-1}) \end{aligned} \tag{44}$$

и неравенств (42), (43).

Лемма 12. *Пусть $jz_1 > 1$, неравенство* (42) *выполнено строго и, кроме того,*

$$K_k(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k + 1) \leqslant K_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + 1). \tag{45}$$

Тогда $M \prec L$.

Доказательство. Достаточно доказать, что неравенство

$$K_{k+1}(y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1) \leqslant K_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_i, z_1) \tag{46}$$

имеет место и выполнено строго при $z_1 > 1$.

По (1)

$$K_{k+1}(y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1) = K_{k+1}(y_1, y_2, \ldots, y_k, 1) + (z_1 - 1)K_k(y_1, y_2, \ldots, y_k),$$
$$K_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_i, z_1) = K_{i+1}(x_1, x_2, \ldots, x_i, 1) + (z_1 - 1)K_i(x_1, x_2, \ldots, x_i).$$

По свойству (31) и условию (45) почленное сравнение двух последних равенств приводит к неравенству (46). Лемма доказана. □

Лемма 13. *Пусть неравенство* (42) *выполнено строго и, кроме того,*

$$[z_j; z_{j-1}, z_{j-2}, \ldots, z_2, z_1] > \frac{K_{k-1}(y_2, \ldots, y_k) - K_{i-1}(x_2, \ldots, x_i)}{K_i(x_1, \ldots, x_i) - K_k(y_1, \ldots, y_k)}.$$

Тогда выполняется неравенство

$$K_{i+j}(z_1, z_2, \ldots, z_j, x_1, x_2, \ldots, x_i) > K_{k+j}(z_1, z_2, \ldots, z_j, y_1, y_2, \ldots, y_k). \tag{47}$$

Доказательство легко получается применением равенств вида (44) к континуантам из неравенства (47) и использованием свойства (2).

Положим

$$J(l) = \Big\{\underbrace{1, n, 1, n, \ldots, 1}_{2l-1 \text{ чисел}}\Big\}, \quad G = \{z, n, J(m_-)\}.$$

Лемма 14. *Для любых* $n, m \in \mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$[n; J(m_+)] > \frac{K_{2n-1}(n, J(n-1), n) - K_n(n^{\langle n\rangle})}{K_{n+1}(n^{\langle n+1\rangle} - K_{2n}(J(n), n))}, \tag{48}$$

$$K_n\big(n^{\langle n\rangle}\big) > K_{2n-1}\big(J(n)\big), \tag{49}$$
$$K_{n+1}\big(n^{\langle n+1\rangle}\big) > K_{2n}(J(n), n), \tag{50}$$
$$K_{2m_++n}\big(J(m_+), n^{\langle n+1\rangle}\big) > K_{2m_++2n-1}\big(J(m_+), n, J(n)\big), \tag{51}$$
$$K_{2m_++n+1}\big(J(m_+), n^{\langle n+2\rangle}\big) > K_{2m_++2n}(J(m_+), n, J(n), n). \tag{52}$$

Кроме того, для $x \geqslant n+1$ *имеет место неравенство*

$$K_{2m_++x+1}\big(J(m_+), n^{\langle x+1\rangle}, G\big) > K_{2m_++x+n}\big(J(m_+), n, J(n), n^{\langle x-n\rangle}, G\big). \tag{53}$$

Доказательство. Неравенство (48) вытекает непосредственно из неравенства (41) и леммы 6. Неравенства (49) и (50), являющиеся лёгким следствием равенств (37) и неравенства (40), доказывают мажорирование

$$K_{2m_+n}\big(n^{\langle n+1\rangle}, J(m_+)\big) \succ K_{2m_++2n-1}\big(J(n), n, J(m_+)\big). \tag{54}$$

В силу симметрии (30) и леммы 11 свойство (54) доказывает неравенство (51). Для доказательства неравенства (52) воспользуемся леммой 13, условия которой выполнены ввиду неравенств (48) и (50). Наконец, неравенствами (51) и 52 доказано строгое мажорирование в неравенстве (53), которое теперь следует из леммы 11. Лемма доказана. □

4.4. Метод единичной вариации аргументов

Лемма 15 [2]. *Последовательность Q, на которой достигается минимальное значение континуанта на любом из множеств $U(S,n,t)$ или $U_n(S)$, может иметь не более одного элемента, отличного от 1 и n.*

Доказательство. Допустим противное и выберем в Q два элемента a и b, отличные от 1 и n. Зафиксируем все остальные элементы и сумму $a+b=\tau$ и рассмотрим континуант

$$F_\tau(a)=K_t(\ldots,a,\ldots,\tau-a,\ldots).$$

Тогда, как можно вывести из формулы (44), функция $F_\tau(a)$ является квадратным трёхчленом от a с отрицательным старшим коэффициентом и поэтому строго выпукла вверх. Следовательно,

$$F_\tau(a)>\min\{F_\tau(a-1),F_\tau(a+1)\}$$

(этим объясняется термин «единичная вариация»). Это неравенство противоречит минимальности Q. Лемма доказана. □

Лемма 16. *Для любых $a,b,c\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}_0$, если $a\geqslant c+1$, то*

$$K_{p+2}\big(a,b^{\langle p\rangle},c\big)\leqslant K_{p+2}\big(a-1,b^{\langle p\rangle},c+1\big); \tag{55}$$

если, кроме того, $a>c+1$, то неравенство (55) *выполнено строго.*

Доказательство. При $a=c+1$ равенство в (55) очевидно ввиду симметрии (30). При $a>c+1$ ввиду (31) и леммы 1A имеем

$$K_{p+2}\big(a,b^{\langle p\rangle},c\big)=K_{p+3}\big(1,a-1,b^{\langle p\rangle},c\big)<K_{p+3}\big(1,c,b^{\langle p\rangle},a-1\big)=$$
$$=K_{p+2}\big(c-1,b^{\langle p\rangle},a-1\big)=K_{p+2}\big(a-1,b^{\langle p\rangle},c+1\big).\quad\square$$

Лемма 17. *Если $a\geqslant c+2$, $p\geqslant 0$, $jz_1>1$, то*

$$K_{p+2+j}\big(a,b^{\langle p\rangle},c,z_1,z_2,\ldots,z_j\big)\prec K_{p+2+j}\big(a-1,b^{\langle p\rangle},c+1,z_1,z_2,\ldots,z_j\big).$$

Лемма доказывается применением леммы 12, условие которой проверяется с помощью леммы 16.

4.5. Леммы о системах

Лемма 18. *Для заданных $S,t\in\mathbb{N}$, если $S\not\equiv 0\pmod t$, то система уравнений*

$$\begin{cases} ch_1+dh_2=S,\\ c+d=t,\\ h_2=h_1+t\end{cases}$$

имеет единственное решение в целых числах c, d, h_1, h_2. *Это решение определяется равенствами* (14).

Лемма 19. *При* $2 \leqslant t \leqslant S < nt$ *ровно одна из следующих двух систем уравнений и неравенств*

$$\begin{cases} m(n+1)+nx+z=S, \\ 2m+x+1=t, \\ m\geqslant 0, \\ x\geqslant 0, \\ 1\leqslant z\leqslant n-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} m(n+1)-x+z=S, \\ 2m-x+1=t, \\ m\geqslant 0, \\ x<0, \\ 1\leqslant z\leqslant n-1 \end{cases}$$

имеет решение в целых числах m, x, z. *Это решение единственно и определяется соотношениями* (16), (17).

Лемма 20. *Пусть* $2 \leqslant t \leqslant S < nt$. *Тогда для каждого* $z \in P(S)$ *существует ровно одно решение системы уравнений и неравенств*

$$\begin{cases} m(n+1)+nx+z=1, \\ m\geqslant 0, \\ 0\leqslant x\leqslant n \end{cases} \tag{56}$$

в целых числах m, x. *Это решение определяется соотношениями* (19). *Обратно, если* $S \leqslant n^2-1$, $z \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ *и система* (56) *имеет решение, то выполняется условие* $z \in P(S)$.

5. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Проведём индукцию по t. Пусть

$$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_t\} -$$

последовательность из V_f, любая базовая перестановка которой неповышающая. Тогда $a_1=b_0$ по условию. Если $a_2=b_1$, то $(2,t)$-фрагмент последовательности A принадлежит какому-то V_g для некоторого $g\leqslant f$ и состоит из $t-1$ элемента. Применив к этому фрагменту индуктивное предположение и замечание 3, получаем, что равенство (9) в этом случае доказано. Если же $a_2\neq b_1$ (и, следовательно, $a_2>b_1$), то рассмотрим базовую $(2,\gamma)$-перестановку П, $\gamma=\max\{j\colon a_j=b_1\}$. Тогда П повышающая в силу леммы 1А, что противоречит условию. Этим доказано равенство $a_2=b_1$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме 3 данный максимум достигается на некоторой последовательности D_f. Ввиду симметрии (30) мы можем предложить, что из двух чисел l_f и r_f одно, скажем второе, больше нуля. Чтобы свести доказательство к лемме 4, формально дополним континуант фиктивным элементом $h_{f+1}=+\infty$, положив по определению

$$K_{t+1}(+\infty,D_f)=K_t(D_f).$$

Тогда выполняются условия

$$l_{f+1} = 1, \quad r_{f+1} = 0, \quad r_f > 0,$$

соответствующие условиям (33) для большего значения f. Ввиду леммы 4 теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Предположим противное: пусть минимальный континуант на множестве W_f достигается на последовательности

$$B = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\},$$

ни одна из тривиальных перестановок которой не соответствует формуле (12). Тогда существует число

$$j = j(B) = \min\{k \geqslant 0\colon (a_{k_-+1} \neq n_{k_-},\ k_- \leqslant \varphi) \vee \\ \vee (a_{k_-+1} = n_{k_-},\ a_{t+1-k_t} \neq m_{k_+},\ 1 \leqslant k_+ \leqslant \mu)\},$$

где, как всегда, $k_- = [k/2]$, $k_+ = k - k_-$. Среди всех последовательностей, равных B с точностью до тривиальных перестановок, выберем в качестве B последовательность с максимальным значением $j(B)$. Возможны два случая: $a_{j_-+1} \neq n_{j_-}$ или выполнено $a_{j_-+1} = n_{j_-}$, $a_{t+1-j_+} \neq m_{j_+}$. В первом из них через ν обозначим тот индекс, для которого $a_\nu = n_{j_-}$, и рассмотрим базовую $(j_- + 1, \nu)$-перестановку Π. Во втором случае положим $a_\nu = m_{j_+}$ и в качестве Π выберем $(\nu, t+1-j_+)$-перестановку. Ввиду лемм 1В и 5 перестановка Π неповышающая, а ввиду минимальности B она непонижающая. Поэтому по замечанию 2 перестановка Π тривиальна. Однако по построению

$$j\bigl(\{a_{\Pi(1)}, a_{\Pi(2)}, \ldots, a_{\Pi(t)}\}\bigr) > j(B),$$

что противоречит выбору j. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4. Применяя леммы 10 и 11 к континуантам последовательностей, содержащих отличные от 1 и n элементы, приходим к равенству (9). Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Если бы последовательность C с максимальным на $U(S,t)$ континуантом принадлежала некоторому W_f при $f \geqslant 3$, то вид этой последовательности определялся бы формулами (10), (11). Однако согласно лемме 17

$$K_t\bigl(h_f, h_{f-1}^{\langle l_{f-1}\rangle}, h_{f-2}, \ldots\bigr) \prec K_t\bigl(h_f - 1, h_{f-1}^{\langle l_{f-1}\rangle}, h_{f-2}+1, \ldots\bigr),$$

что согласно лемме 11 противоречит максимальности $C = D_f$. Следовательно, $f \leqslant 2$. При $f = 2$ аналогично имеем $h_2 = h_1 + 1$. Оставшиеся детали соотношений (13), (14) вытекают из леммы 18 и из принадлежности $C \in U(S,t)$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 6. Пусть на последовательности E достигается минимум континуантов на множестве $U(S,n,t)$, и пусть $E \in W_f$. Тогда согласно лемме 15 $f \leqslant 3$. Минимизация континуантов от трёхэлементных расстановок производится по теореме 3. Оставшиеся детали соотношений (5), (6) и (15)—(17) выводятся из леммы 19 и из принадлежности $E \in U(S, n, t)$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 7. Этот минимум также сводится к минимизации континуантов трёхэлементных расстановок с помощью теоремы 3, что приводит к минимуму в форме (6). Однако здесь t не фиксировано. Ввиду неравенства (53) для минимального континуанта в виде (6) неравенство $x \leqslant n$ не может быть нарушено. Наконец, поскольку $x \geqslant 0$ и континуант в (6) взят от последовательности из множества $U_n(S)$, то число $S - z$ должно быть представимо в виде суммы нескольких слагаемых, каждое из которых равно n или $n+1$, что обеспечивается выбором множества $P(S)$ в (7), (8). Оставшиеся детали соотношений (5)—(8) и (18), (19) следуют из леммы 20 и из принадлежности множеству $U_n(S)$. Теорема доказана. □

Замечание 4. Экстремумы из теорем 1—6, как следует из доказательства, достигаются на последовательностях, единственных с точностью до применения свойств симметрии (30) и отщепления единицы (31).

Литература

[1] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998.

[2] Душистова А. А., Мощевитин Н. Г. О производной функции Минковского $?(x)$ // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 6. — С. 33—44.

[3] Кан И. Д. Уточнение правила сравнения континуантов // Дискрет. мат. — 2000. — Т. 12, № 3. — С. 70—71.

[4] Кнут Д. Искусство программирования. — М.: Вильямс, 2006—2008.

[5] Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Физматгиз, 1961.

[6] Cusick T. W. Continuants with bounded digits // Mathematika. — 1977. — Vol. 24. — P. 166—172.

[7] Cusick T. W. Continuants with bounded digits. II // Mathematika. — 1978. — Vol. 25. — P. 107—109.

[8] Cusick T. W. Continuants with bounded digits. III // Monatsh. Math. — 1985. — Vol. 99. — P. 105—109.

[9] Good I. J. The fractional dimension theory of continued fractions // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1941. — Vol. 37. — P. 199—228.

[10] Hensley D. The distribution of badly approximable numbers and continuants with bounded digits // Proc. of the Int. Number Theory Conf. Held at Univ. Laval, Quebec City/Canada, July 5–18, 1987 / J.-M. de Koninck, C. Levesque, eds. — Berlin: Walter de Gruyter, 1989. — P. 371—385.

[11] D. Hensley, The distribution of badly approximable rationals and continuants with bounded digits. II // J. Number Theory. — 1990. — Vol. 34, no. 3. — P. 293—334.

[12] Motzkin T. S., Straus E. G. Some combinatorial extremum problems // Proc. Am. Math. Soc. — 1956. — Vol. 7. — P. 1014—1031.