О распределении дробных долей линейных форм

И. П. РОЧЕВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: justrip@rambler.ru

УДК 511.4

Ключевые слова: лакунарные последовательности, плохо приближаемые числа, метод Переса—Шлага.

Аннотация

С помощью метода Переса—Шлага строятся плохо приближаемые числа в различных задачах теории диофантовых приближений.

Abstract

I. P. Rochev, On distribution of fractional parts of linear forms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 123—137.

The Peres–Schlag's approach is used to construct badly approximable numbers in various problems of Diophantine approximation.

Введение

В 1924 г. А. Я. Хинчин доказал (результат опубликован в 1926 г., см. [3, с. 67—94, лемма 3]), что если возрастающая последовательность натуральных чисел $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойством, что при некотором натуральном t для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\frac{q_{n+t}}{q_n} \geqslant 2,$$

то найдётся такое вещественное число α, что при всех $n \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$\|q_n\alpha\| > \gamma,$$

где $\gamma > 0$ — постоянная, зависящая только от t. Здесь через $\|x\|$ обозначено расстояние от вещественного числа x до ближайшего целого, $\|x\| = \min\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$.

Сам А. Я. Хинчин не указывает явно зависимость γ от t, но из доказательства видно, что можно взять

$$\gamma = \frac{c}{(t\ln(t+1))^2}$$

с некоторой абсолютной постоянной $c > 0$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 123—137.

Дальнейшая история вопроса освещается, например, в [2]. Здесь мы отметим лишь работу [4], в которой с помощью специального варианта локальной леммы Ловаса (см. лемму 1 ниже) доказывается, что в качестве γ можно взять

$$\gamma = \frac{c}{t\ln(t+1)},$$

где $c > 0$ — некоторая абсолютная постоянная.

Аналогичные результаты можно получить и про распределение дробных долей линейных форм. Так, в [1, гл. V, лемма 2] доказывается следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть* $\vec{u}_r = (u_{r1}, \ldots, u_{rn})$, $r \in \mathbb{N}$, *— последовательность целых ненулевых векторов. Допустим, что их (евклидовы) длины*

$$\rho_r = (u_{r1}^2 + \ldots + u_{rn}^2)^{1/2}$$

удовлетворяют условию

$$\rho_{r+1} \geqslant k\rho_r \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

для некоторого числа $k > 2$. *Тогда существует такой вектор*

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$$

что для всех $r \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$\|\vec{u}_r \cdot \vec{\alpha}\,\| = \|u_{r1}\alpha_1 + \ldots + u_{rn}\alpha_n\| \geqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right).$$

В настоящей работе мы, применяя рассуждения из [4] и [2], обобщаем упомянутый выше результат Переса—Шлага и некоторые результаты работы [2] на случай линейных форм. Раздел 1 содержит ряд вспомогательных утверждений. В разделе 2 вводятся некоторые обозначения и приводятся технические результаты, демонстрирующие идеи методов Переса—Шлага и Мощевитина. Наконец, в разделе 3 эти результаты применяются к конкретным примерам.

1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть* $\{A_n\}_{n=1}^N$ *— система событий в вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\{x_n\}_{n=1}^N$ *— набор чисел из* $[0;1]$. *Обозначим*

$$B_0 = \Omega, \quad B_n = \bigcap_{m=1}^{n} A_m^c \ \ (1 \leqslant n \leqslant N),$$

где $A_m^c = \Omega \setminus A_m$. *Пусть для каждого* $n \in \{1, \ldots, N\}$ *найдётся такое* $m = m(n) \in \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, *что выполнено*

$$\mathbf{P}(A_n \cap B_m) \leqslant x_n \prod_{m<k<n} (1 - x_k) \cdot \mathbf{P}(B_m) \tag{1}$$

(если $m = n-1$, то считаем $\prod\limits_{m<k<n}(1-x_k)=1$). Тогда при $1 \leqslant n \leqslant N$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(B_n) \geqslant (1-x_n)\mathbf{P}(B_{n-1}). \tag{2}$$

Доказательство. Используем индукцию по n.

База индукции. Имеем

$$\mathbf{P}(B_1) = 1 - \mathbf{P}(A_1) \geqslant 1 - x_1 = (1-x_1)\mathbf{P}(B_0).$$

Шаг индукции. Пусть неравенство (2) уже проверено при $1 \leqslant n < n_0$. Применяя его последовательно при $n = n_0-1, n_0-2, \ldots, m+1$ (где $m = m(n_0)$), получаем

$$\prod_{m<k<n_0}(1-x_k)\cdot\mathbf{P}(B_m) \leqslant \mathbf{P}(B_{n_0-1}).$$

Учитывая (1), имеем

$$\mathbf{P}(A_{n_0}\cap B_{n_0-1}) \leqslant \mathbf{P}(A_{n_0}\cap B_m) \leqslant x_{n_0}\mathbf{P}(B_{n_0-1}),$$

откуда следует, что

$$\mathbf{P}(B_{n_0}) = \mathbf{P}(B_{n_0-1}) - \mathbf{P}(A_{n_0}\cap B_{n_0-1}) \geqslant (1-x_{n_0})\mathbf{P}(B_{n_0-1}).$$

Таким образом, (2) установлено при $n = n_0$. □

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$E = E(d, \vec{a}, b, \varepsilon) = \{\vec{\theta} \in [0;1]^d \colon \|\vec{a}\cdot\vec{\theta} + b\| \leqslant \varepsilon\},$$

$V = V(d, \vec{a}, b, \varepsilon) = \mu E$, где μ — d-мерная мера Лебега. Пусть $p \in [1;\infty]$,

$$R = |\vec{a}\,|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{n=1}^{d}|a_n|^p\right)^{1/p}, & p \in [1;\infty), \\ \max\limits_{1\leqslant n\leqslant d}|a_n|, & p = \infty. \end{cases}$$

Лемма 2. *Если $R > 0$, то*

$$V \leqslant 2\varepsilon\left(1 + \frac{d^{1/p}}{R}\right),$$

где $d^{1/p} = 1$ при $p = \infty$.

Доказательство. При $\varepsilon > 1/2$ утверждение тривиально. Пусть $\varepsilon \leqslant 1/2$. Рассмотрим отдельно случаи $d = 1$ и $d > 1$.

Случай $d = 1$. Нетрудно убедиться, что для любого отрезка $I \subset \mathbb{R}$ длины $1/R$ выполняется равенство

$$\mu\{\theta \in I \colon \|a\theta + b\| \leqslant \varepsilon\} = \frac{2\varepsilon}{R}.$$

Поскольку отрезок $[0;1]$ можно покрыть $\lceil R\rceil$ отрезками длины $1/R$, то

$$V \leqslant \frac{2\varepsilon}{R}\cdot\lceil R\rceil < 2\varepsilon\left(1 + \frac{1}{R}\right).$$

Случай $d > 1$. Без потери общности можно считать, что $|a_1| = \max\limits_{1\leqslant n\leqslant d} |a_n|$, значит, $|a_1| \geqslant R/d^{1/p}$. Используя теорему Фубини, получаем

$$V = \int\limits_{[0;1]^d} \chi_E(\vec{\theta}\,)\,d\mu = \int\limits_{[0;1]^{d-1}} \int\limits_0^1 \chi_E(\vec{\theta}\,)\,d\theta_1\,d\mu',$$

где χ_E — характеристическая функция множества E, μ' — $(d-1)$-мерная мера Лебега по переменным $\theta_2, \ldots, \theta_d$. По доказанному

$$\int\limits_0^1 \chi_E(\vec{\theta}\,)\,d\theta_1 = V\left(1, a_1, \sum_{n=2}^{d} a_n\theta_n + b, \varepsilon\right) \leqslant 2\varepsilon\left(1 + \frac{1}{|a_1|}\right) \leqslant 2\varepsilon\left(1 + \frac{d^{1/p}}{R}\right),$$

откуда немедленно получаем требуемое. □

Следствие 1. *Пусть* $I = [v_1; v_1 + r] \times \ldots \times [v_d; v_d + r] \subset \mathbb{R}^d$ — *произвольный куб со стороной* $r > 0$. *Тогда*

$$\frac{\mu\{\vec{\theta} \in I \colon \|\vec{a}\cdot\vec{\theta} + b\| \leqslant \varepsilon\}}{\mu(I)} \leqslant 2\varepsilon\left(1 + \frac{d^{1/p}}{Rr}\right).$$

Доказательство. С помощью линейной замены координат $\vec{\theta} = \vec{v} + r\vec{\vartheta}$, $\vec{\vartheta} \in [0;1]^d$, сводим доказательство к лемме 2. □

2. Общие результаты

Пусть $d \in \mathbb{N}$ и даны последовательности $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^d$, $b_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Обозначим

$$L_n(\vec{\theta}\,) = L_n(\theta_1, \ldots, \theta_d) = \vec{a}_n \cdot \vec{\theta} + b_n.$$

Пусть $p \in [1;\infty]$ и $R_n = |\vec{a}_n|_p$ удовлетворяют условию

$$0 < R_1 \leqslant R_2 \leqslant \ldots .$$

Эти обозначения сохраняются до конца статьи.

Пусть также дана невозрастающая последовательность положительных чисел $\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots > 0$. Рассмотрим множества

$$\mathfrak{G}_1 = \{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^d \colon \text{для каждого } n \in \mathbb{N}\ \|L_n(\vec{\theta}\,)\| \geqslant \delta_n\},$$

$$\mathfrak{G}_2 = \left\{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^d \colon \varliminf_{n\to\infty} \frac{\|L_n(\vec{\theta}\,)\|}{\delta_n} \geqslant 1\right\}.$$

Предложение 1. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_n \in (0;1)$ $(n \in \mathbb{N})$. *Предположим, что для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *найдётся* $m = m(n) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, *такое что выполнены два условия*:

1) *если* $m > 0$, *то* $R_n/R_m \geqslant 2^{2\lambda+1}d/\delta_m$;
2) $2(1+2^{-\lambda})^2\delta_n \leqslant x_n \prod\limits_{m<k<n}(1-x_k)$.

Тогда множество $\mathfrak{G}_1$ *непусто. Кроме того, если* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$, *то множество* $\mathfrak{G}_2$ *всюду плотно.*

Доказательство. Пусть сначала $R_1 \geqslant 2^{|\lambda|}d^{1/p}$. Докажем, что

$$\mathfrak{G}_1 \cap [0;1]^d \neq \varnothing.$$

Введём ряд обозначений. Пусть $q \in [1;\infty]$ является сопряжённым к p (т. е. $1/p + 1/q = 1$). Положим $l_0 = 0$ и для $n \in \mathbb{N}$

$$l_n = \left\lceil \log_2 \frac{d^{1/q}R_n}{\delta_n} + \lambda \right\rceil.$$

Заметим, что последовательность l_n является неубывающей.

Для $n \in \mathbb{N}_0$ и $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_d) \in \mathcal{C}_n = \{0, 1, \ldots, 2^{l_n} - 1\}^d$ положим

$$I_n(\vec{c}) = \left[\frac{c_1}{2^{l_n}}; \frac{c_1+1}{2^{l_n}}\right\rangle \times \ldots \times \left[\frac{c_d}{2^{l_n}}; \frac{c_d+1}{2^{l_n}}\right\rangle,$$

где используется обозначение

$$\left[\frac{c}{2^l}; \frac{c+1}{2^l}\right\rangle = \begin{cases} \left[\dfrac{c}{2^l}; \dfrac{c+1}{2^l}\right), & c < 2^l - 1, \\ \left[\dfrac{c}{2^l}; \dfrac{c+1}{2^l}\right], & c = 2^l - 1. \end{cases}$$

Заметим, что для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ кубы $I_n(\vec{c})$ ($\vec{c} \in \mathcal{C}_n$) попарно не пересекаются и при целых $n \geqslant m \geqslant 0$ каждый из кубов вида $I_m(\vec{c})$ представи́м в виде объединения кубов вида $I_n(\vec{d})$.

Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$E_n = \{\vec{\theta} \in [0;1]^d \colon \|L_n(\vec{\theta})\| < \delta_n\}, \tag{3}$$

$$A_n = \bigsqcup_{\vec{c} \in \mathfrak{C}_n} I_n(\vec{c}),$$

где $\mathfrak{C}_n$ — множество тех наборов $\vec{c} \in \mathcal{C}_n$, для которых $I_n(\vec{c}) \cap E_n \neq \varnothing$. Тогда $E_n \subset A_n$.

Пусть $\vec{\theta} \in A_n$. Тогда найдутся $\vec{c} \in \mathfrak{C}_n$, такой что $\vec{\theta} \in I_n(\vec{c})$, и $\vec{\xi} \in I_n(\vec{c}) \cap E_n$. Поэтому

$$\|L_n(\vec{\theta})\| = \|L_n(\vec{\xi}) + \vec{a}_n \cdot (\vec{\theta} - \vec{\xi})\| \leqslant \|L_n(\vec{\xi})\| + |\vec{a}_n \cdot (\vec{\theta} - \vec{\xi})| <$$
$$< \delta_n + |\vec{a}_n|_p \cdot |\vec{\theta} - \vec{\xi}|_q \leqslant \delta_n + R_n d^{1/q} 2^{-l_n} \leqslant (1 + 2^{-\lambda})\delta_n.$$

Таким образом, для каждого $\vec{\theta} \in A_n$ выполняется $\|L_n(\vec{\theta})\| < (1 + 2^{-\lambda})\delta_n$.

Определим B_n как в лемме 1, полагая $\Omega = [0;1]^d$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $m = m(n)$. Проверим, что выполнено (1) (в качестве $\mathbf{P}$ берём $\mathbf{P} = \mu$). Множество B_m можно представить в виде

$$B_m = \bigsqcup_{\vec{c} \in \mathfrak{D}_m} I_m(\vec{c}),$$

где $\mathfrak{D}_m$ — некоторое подмножество $\mathcal{C}_m$ (возможно, пустое). Тогда

$$A_n \cap B_m = \bigsqcup_{\vec{c} \in \mathfrak{D}_m} \big(A_n \cap I_m(\vec{c})\big).$$

Поскольку (для любого $\vec{c} \in \mathcal{C}_m$)

$$A_n \cap I_m(\vec{c}) \subset \{\vec{\theta} \in I_m(\vec{c})\colon \|L_n(\vec{\theta})\| \leqslant (1 + 2^{-\lambda})\delta_n\},$$

следствие 1 леммы 2 даёт

$$\frac{\mu(A_n \cap I_m(\vec{c}))}{\mu(I_m(\vec{c}))} \leqslant 2(1 + 2^{-\lambda})\delta_n \left(1 + \frac{d^{1/p}}{R_n 2^{-l_m}}\right).$$

Если $m = 0$, то

$$\frac{d^{1/p}}{R_n 2^{-l_m}} \leqslant \frac{d^{1/p}}{R_1} \leqslant 2^{-\lambda},$$

так как мы предполагаем, что $R_1 \geqslant 2^{|\lambda|} d^{1/p}$.

Если $m > 0$, то

$$\frac{d^{1/p}}{R_n 2^{-l_m}} < 2^{\lambda+1} \frac{d^{1/p+1/q} R_m}{R_n \delta_m} = \frac{2^{\lambda+1} d R_m}{\delta_m R_n} \leqslant 2^{-\lambda}$$

по условию 1) предложения.

В любом случае получаем

$$\frac{\mu(A_n \cap I_m(\vec{c}))}{\mu(I_m(\vec{c}))} \leqslant 2(1 + 2^{-\lambda})^2 \delta_n \leqslant x_n \prod_{m<k<n} (1 - x_k),$$

следовательно,

$$\mu(A_n \cap B_m) \leqslant x_n \prod_{m<k<n} (1 - x_k) \cdot \sum_{\vec{c} \in \mathfrak{D}_m} \mu\big(I_m(\vec{c})\big) = x_n \prod_{m<k<n} (1 - x_k) \cdot \mu(B_m).$$

Таким образом, неравенство (1) выполнено. Следовательно, при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\mu(B_n) \geqslant \prod_{m=1}^{n} (1 - x_m) > 0,$$

в частности $B_n \neq \varnothing$. Обозначим

$$F_n = \bigcap_{m=1}^{n} E_m^c, \tag{4}$$

где E_n определены в (3). Тогда F_n — последовательность вложенных друг в друга компактов, причём для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $F_n \supset B_n$, поэтому $F_n \neq \varnothing$. Следовательно,

$$\mathfrak{G}_1 \cap [0;1]^d = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing.$$

Если $R_1 < 2^{|\lambda|} d^{1/p}$, то сделаем линейную замену переменных

$$\vec{\theta} = \frac{2^{|\lambda|} d^{1/p}}{R_1} \cdot \vec{\vartheta}.$$

Применяя доказанное, получаем, что $\mathfrak{G}_1 \neq \varnothing$.

Докажем второе утверждение предложения. Пусть

$$I = [v_1; v_1 + r] \times \ldots \times [v_d; v_d + r] \subset \mathbb{R}^d \text{ —}$$

произвольный куб со стороной $r > 0$. Сделаем линейную замену $\vec{\theta} = \vec{v} + r\vec{\vartheta}$, $\vec{\vartheta} \in [0;1]^d$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$, то найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $rR_{n_0} \geqslant 2^{|\lambda|} d^{1/p}$. Рассмотрим $\tilde{L}_n(\vec{\theta}) = L_{n_0-1+n}(r\vec{\theta} + \vec{v})$ вместо $L_n(\vec{\theta})$, $\tilde{\delta}_n = \delta_{n_0-1+n}$ — вместо δ_n, $\tilde{x}_n = x_{n_0-1+n}$ — вместо x_n, $\tilde{m}(n) = \max\{m(n_0 - 1 + n) - n_0 + 1; 0\}$ — вместо $m(n)$. Применяя доказанное, убеждаемся, что

$$\{\vec{\theta} \in I \colon \text{для каждого } n \geqslant n_0\ \|L_n(\vec{\theta})\| \geqslant \delta_n\} \neq \varnothing.$$

Отсюда следует второе утверждение. □

Предложение 2. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta_\nu \in (0;1)$ $(\nu \in \mathbb{N}_0)$, $\{n_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ — *возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим*

$$\sigma_\nu = \begin{cases} 2(1 + 2^{-\lambda}) \sum\limits_{0 < n \leqslant n_1} \delta_n, & \nu = 0, \\ 2(1 + 2^{-\lambda})^2 \sum\limits_{n_\nu < n \leqslant n_{\nu+1}} \delta_n, & \nu \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Пусть выполнены следующие условия:

1) *при* $\nu \in \mathbb{N}$
$$\frac{R_{n_{\nu+1}+1}}{R_{n_\nu}} \geqslant \frac{2^{2\lambda+1} d}{\delta_{n_\nu}};$$
2) $\sigma_0 < \eta_0$;
3) *при* $\nu \in \mathbb{N}$
$$\sigma_\nu \leqslant \eta_\nu (1 - \eta_{\nu-1});$$
4) *существует бесконечно много* $\nu \in \mathbb{N}$, *для которых*
$$\left(1 - \eta_\nu - \frac{\sigma_{\nu+1}}{\eta_{\nu+1}}\right) 2^{d\lfloor \log_2 Q_\nu \rfloor} \geqslant 1,$$

где

$$Q_\nu = \frac{R_{n_{\nu+1}}\delta_{n_\nu}}{R_{n_\nu}\delta_{n_{\nu+1}}}.$$

Тогда множество $\mathfrak{G}_1$ имеет мощность континуум. Кроме того, множество $\mathfrak{G}_2$ всюду плотно (более того, для любого непустого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ пересечение $\mathfrak{G}_2 \cap \Omega$ имеет мощность континуум).

Доказательство. Возьмём такое $R_0 \geqslant 2^{|\lambda|}d^{1/p}$, что

$$\left(1 + \frac{d^{1/p}}{R_0}\right)\sigma_0 < \eta_0.$$

Заметим, что при этом для $\nu \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{d^{1/p}}{R_0}\right)\frac{\sigma_\nu}{1 + 2^{-\lambda}} \leqslant \sigma_\nu < \eta_\nu.$$

Докажем, что если $R_1 \geqslant R_0$, то множество $\mathfrak{G}_1 \cap [0;1]^d$ имеет мощность континуум.

Сохраним все обозначения из доказательства предложения 1. Кроме того, положим $n_0 = 0$.

Для $\nu \in \mathbb{N}_0$ будем называть ν-кубом любой куб вида $I_{n_\nu}(\vec{c})$, $\vec{c} \in \mathcal{C}_{n_\nu}$. ν-куб I будем называть хорошим, если

$$\mu(B_{n_{\nu+1}} \cap I) > (1 - \eta_\nu)\mu(I).$$

Пусть $\nu \in \mathbb{N}$, $n_{\nu+1} < n \leqslant n_{\nu+2}$. Тогда

$$\frac{R_n}{R_{n_\nu}} \geqslant \frac{R_{n_{\nu+1}+1}}{R_{n_\nu}} \geqslant \frac{2^{2\lambda+1}d}{\delta_{n_\nu}},$$

поэтому так же, как в доказательстве предложения 1, получаем для любого ν-куба I, что

$$\frac{\mu(A_n \cap I)}{\mu(I)} \leqslant 2(1 + 2^{-\lambda})^2\delta_n.$$

Кроме того, при $n \leqslant n_2$

$$\mu(A_n) \leqslant 2(1 + 2^{-\lambda})\delta_n\left(1 + \frac{d^{1/p}}{R_0}\right) \leqslant 2(1 + 2^{-\lambda})^2\delta_n.$$

Следовательно,

$$\mu(B_{n_1}) \geqslant 1 - \sum_{n=1}^{n_1}\mu(A_n) \geqslant 1 - \left(1 + \frac{d^{1/p}}{R_0}\right)\sigma_0 > 1 - \eta_0,$$

т. е. $[0;1]^d$ — хороший 0-куб.

Пусть $\nu \in \mathbb{N}$, I — хороший $(\nu-1)$-куб. При $n_\nu < n \leqslant n_{n_{\nu+1}}$

$$\mu(A_n \cap I) \leqslant 2(1 + 2^{-\lambda})^2\delta_n\mu(I) < \frac{2(1 + 2^{-\lambda})^2\delta_n}{1 - \eta_{\nu-1}}\mu(B_{n_\nu} \cap I),$$

поэтому

$$\mu(B_{n_{\nu+1}}\cap I)\geqslant \mu(B_{n_\nu}\cap I)-\sum_{n_\nu<n\leqslant n_{\nu+1}}\mu(A_n\cap I)>\left(1-\frac{\sigma_\nu}{1-\eta_{\nu-1}}\right)\mu(B_{n_\nu}\cap I).$$

Представим $B_{n_\nu}\cap I$ в виде

$$B_{n_\nu}\cap I=\bigsqcup_{n=1}^{a}J_n,$$

где J_n — ν-кубы. При этом

$$a=\frac{\mu(B_{n_\nu}\cap I)}{2^{-dl_{n_\nu}}}>(1-\eta_{\nu-1})2^{d(l_{n_\nu}-l_{n_{\nu-1}})}.$$

Обозначим через g число хороших J_n. Тогда

$$\left(1-\frac{\sigma_\nu}{1-\eta_{\nu-1}}\right)a2^{-dl_{n_\nu}}=\left(1-\frac{\sigma_\nu}{1-\eta_{\nu-1}}\right)\mu(B_{n_\nu}\cap I)<\mu(B_{n_{\nu+1}}\cap I)=$$
$$=\sum_{n=1}^{a}\mu(B_{n_{\nu+1}}\cap J_n)\leqslant g2^{-dl_{n_\nu}}+(a-g)(1-\eta_\nu)2^{-dl_{n_\nu}},$$

откуда получаем, что

$$g>\left(1-\frac{\sigma_\nu}{\eta_\nu(1-\eta_{\nu-1})}\right)a,$$

в частности, $g>0$. Значит, при любом $\nu\in\mathbb{N}_0$ каждый хороший ν-куб содержит хороший $(\nu+1)$-куб.

Если $\nu>1$, то

$$l_{n_\nu}-l_{n_{\nu-1}}>\log_2\frac{d^{1/q}R_{n_\nu}}{\delta_{n_\nu}}+\lambda-\left(\log_2\frac{d^{1/q}R_{n_{\nu-1}}}{\delta_{n_{\nu-1}}}+\lambda+1\right)=\log_2 Q_{\nu-1}-1,$$

поэтому

$$g>\left(1-\eta_{\nu-1}-\frac{\sigma_\nu}{\eta_\nu}\right)2^{d(l_{n_\nu}-l_{n_{\nu-1}})}\geqslant\left(1-\eta_{\nu-1}-\frac{\sigma_\nu}{\eta_\nu}\right)2^{d\lfloor\log_2 Q_{\nu-1}\rfloor}.$$

Из условия 4 предложения теперь вытекает, что существует бесконечно много таких $\nu\in\mathbb{N}$, что каждый хороший ν-куб содержит не меньше двух хороших $(\nu+1)$-кубов. Следовательно, если обозначить через G_ν объединение замыканий всех хороших ν-кубов, то множество

$$G=\bigcap_{\nu=0}^{\infty}G_\nu$$

имеет мощность континуум. Заметим, что

$$G_\nu\subset\overline{B_{n_\nu}}\subset\overline{F_{n_\nu}}=F_{n_\nu}$$

(черта означает замыкание, F_n определены в (4)), поэтому

$$G \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \mathfrak{G}_1 \cap [0;1]^d,$$

следовательно, в случае $R_1 \geqslant R_0$ первое утверждение доказано.

Окончание доказательство аналогично окончанию доказательства предложения 1. Заметим, что при $\nu \in \mathbb{N}$

$$\delta_{n_{\nu+1}} \leqslant \frac{\sigma_\nu}{2(1+2^{-\lambda})^2} < \frac{1}{2(1+2^{-\lambda})^2},$$

откуда получаем, что

$$\frac{R_{n_{\nu+2}+1}}{R_{n_{\nu+1}}} \geqslant \frac{2^{2\lambda+1}d}{\delta_{n_{\nu+1}}} > 4(2^\lambda+1)^2 d > 4,$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$. □

3. Примеры

Теорема 1. *Пусть найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что $R_{n+N}/R_n \geqslant 2$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим*

$$\delta = \frac{1}{2eN(\log_2(Nd) + 4\log_2(\log_2(Nd)+30))}.$$

Тогда множество

$$\left\{\vec\theta \in \mathbb{R}^d\colon\ \inf_{n\in\mathbb{N}} \|L_n(\vec\theta)\| \geqslant \delta\right\}$$

непусто. Кроме того, множество

$$\left\{\vec\theta \in \mathbb{R}^d\colon\ \varliminf_{n\to\infty} \|L_n(\vec\theta)\| \geqslant \delta\right\}$$

всюду плотно.

Доказательство. Обозначим

$$u = \log_2(Nd) + 30, \quad t = \log_2(Nd) + 4\log_2 u, \quad \lambda = \log_2(t\ln 2),$$
$$h = \left\lceil \log_2\left(\frac{2^{2\lambda+1}d}{\delta}\right)\right\rceil, \quad x = \frac{1}{Nh}.$$

Применим предложение 1. Возьмём $x_n = x$, $\delta_n = \delta$, $m(n) = \max\{0; n-Nh\}$. При этом условие 1) предложения выполнено. Поскольку

$$\prod_{m<k<n} (1-x_k) \geqslant \left(1 - \frac{1}{Nh}\right)^{Nh-1} > \frac{1}{e},$$

то достаточно проверить, что

$$2(1+2^{-\lambda})^2 \cdot \delta \leqslant \frac{x}{e},$$

т. е.

$$\left(1+\frac{1}{t\ln 2}\right)^2 h \leqslant t.$$

Для этого достаточно доказать, что $h \leqslant t - 2{,}9$. Имеем

$$h < \log_2 \frac{2^{2\lambda+2}d}{\delta} = t - 4\log_2 u + 3\log_2 t + \log_2(8e\ln^2 2) <$$
$$< t - 4\log_2 u + 3\log_2(u - 30 + 4\log_2 u) + 3{,}4 < t - 2{,}9.$$

Осталось применить предложение 1. □

Теорема 2. *Пусть найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что $R_{n+N}/R_n \geqslant 2$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим*

$$\delta = \frac{1}{8N(\log_2(Nd) + 4\log_2(\log_2(Nd) + 36))}.$$

Тогда множество

$$\left\{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^d \colon \inf_{n\in\mathbb{N}} \|L_n(\vec{\theta})\| \geqslant \delta\right\}$$

имеет мощность континуум.

Доказательство. Обозначим

$$u = \log_2(Nd) + 36, \quad t = \log_2(Nd) + 4\log_2 u, \quad \lambda = \log_2(t\ln 2),$$
$$h = \left\lceil \log_2\left(\frac{2^{2\lambda+1}d}{\delta}\right)\right\rceil, \quad \eta = \frac{1+2^{-\lambda}}{2}\sqrt{\frac{h}{t}}.$$

Имеем

$$h < \log_2 \frac{2^{2\lambda+2}d}{\delta} = t - 4\log_2 u + 3\log_2 t + \log_2(32\ln^2 2) <$$
$$< t - 4\log_2 u + 3\log_2(u - 36 + 4\log_2 u) + 3{,}95 < t - 2{,}94,$$
$$2\eta < \left(1+\frac{1}{t\ln 2}\right)\sqrt{1-\frac{2{,}94}{t}} < \left(1+\frac{1{,}45}{t}\right)\left(1-\frac{1{,}47}{t}\right) < 1 - \frac{0{,}02}{t}.$$

Применим предложение 2. Возьмём $n_\nu = Nh\nu$, $\delta_n = \delta$, $\eta_\nu = \eta$. Тогда

$$\sigma_0 = \frac{\eta^2}{1+2^{-\lambda}}, \quad \sigma_\nu = \eta^2.$$

Очевидно, что условия 1)—3) предложения 2 выполнены. Поскольку $Q_\nu \geqslant 2^h$ при $\nu \in \mathbb{N}$, то

$$2^{d\lfloor \log_2 Q_\nu \rfloor} \geqslant 2^h \geqslant \frac{2^{2\lambda+1}d}{\delta} = 16\ln^2 2 \cdot Ndt^3 > 100t.$$

Поэтому легко убедиться, что и условие 4) также выполнено. Из предложения 2 следует утверждение теоремы. □

Теорема 3. *Пусть* $f,h\colon [1;\infty)\to(0;\infty)$ — *неубывающие функции, причём* $h(x)\geqslant x$. *Предположим, что*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty, \tag{5}$$

$$\sup_{x\geqslant 1}\int\limits_x^{h(x)}\frac{du}{f(u)}<\infty,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{R_{\lfloor h(n)\rfloor}}{nf(n)R_n}>0. \tag{6}$$

Тогда множество

$$\bigl\{\vec\theta\in\mathbb{R}^d\colon \inf_{n\in\mathbb{N}}\bigl(\|L_n(\vec\theta)\|\cdot f(n)\bigr)>0\bigr\}$$

имеет мощность континуум. Кроме того, множество

$$\Bigl\{\vec\theta\in\mathbb{R}^d\colon \varliminf_{n\to\infty}\bigl(\|L_n(\vec\theta)\|\cdot f(n)\bigr)>0\Bigr\}$$

всюду плотно.

Доказательство. Применим предложение 2. Возьмём $\lambda=0$, $\eta_\nu=1/2$. Выберем достаточно большое $n_1\in\mathbb{N}$ и положим $n_{\nu+1}=\lfloor h(n_\nu)\rfloor$, $\nu\in\mathbb{N}$. Обозначим

$$C=\sup_{x\geqslant 1}\int\limits_x^{h(x)}\frac{du}{f(u)},\quad A=A(n_1)=\max\left\{\frac{40Cf(n_1)}{n_1};9\right\}.$$

Заметим, что в силу (5)

$$A(n_1)=o\bigl(f(n_1)\bigr),\quad n_1\to\infty. \tag{7}$$

Положим

$$\delta_n=\begin{cases}\dfrac{1}{An_1}, & n\leqslant n_1,\\[2mm] \dfrac{f(n_1)}{An_1f(n)}, & n>n_1.\end{cases}$$

Тогда

$$\sigma_0=\frac{4}{A}<\frac12,$$

$$\sigma_\nu=\frac{8f(n_1)}{An_1}\sum_{n_\nu<n\leqslant n_{\nu+1}}\frac{1}{f(n)}\leqslant\frac{8f(n_1)}{An_1}\int\limits_{n_\nu}^{n_{\nu+1}}\frac{du}{f(u)}\leqslant\frac{8Cf(n_1)}{An_1}\leqslant\frac15\quad(\nu\in\mathbb{N}).$$

Согласно (6) найдётся такая постоянная $\gamma>0$, что при достаточно больших n

$$\frac{R_{\lfloor h(n)\rfloor}}{R_n}\geqslant\gamma nf(n).$$

Поэтому, учитывая (7), получаем, что если n_1 достаточно велико, то при $\nu \in \mathbb{N}$

$$\frac{R_{n_{\nu+1}+1}}{R_{n_\nu}} \geqslant \gamma n_\nu f(n_\nu) \geqslant \frac{2Ad}{f(n_1)} n_1 f(n_\nu) = \frac{2d}{\delta_{n_\nu}}.$$

Поскольку

$$Q_\nu \geqslant \frac{R_{n_{\nu+1}}}{R_{n_\nu}} \to \infty, \quad \nu \to \infty,$$

то выполнены все условия предложения 2. □

Следствие 1. *Пусть*

$$\varliminf_{n\to\infty} n^\beta \left(\frac{R_{n+1}}{R_n} - 1\right) > 0,$$

где $\beta \in (0;1)$. *Тогда множество*

$$\left\{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^d\colon \inf_{n\in\mathbb{N}} \Big(\|L_n(\vec{\theta})\| \cdot n^\beta \ln(n+1)\Big) > 0\right\}$$

имеет мощность континуум. Кроме того, множество

$$\left\{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^d\colon \varliminf_{n\to\infty} (\|L_n(\vec{\theta})\| \cdot n^\beta \ln n) > 0\right\}$$

всюду плотно.

Доказательство. Пусть

$$\gamma = \min\left\{1;\ \varliminf_{n\to\infty} n^\beta \left(\frac{R_{n+1}}{R_n} - 1\right)\right\}.$$

Возьмём

$$f(x) = x^\beta \ln(x+1), \quad h(x) = x + cx^\beta \ln(x+1), \quad c = \frac{2}{\gamma}.$$

При этом

$$\int\limits_x^{h(x)} \frac{du}{f(u)} \leqslant \frac{h(x)-x}{f(x)} = O(1),$$

$$\ln\frac{R_{\lfloor h(n)\rfloor}}{R_n} \geqslant \sum_{k=n}^{\lfloor h(n)\rfloor - 1} \ln\left(1 + \frac{\gamma + o(1)}{k^\beta}\right) =$$
$$= \frac{\gamma + o(1)}{n^\beta} \cdot \big(h(n) - n + O(1)\big) = \big(2 + o(1)\big)\ln n, \quad n \to \infty,$$

откуда получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{\lceil h(n)\rceil}}{nf(n)R_n} = \infty.$$

Теперь утверждение немедленно вытекает из теоремы 3. □

Следствие 2. *Пусть*

$$\varliminf_{n\to\infty} n\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}-1\right)>0.$$

Тогда множество

$$\bigl\{\vec\theta\in\mathbb{R}^d\colon \inf_{n\in\mathbb{N}}\bigl(\|L_n(\vec\theta)\|\cdot n\ln(n+1)\bigr)>0\bigr\}$$

имеет мощность континуум. Кроме того, множество

$$\Bigl\{\vec\theta\in\mathbb{R}^d\colon \varliminf_{n\to\infty}\bigl(\|L_n(\vec\theta)\|\cdot n\ln n\bigr)>0\Bigr\}$$

всюду плотно.

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему. Берём

$$f(x)=x\ln(x+1),\quad h(x)=x^C,\quad C=\frac{3}{\gamma}+1,$$

где

$$\gamma=\min\left\{1;\ \varliminf_{n\to\infty} n\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}-1\right)\right\}.$$

При этом

$$\int\limits_x^{h(x)}\frac{du}{f(u)}=O(1),$$

$$\ln\frac{R_{\lfloor h(n)\rfloor}}{R_n}\geqslant\sum_{k=n}^{\lfloor h(n)\rfloor-1}\frac{\gamma+o(1)}{k}=$$
$$=\bigl(1+o(1)\bigr)\gamma(C-1)\ln n=\bigl(3+o(1)\bigr)\ln n,\quad n\to\infty.\qquad\square$$

Следствие 3. *Пусть*

$$\ln R_n=\gamma n^\beta+O(n^{\beta_1}),$$

где $\gamma>0$, $0\leqslant\beta_1<\beta\leqslant1$ — постоянные. Положим

$$\alpha(x)=\begin{cases}1, & \beta_1>0,\\ \ln(x+1), & \beta_1=0.\end{cases}$$

Тогда множество

$$\bigl\{\vec\theta\in\mathbb{R}^d\colon \inf_{n\in\mathbb{N}}\bigl(\|L_n(\vec\theta)\|\cdot n^{1-\beta+\beta_1}\alpha(n)\bigr)>0\bigr\}$$

имеет мощность континуум. Кроме того, множество

$$\Bigl\{\vec\theta\in\mathbb{R}^d\colon \varliminf_{n\to\infty}\bigl(\|L_n(\vec\theta)\|\cdot n^{1-\beta+\beta_1}\alpha(n)\bigr)>0\Bigr\}$$

всюду плотно.

Доказательство. Пусть при $n \in \mathbb{N}$

$$|\ln R_n - \gamma n^\beta| \leqslant A n^{\beta_1}.$$

Возьмём

$$f(x) = x^{1-\beta+\beta_1}\alpha(x), \quad h(x) = x + (C+1)f(x), \quad C = \frac{2}{\beta\gamma}(3A+2).$$

Тогда при больших n имеем

$$\ln \frac{R_{\lfloor h(n) \rfloor}}{R_n} > \gamma n^\beta \left(\left(1 + \frac{Cf(n)}{n} \right)^\beta - 1 \right) - 3An^{\beta_1} > \\ > \left(\frac{\beta\gamma C}{2}\alpha(n) - 3A \right) n^{\beta_1} \geqslant 2n^{\beta_1}\alpha(n) > 2\ln n. \quad \square$$

Литература

[1] Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: ИЛ, 1961.

[2] Мощевитин Н. Г. О распределении по модулю 1 лакунарных и сублакунарных последовательностей: применение конструкции Переса—Шлага // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 5. — С. 117—138.

[3] Хинчин А. Я. Избранные труды по теории чисел. — М.: МЦНМО, 2006.

[4] Peres Y., Schlag W. Two Erdős problems on lacunary sequences: Chromatic number and Diophantine approximation: Preprint. — 2007. — `arXiv:math.CO/0706.0223v1`.