

Приближения некоторых логарифмов числами из полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$

Е. С. САЛЬНИКОВА

Брянский государственный
технический университет
e-mail: eksalnikova@rambler.ru

УДК 511.36

Ключевые слова: мера иррациональности, гипергеометрическая функция.

Аннотация

Даются оценки приближений логарифмов рациональных чисел рациональными числами и квадратичными иррациональностями.

Abstract

E. S. Salnikova, Approximations of some logarithms by numbers from the fields $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 139–155.

Estimates for approximations to logarithms of rational numbers by rational numbers and quadratic irrationalities are established.

Введение

Мерой иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ называется нижняя грань множества чисел λ , для которых неравенство

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| < q^{-\lambda}$$

имеет конечное множество решений в рациональных числах p/q .

Для числа $\log 2$ наилучшей на данный момент является оценка

$$\mu(\log 2) \leq 3,891,$$

полученная Е. А. Рухадзе в 1987 г. [2]. Этот же результат был подтверждён авторами работы [12] с помощью приближений Паде для гипергеометрической функции Гаусса.

В работе [6] также был рассмотрен новый подход к доказательству указанной выше оценки. В основе доказательства лежало использование симметризованного интеграла (впервые подобный интеграл был рассмотрен В. Х. Салиховым в [3]) и свойств гипергеометрической функции с полуцелыми параметрами.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 139–155.

© 2010 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Данный метод позволил также получить другие оценки приближений логарифмов рациональными числами и квадратичными иррациональностями. Следует заметить, что подобные оценки рассматривались в [8, 10, 13, 14]. Обзор некоторых конструкций из теории диофантовых приближений логарифмов рациональных чисел представлен в статье В. В. Зудилина [1].

Данная статья является продолжением работы [6]. Здесь будут рассмотрены различные обобщения результатов из [6], установлена связь с обобщением, полученным в работе [12] (см. раздел 2). В разделе 2 также будут построены совместные приближения логарифмов чисел $4/3$ и $6/5$. Отметим, что совместные приближения логарифмов рациональных чисел рассматривались в работах [15, 16].

Модификация метода, изложенного в [6], позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\mu > 5,6514\dots$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq q_0$, где q_0 — достаточно большое число. Тогда

$$\left| \log \frac{5}{3} - \frac{p}{q} \right| > q^{-\mu}.$$

Заметим, что в [2] анонсировалась оценка $\mu(\log(5/3)) \leq 9,012$, в [12] было доказано, что $\mu(\log(5/3)) \leq 9,7551\dots$, в [6] получено, что $\mu(\log(5/3)) \leq 7,038$.

Теорема 1 является частным случаем при $u = 1$, $v = 3$ более общей оценки вида

$$\left| \log \frac{v+2u}{v} - \frac{p}{q} \right| > q^{-\mu},$$

где $u, v \in \mathbb{N}$, $\mu > \mu_0(u, v)$, числа p, q, q_0 определены как в теореме 1.

В частности, при $u = 1$, $v = 5$ можно получить оценку $\mu(\log(7/5)) \leq 6,0465\dots$; случай $u = 1$, $v = 7$ даёт $\mu(\log(9/7)) \leq 3,6455\dots$

Идеи, используемые при доказательстве теоремы 1, позволяют доказать теорему 2.

Теорема 2. Пусть $\mu > 7,2173\dots$, числа p, q, q_0 определены как в теореме 1. Тогда

$$\left| \log \frac{8}{5} - \frac{p}{q} \right| > q^{-\mu}.$$

Следует заметить, что в [12] было доказано, что $\mu(\log(8/5)) \leq 53,8149\dots$

Теорема 3. Пусть $\mu > 8,6382\dots$, $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$, $P = \max(|p_0|, |p_1|, |p_2|)$, $P \geq P_0$, где P_0 — достаточно большое число. Тогда

$$\left| p_0 + p_1 \log \frac{4}{3} + p_2 \log \frac{6}{5} \right| > P^{-\mu}.$$

Пусть везде далее $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{Z}$, $(p_3, p_4) \neq (0, 0)$,

$$P = \max(|p_1|, |p_2|, |p_3|, |p_4|), \quad P > P_0(\mu).$$

В [6] была получена оценка снизу приближения числа $\log 2$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ вида

$$\left| \log 2 - \frac{p_1\sqrt{2} + p_2}{p_3\sqrt{2} + p_4} \right| > P^{-9,307}.$$

Данная оценка является частным случаем при $k = 2$ следующего утверждения.

Теорема 4. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $k = m^2 + 1$, $\mu > \mu_0(k)$. Тогда

$$\left| \log \frac{k}{k-1} - \frac{p_1\sqrt{k} + p_2}{p_3\sqrt{k} + p_4} \right| > P^{-\mu}.$$

В частности, при $k = 5$ имеем оценку вида

$$\left| \log \frac{5}{4} - \frac{p_1\sqrt{5} + p_2}{p_3\sqrt{5} + p_4} \right| > P^{-7,4448\dots}.$$

Теорема 5. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $k = m^2$, $\mu > \mu_0(k)$. Тогда имеет место оценка

$$\left| \log \frac{k}{k-1} - \frac{p_1\sqrt{k-1} + p_2}{p_3\sqrt{k-1} + p_4} \right| > P^{-\mu}.$$

Так, при $k = 4$ справедливо неравенство

$$\left| \log \frac{4}{3} - \frac{p_1\sqrt{3} + p_2}{p_3\sqrt{3} + p_4} \right| > P^{-7,6132\dots}.$$

Теоремы 4 и 5 являются частными случаями следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$, $\mu > \mu_0(k)$. Тогда

$$\left| \log \frac{k}{k-2} - \frac{p_1\sqrt{k(k-2)} + p_2}{p_3\sqrt{k(k-2)} + p_4} \right| > P^{-\mu}.$$

Частный случай при $k = 5$ позволяет получить следующую оценку:

$$\left| \log \frac{5}{3} - \frac{p_1\sqrt{15} + p_2}{p_3\sqrt{15} + p_4} \right| > P^{-32,5131\dots}.$$

1. Основные леммы

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $l_n = q_n\gamma + p_n$, где $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 1. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |l_n| = -\delta, \quad \delta > 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |q_n| \leq \tau.$$

Тогда

$$\mu(\gamma) \leq 1 + \frac{\tau}{\delta}.$$

Данная лемма была доказана в [9, лемма 3.1].

Пусть $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_n = Q_n \theta_1 + P_{n_1}$, $\delta_n = Q_n \theta_2 + P_{n_2}$, где $Q_n, P_{n_1}, P_{n_2} \in \mathbb{Z}$.

Лемма 2. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\varepsilon_n| = -\tau_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\delta_n| = -\tau_2,$$

где $\tau_1, \tau_2 > 0$, $\tau_1 < \tau_2$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |Q_n| \leq \lambda;$$

$P_1, P_2, Q \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|Q|, |P_1|, |P_2|)$, $\mu > \lambda/\tau_1$, $H \geq H_0(\mu)$. Тогда

$$|P_1 \theta_1 + P_2 \theta_2 + Q| > \frac{1}{H^\mu}.$$

Лемма 2 доказана в [11, лемма 2.1].

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$,

$$L_n = (\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n))\theta + \Lambda_3(n)\sqrt{d} + \Lambda_4(n), \quad (1)$$

где все $\Lambda_i(n)$ целые и не все $\Lambda_i(n)$ равны 0.

Лемма 3. Пусть

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)| &= \gamma_1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max_{1 \leq i \leq 4} |\Lambda_i(n)| \leq \gamma_2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |L_n| &= -\gamma_3, \quad \gamma_3 > \gamma_2, \quad \gamma_1 + \gamma_2 > 0, \quad \mu > \frac{2(\gamma_1 + \gamma_3)}{\gamma_3 - \gamma_2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left| \theta - \frac{p_1 \sqrt{d} + p_2}{p_3 \sqrt{d} + p_4} \right| > \frac{1}{P^\mu}.$$

Доказательство. Частный случай данной леммы был доказан в [4, лемма 2].

Пусть $\tau \in (0, (\gamma_3 - \gamma_2)/2)$, $n \geq n_0(\mu)$, $2(\gamma_1 + \gamma_3)/(\gamma_3 - \gamma_2 - 2\tau) < \mu$,

$$\exp \left(\left(-\tau + \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{2} \right) n \right) \leq P < \exp \left(\left(-\tau + \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{2} \right) (n+1) \right). \quad (2)$$

Рассмотрим два случая при данном выборе n .

$$1. \frac{p_1 \sqrt{d} + p_2}{p_3 \sqrt{d} + p_4} = -\frac{\Lambda_3(n)\sqrt{d} + \Lambda_4(n)}{\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)}.$$

Так как по условию леммы $\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n) \neq 0$ при достаточно больших n , $n \geq n_1(\mu)$, то определим $n_0(\mu)$ так, чтобы, в частности, выполнялось условие $\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n) \neq 0$ при $n \geq n_0(\mu)$ (полный набор условий для определения $n_0(\mu)$ см. в конце доказательства леммы). Имеем

$$\left| \theta - \frac{p_1 \sqrt{d} + p_2}{p_3 \sqrt{d} + p_4} \right| = \frac{|L_n|}{|\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)|}, \quad n \geq n_1(\mu).$$

Пусть

$$\varepsilon = \frac{\gamma_3 - \gamma_2 - 2\tau}{2} \left(\mu - \frac{2(\gamma_1 + \gamma_3)}{\gamma_3 - \gamma_2 - 2\tau} \right) > 0.$$

Если n достаточно велико, то

$$\left| \theta - \frac{p_1\sqrt{d} + p_2}{p_3\sqrt{d} + p_4} \right| > \frac{1}{e^{(\gamma_1 + \gamma_3 + \varepsilon)n}} \geq \frac{1}{P^{\frac{\gamma_1 + \gamma_3 + \varepsilon}{-\tau + \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{2}}}} = \frac{1}{P^\mu}, \quad n \geq n_2(\mu).$$

$$2. \frac{p_1\sqrt{d} + p_2}{p_3\sqrt{d} + p_4} \neq -\frac{\Lambda_3(n)\sqrt{d} + \Lambda_4(n)}{\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)}.$$

Рассмотрим

$$0 \neq \Omega \equiv \left| \frac{p_1\sqrt{d} + p_2}{p_3\sqrt{d} + p_4} + \frac{\Lambda_3(n)\sqrt{d} + \Lambda_4(n)}{\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)} \right| \equiv \frac{|C\sqrt{d} + D|}{(p_3\sqrt{d} + p_4)|\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)|},$$

$C, D \in \mathbb{Z}$. Так как $|(C\sqrt{d} + D)(C\sqrt{d} - D)| = |C^2d - D^2|$, $C\sqrt{d} \pm D \neq 0$, поэтому $|C^2d - D^2| \geq 1$,

$$|C\sqrt{d} + D| \geq \frac{1}{(\sqrt{d} + 1) \max(|C|, |D|)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} D &= \Lambda_1(n)p_1d + \Lambda_2(n)p_2 + \Lambda_3(n)p_3d + \Lambda_4(n)p_4, \\ |D| &\leq (2d + 2)P\Lambda, \quad \Lambda = \max |\Lambda_i(n)| \quad (1 \leq i \leq 4), \\ C &= \Lambda_1(n)p_2 + \Lambda_2(n)p_1 + \Lambda_3(n)p_4 + \Lambda_4(n)p_3, \quad |C| \leq 4P\Lambda, \end{aligned}$$

т. е. $\max(|C|, |D|) \leq (2d + 2)P\Lambda$, $|p_3\sqrt{d} + p_4| \leq P(\sqrt{d} + 1)$. Поэтому

$$\Omega \geq \frac{1}{(2d + 2)(\sqrt{d} + 1)^2 P^2 \Lambda |\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)|}. \quad (3)$$

Обозначим

$$\beta_1 = \theta + \frac{\Lambda_3(n)\sqrt{d} + \Lambda_4(n)}{\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)}, \quad \beta_2 = \theta - \frac{p_1\sqrt{d} + p_2}{p_3\sqrt{d} + p_4}.$$

Покажем, что при $n \geq n_3(\mu)$ справедливо $|\beta_1| < 0,5\Omega$. Имеем

$$|\beta_1| = \frac{|L_n|}{|\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)|}.$$

Ввиду оценки (3) достаточно показать, что

$$|L_n| < \frac{1}{2(2d + 2)(\sqrt{d} + 1)^2 P^2 \Lambda}.$$

Пусть $n_3(\mu)$ таково, что при $n \geq n_3(\mu)$

$$2(2d + 2)(\sqrt{d} + 1)^2 e^{\gamma_3 - \gamma_2 - 2\tau} < e^{\tau n}, \quad |L_n|\Lambda < e^{(-\gamma_3 + \gamma_2 + \tau)n}.$$

Тогда с помощью (2) получаем, что

$$\begin{aligned} |L_n| 2(2d+2)(\sqrt{d}+1)^2 P^2 \Lambda &< \\ &< 2(2d+2)(\sqrt{d}+1)^2 e^{(-\gamma_3+\gamma_2+\tau)n} e^{(\gamma_3-\gamma_2-2\tau)(n+1)} = \\ &= 2(2d+2)(\sqrt{d}+1)^2 e^{\gamma_3-\gamma_2-2\tau} e^{-\tau n} < 1, \end{aligned}$$

и неравенство $|\beta_1| < 0,5\Omega$ доказано. Имеем $\Omega = |\beta_1 - \beta_2| \leq |\beta_1| + |\beta_2|$. Поэтому $|\beta_2| \geq \Omega - |\beta_1| > 0,5\Omega$.

Пусть, наконец, при $n \geq n_4(\mu)$

$$2(2d+2)(\sqrt{d}+1)^2 \Lambda |\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)| < e^{(\gamma_1+\gamma_2+2\tau)n}.$$

Тогда с помощью (3) получаем, что

$$\begin{aligned} |\beta_2| > \frac{1}{2}\Omega &\geq \frac{1}{2(2d+2)(\sqrt{d}+1)^2 P^2 \Lambda |\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n)|} > \\ &> \frac{e^{-(\gamma_1+\gamma_2+2\tau)n}}{P^2} \geq P^{-\frac{\gamma_1+\gamma_2+2\tau}{-\tau+\frac{\gamma_3-\gamma_2}{2}}-2} > \frac{1}{P^\mu}, \end{aligned}$$

и лемма полностью доказана,

$$n_0(\mu) = \max n_i(\mu) \quad (1 \leq i \leq 4), \quad Q_0(\mu) = \exp \left(n_0(\mu) \left(-\tau + \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{2} \right) \right). \quad \square$$

2. Рациональные приближения логарифмов

Пусть везде далее $n \in \mathbb{N}$. Для доказательства теоремы 1 рассмотрим интеграл

$$I = \int_4^5 \frac{(x-3)^{18n}(5-x)^{18n}(x-4)^{78n}}{x^{20n+1}(8-x)^{20n+1}} dx \equiv \int_4^5 R(x) dx. \quad (4)$$

Для $M \in \mathbb{N}$ обозначим $q_M = \text{НОК}(1, 2, \dots, M)$.

Подынтегральная функция $R(x)$ интеграла (4) обладает свойством симметрии:

$$R(x) = R(8-x). \quad (5)$$

Это позволяет доказать следующую лемму.

Лемма 4. Справедливо представление вида

$$q_{74n} 2^{-36n+3} 3^{2n} 5^{2n} I = A \log \frac{5}{3} + B, \quad \text{где } A, B \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Ввиду (5)

$$R(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{20n+1} a_j \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(8-x)^j} \right), \quad (6)$$

где

$$P(x) = \sum_{j=0}^{74n-2} b_j x^j, \quad b_j \in \mathbb{Z}, \quad P(8-x) = P(x). \quad (7)$$

Обозначим

$$D^k(f(x)) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k}(f(x)) \Big|_{x=0}.$$

По формуле Лейбница

$$\begin{aligned} a_j &= D^{20n+1-j}(R(x)x^{20n+1}) = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_4=20n+1-j \\ m_i \geq 0}} D^{m_1}((x-3)^{18n}) \times \\ &\times D^{m_2}((5-x)^{18n}) D^{m_3}((x-4)^{78n}) D^{m_4}((8-x)^{-20n-1}) = \\ &= \sum_{\bar{m}} c_{\bar{m}} 2^{96n-2m_3-3m_4-3} 3^{18n-m_1} 5^{18n-m_2}, \end{aligned}$$

где $\bar{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$, $c_{\bar{m}} \in \mathbb{Z}$.

Проинтегрируем слагаемое в (6) при $j = 1$. Имеем

$$\int_4^5 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{8-x} \right) dx = \log \frac{5}{3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &2^{-36n+3} 3^{2n} 5^{2n} \int_4^5 a_1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{8-x} \right) dx = \\ &= \sum_{m_1+\dots+m_4=20n} c_{\bar{m}} 2^{60n-2m_3-3m_4} 3^{20n-m_1} 5^{20n-m_2} \log \frac{5}{3} = k_1 \log \frac{5}{3}, \quad k_1 \in \mathbb{Z}, \quad (8) \end{aligned}$$

так как $2m_3 + 3m_4 \leq 60n$.

При $j \geq 2$

$$\int_4^5 \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(8-x)^j} \right) dx = \frac{1}{j-1} \left(\frac{1}{3^{j-1}} - \frac{1}{5^{j-1}} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & 2^{-36n+3} 3^{2n} 5^{2n} \int_4^5 \sum_{j=2}^{20n+1} a_j \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(8-x)^j} \right) dx = \\
 & = \sum_{j=2}^{20n+1} \frac{1}{j-1} \sum_{m_1+\dots+m_4=20n+1-j} c_{\bar{m}} 2^{60n-2m_3-3m_4} 3^{20n-m_1} 5^{20n-m_2} \times \\
 & \times \left(\frac{1}{3^{j-1}} - \frac{1}{5^{j-1}} \right) = k_2, \quad q_{20n} k_2 \in \mathbb{Z},
 \end{aligned} \tag{9}$$

так как $2m_3+3m_4 \leq 60n+3-3j < 60n$, $20n-m_1-j+1 \geq 0$, $20n-m_2-j+1 \geq 0$.

Покажем, что

$$q_{74n} 2^{-36n+3} 3^{2n} 5^{2n} \int_4^5 P(x) dx \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Для этого рассмотрим два разложения по степеням $x-3$ функции $R(x)$.

1. Очевидно, что при $x \in (0, 6)$

$$R(x) = \sum_{i=18n}^{\infty} B_i (x-3)^i, \quad B_i \in \mathbb{Q}. \tag{11}$$

Пусть теперь

$$D^k(f(x)) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k}(f(x)) \Big|_{x=3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 B_i &= D^i(R(x)) = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_5=i \\ m_i \geq 0}} D^{m_1}((x-3)^{18n}) D^{m_2}((5-x)^{18n}) \times \\
 &\times D^{m_3}((x-4)^{78n}) D^{m_4}(x^{-20n-1}) D^{m_5}((8-x)^{-20n-1}) = \\
 &= \sum_{m_2+\dots+m_5=i-18n} \tilde{c}_{\bar{m}} 2^{18n-m_2} 3^{-20n-1-m_4} 5^{-20n-1-m_5}, \quad \tilde{c}_{\bar{m}} \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Так как $m_2 \leq i-18n$, то $18n-m_2 \geq 36n-i$, $18n \leq i \leq 36n$, т. е.

$$B_i = \begin{cases} 2^{36n-i} \frac{M'_i}{N'_i}, & \text{если } 18n \leq i \leq 36n, \\ \frac{M'_i}{N'_i}, & \text{если } i > 36n, \end{cases} \tag{12}$$

$M'_i \in \mathbb{Z}$, $N'_i \in \mathbb{N}$, $(N'_i, 2) = 1$.

2. Получим аналогичное разложение $R(x)$ с помощью (6). Пусть

$$P(x) = \sum_{i=0}^{74n-2} \beta_i (x-3)^i, \quad \beta_i \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Имеем при $j = 1, \dots, 20n + 1$

$$\frac{1}{x^j} = \frac{1}{(3+x-3)^j} = 3^{-j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i d_{i,j}}{3^i} (x-3)^i, \quad x \in (0, 6),$$

где

$$d_{i,j} = \frac{j(j+1) \cdots (j+i-1)}{i!} \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{(8-x)^j} = \frac{1}{(5-(x-3))^j} = 5^{-j} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{i,j}}{5^i} (x-3)^i, \quad x \in (-2, 8).$$

Тогда с учётом (6) и (13) для $x \in (0, 6)$ получим

$$R(x) = \sum_{i=0}^{74n-2} \beta_i (x-3)^i + \sum_{j=1}^{20n+1} a_j \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M_{i,j}}{N_{i,j}} (x-3)^i, \quad (14)$$

где $M_{i,j} \in \mathbb{Z}$, $N_{i,j} \in \mathbb{N}$, $(N_{i,j}, 2) = 1$.

Сравнивая разложения (11) и (14), для $i = 0, \dots, 18n - 1$ получаем, что

$$\beta_i = 2^{36n-3} \frac{M_i}{N_i}, \quad M_i \in \mathbb{Z}, \quad N_i \in \mathbb{N}, \quad (N_i, 2) = 1. \quad (15)$$

Для $i = 0, \dots, 74n - 2$ с учётом (13) имеем, что $\beta_i \in \mathbb{Z}$.

Следовательно,

$$q_{74n} \int_4^5 P(x) dx = q_{74n} \frac{1}{2} \int_3^5 P(x) dx =$$

$$= q_{74n} \left(\sum_{i=0}^{18n-1} \frac{\beta_i}{i+1} 2^i + \sum_{i=18n}^{74n-2} \frac{\beta_i}{i+1} 2^i \right) = 2^{36n-3} k_3, \quad k_3 \in \mathbb{Z},$$

в силу (7), (12), (13) и (15).

Таким образом, выполнено (10). Из (8)–(10) следует утверждение леммы 4. $\square$

С помощью следующей леммы уточним знаменатель q_{74n} линейной формы, построенной в лемме 4.

Лемма 5. Пусть

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{(18n)!(37n)!(78n)!}{(20n)!(39n)!(74n)!}, \quad A_n, B_n \in \mathbb{N}, \quad (A_n, B_n) = 1,$$

$$l_n = B_n^{-1} q_{78n} 2^{-36n+3} 3^{2n} 5^{2n} I \equiv q_n \log \frac{5}{3} + p_n. \quad (16)$$

Тогда все q_n , p_n целые.

Лемма 5 доказывается аналогично лемме 4 работы [6].

Доказательство теоремы сводится к применению леммы 1 для линейной формы (16). В данном случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n = 8,8422 \dots, \quad \delta = 40,5022 \dots, \quad \tau = 188,3933 \dots$$

(вычисления проведены подобно вычислениям δ и τ в разделе 2 работы [6]), т. е. $\mu(\log(5/3)) \leq 1 + \tau/\delta = 5,6514 \dots$.

Данный результат с помощью другой конструкции был недавно улучшен Е. Б. Томашевской [7]: $\mu(\log(5/3)) = 5,512 \dots$.

Идеи, использованные в приведённом выше доказательстве, позволяют получить новые оценки для мер иррациональности других логарифмов. Отметим, что получение В. Х. Салиховым новой оценки для меры иррациональности числа π было связано с применением аналогичной идеи.

Интеграл (4) является частным случаем при $u = 1$, $v = 3$ интеграла

$$I = \int_{v+u}^{v+2u} \frac{(x-v)^{a_1 n} (v+2u-x)^{a_1 n} (x-(u+v))^{a_2 n}}{x^{a_3 n+1} (2(u+v)-x)^{a_3 n+1}} dx, \quad (17)$$

где $n, u, v \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2/2, a_3 \in \mathbb{N}$, $a_2/2 + a_1 - a_3 > 0$.

Интеграл (17) позволяет находить оценки показателей иррациональности чисел $\log((v+2u)/v)$. Следует заметить, что если наилучший результат может быть получен в случае $a_2 = 2a_3$, то он совпадает с результатом работы [12].

Рассмотрим некоторые частные случаи интеграла (17). Отметим, что в случаях 1 и 3 полученные оценки совпадают с результатами из [12].

1. При $u = 1$, $v = 5$, $a_1 = 14$, $a_2 = 30$, $a_3 = 15$ интеграл (17) позволяет получить оценку для показателя иррациональности числа $\log(7/5)$ вида

$$\mu\left(\log \frac{7}{5}\right) \leq 6,0465 \dots$$

Здесь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n = 4,4933 \dots,$$

$$\delta = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(B_n^{-1} q_{30n} I \cdot 2^{30n+2} 5^n 7^n 3) = 23,7625 \dots, \quad \tau = 119,9199 \dots$$

В работе Е. Б. Томашевской [7] аналогичная оценка составила

$$\mu\left(\log \frac{7}{5}\right) = 4,865 \dots$$

2. В случае $u = 1$, $v = 7$, $a_1 = 55$, $a_2 = 178$, $a_3 = 53$ имеем

$$\mu\left(\log \frac{9}{7}\right) \leq 3,6455 \dots$$

Здесь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n = 6,3298 \dots,$$

$$\delta = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(B_n^{-1} q_{182n} I \cdot 2^{-110n+4}) = 216,2431 \dots, \quad \tau = 572,0753 \dots$$

В работе Е. Б. Томашевской [7] получен следующий результат:

$$\mu\left(\log \frac{9}{7}\right) = 4,579 \dots$$

3. Случай $u = 3$, $v = 10$, $a_1 = 16$, $a_2 = 30$, $a_3 = 15$ даёт

$$\mu\left(\log \frac{8}{5}\right) \leq 53,8149 \dots$$

Здесь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n = 3,1737 \dots,$$

$$\delta = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(B_n^{-1} q_{32n} I \cdot 2^{-2n+2} 13) = 2,4716 \dots, \quad \tau = 130,5407 \dots$$

Последнюю приведённую оценку позволяет улучшить интеграл

$$I = \int_{66}^{84} \frac{(x-66)^{2n}(x-70)^{2n}(x-77)^{2n}(x-84)^{2n}(x-88)^{2n}}{x^{3n+1}(154-x)^{3n+1}} dx. \quad (18)$$

Этот интеграл используется при доказательстве теоремы 2.

Для подынтегральной функции

$$R(x) = \frac{(x-66)^{2n}(x-70)^{2n}(x-77)^{2n}(x-84)^{2n}(x-88)^{2n}}{x^{3n+1}(154-x)^{3n+1}}$$

выполнено

$$R(x) = R(154-x).$$

Данное свойство симметрии позволяет установить следующую лемму, доказательство которой аналогично доказательству леммы 4 данной работы и леммы 1 работы [4].

Лемма 6. Справедливо представление вида

$$q_{4n} 2^{-2n+2} 3^{-n} 5^n 7 \cdot 11 \cdot I = A \log \frac{8}{5} + B, \quad \text{где } A, B \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство теоремы 2 теперь сводится к применению леммы 1 для линейной формы, построенной в лемме 6. В данном случае $\delta = 3,8347 \dots$, $\tau = 23,8417 \dots$, т. е.

$$\mu\left(\log \frac{8}{5}\right) \leq 1 + \frac{\tau}{\delta} = 7,2173 \dots$$

Рассмотрим подобные по структуре интегралу (18) интегралы

$$I(\alpha) = \int_{77}^{\alpha} \frac{(x-66)^{7n}(x-70)^{7n}(x-77)^{8n}(x-84)^{7n}(x-88)^{7n}}{x^{11n+1}(154-x)^{11n+1}} dx, \quad (19)$$

$$\alpha = \{84; 88\}.$$

Лемма 7. Справедливы следующие представления интегралов (19) в виде линейных форм:

$$I_1 \equiv q_{14n} 2^{-5n+2} 5^{4n} 7 \cdot 11 \cdot I(84) = A \log \frac{6}{5} + B_1, \quad \text{где } A, B_1 \in \mathbb{Z};$$

$$I_2 \equiv q_{14n} 2^{-5n+2} 5^{4n} 7 \cdot 11 \cdot I(88) = A \log \frac{4}{3} + B_2, \quad \text{где } B_2 \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству лемм 1, 2 работы [3] и леммы 1 работы [4].

Применим лемму 2 для чисел $\theta_1 = \log(4/3) - \log(6/5) = \log(10/9)$, $\theta_2 = \log(6/5)$, $\varepsilon_n = I_2 - I_1 = A \log(10/9) + B_2 - B_1$, $\delta_n = I_1$; $Q_n = A$, $P_{n_1} = B_2 - B_1$, $P_{n_2} = B_1$.

Проведя вычисления, подобные вычислениям τ_1 , τ_2 и λ в работе [3], получим, что $\tau_1 = 10,3880\dots$, $\tau_2 = 10,4028\dots$, $\lambda = 89,7351\dots$, т. е. $\mu > \lambda/\tau_2 = 8,6382\dots$. Таким образом, доказана теорема 3.

3. Диофантовы приближения логарифмов квадратичными иррациональностями

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$, K — кольцо чисел вида $a\sqrt{d} + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_1^{\alpha} \frac{(\alpha-x)^{a_1n}(x-\beta)^{a_1n}(x-1)^{a_2n}}{x^{a_3n+1}(2-x)^{a_3n+1}} dx \equiv \int_1^{\alpha} R(x) dx, \quad (20)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2/2, a_3 \in \mathbb{N}$, $a_2/2 + a_1 - a_3 > 0$, $\alpha, \beta \in K$, $\alpha + \beta = 2$.

Рассмотрим два случая для выбора α и β .

1. Пусть $\alpha = 2\sqrt{k}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$, $\beta = 2\sqrt{k-1}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$. Тогда интеграл (20) позволяет доказать при $k = m^2 + 1$ и $k = m^2$ ($m \in \mathbb{N}$) соответственно теоремы 4 и 5. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3 работы [6] (более подробное доказательство см. в [5]).

Таким образом могут быть получены оценки снизу приближения чисел вида $\log(k/(k-1))$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{k})$ (случай $k = m^2 + 1$) и числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{k-1})$ (случай $k = m^2$).

В частности, при $k = 5$, $a_1 = 12$, $a_2 = 18$, $a_3 = 14$ получим оценку снизу приближения числа $\log(5/4)$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ вида

$$\left| \log \frac{5}{4} - \frac{p_1 \sqrt{5} + p_2}{p_3 \sqrt{5} + p_4} \right| > \frac{1}{P^{7,4448\dots}},$$

где числа p_1, p_2, p_3, p_4, P определены как в теореме 4. Здесь

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n &= 6,0992\dots, \\ \gamma_3 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(B_n^{-1} q_{18n} I \cdot 2^{6n+2} 5^n) = 117,9186\dots, \\ \gamma_1 &= 31,0234\dots, \quad \gamma_2 = 77,9066\dots, \end{aligned}$$

т. е. $\mu > (2(\gamma_1 + \gamma_3))/(\gamma_3 - \gamma_2) = 7,4448\dots$.

При $k = 4$, $a_1 = 19$, $a_2 = 28$, $a_3 = 22$ получим оценку снизу приближения числа $\log(4/3)$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ вида

$$\left| \log \frac{4}{3} - \frac{p_1 \sqrt{3} + p_2}{p_3 \sqrt{3} + p_4} \right| > \frac{1}{P^{7,6132\dots}}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n &= 9,2100\dots, \\ \gamma_3 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(B_n^{-1} q_{28n} I \cdot 2^{9n+2} 3^{1,5n}) = 169,6076\dots, \\ \gamma_1 &= 47,6484\dots, \quad \gamma_2 = 112,5345\dots, \end{aligned}$$

т. е. $\mu > 7,6132\dots$.

2. Пусть $\alpha = \sqrt{k}(\sqrt{k} - \sqrt{k-2})$, $\beta = \sqrt{k-2}(\sqrt{k} - \sqrt{k-2})$. Тогда интеграл (20) позволяет доказать теорему 6.

Пусть далее в (20) $a_1 = 71$, $a_2 = 80$, $a_3 = 74$, $k = 5$. Обозначим через K кольцо чисел вида $a\sqrt{15} + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Для $N \in \mathbb{Z}^+$ пусть $\theta_N = \{N/2\}$ — дробная доля числа $N/2$.

Сформулируем лемму, позволяющую получить представление интеграла (20) в виде линейной формы от 1 и $\log(5/3)$ с коэффициентами из K .

Лемма 8. Для интеграла (20) справедливо представление вида

$$q_{74n} 2^{77n+4} 3^{1,5n+2} 5^{1,5n+2} I = (\lambda_1 \sqrt{15} + \lambda_2) \log \frac{5}{3} + \lambda_3 \sqrt{15} + \lambda_4,$$

где все λ_i целые.

Доказательство. Очевидно, что для $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (5 - \sqrt{15})^{2m} &= 10^m (4 - \sqrt{15})^m, \\ (5 - \sqrt{15})^{2m+1} &= 10^{0,5(2m+1)-0,5} (4 - \sqrt{15})^{0,5(2m+1)-0,5} (5 - \sqrt{15}), \end{aligned}$$

т. е. для $N \in \mathbb{Z}^+$

$$(5 - \sqrt{15})^N = 2^{0,5N-\theta_N} 5^{0,5N-\theta_N} (4 - \sqrt{15})^{0,5N-\theta_N} (5 - \sqrt{15})^{2\theta_N}.$$

Аналогично

$$(\sqrt{15} - 3)^N = 2^{0,5N-\theta_N} 3^{0,5N-\theta_N} (4 - \sqrt{15})^{0,5N-\theta_N} (\sqrt{15} - 3)^{2\theta_N}.$$

Так как для подынтегральной функции интеграла (20) справедливо свойство симметрии

$$R(x) = R(2 - x),$$

то разложение $R(x)$ в сумму простейших дробей можно представить в виде

$$R(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{74n+1} a_j \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(2-x)^j} \right),$$

где

$$P(x) = \sum_{j=0}^{74n-2} b_j x^j, \quad b_j \in K.$$

Аналогично доказательству леммы 4 получаем, что

$$\begin{aligned} a_j = & \sum_{\substack{m_1+\dots+m_4=74n+1-j \\ m_i \geq 0}} c_{\bar{m}} (4 - \sqrt{15})^{71n-0,5m_1-0,5m_2-\theta_{71n-m_1}-\theta_{71n-m_2}} \times \\ & \times (5 - \sqrt{15})^{2\theta_{71n-m_1}} (\sqrt{15} - 3)^{2\theta_{71n-m_2}} 3^{35,5n-0,5m_2-\theta_{71n-m_2}} \times \\ & \times 5^{35,5n-0,5m_1-\theta_{71n-m_1}} 2^{-3n-0,5m_1-0,5m_2-m_4-1-\theta_{71n-m_1}-\theta_{71n-m_2}}, \end{aligned}$$

где $\bar{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$, $c_{\bar{m}} \in \mathbb{Z}$.

При $j = 1$ получим

$$\int_1^{5-\sqrt{15}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \right) dx = \frac{1}{2} \log \frac{5}{3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & 2^{77n+4} 3^{1,5n+2} 5^{1,5n+2} \int_1^{5-\sqrt{15}} a_1 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \right) dx = \\ & = \sum_{m_1+\dots+m_4=74n} c_{\bar{m}} (4 - \sqrt{15})^{71n-0,5m_1-0,5m_2-\theta_{71n-m_1}-\theta_{71n-m_2}} \times \\ & \times (5 - \sqrt{15})^{2\theta_{71n-m_1}} (\sqrt{15} - 3)^{2\theta_{71n-m_2}} 3^{37n-0,5m_2-\theta_{71n-m_2}+2} \times \\ & \times 5^{37n-0,5m_1-\theta_{71n-m_1}+2} 2^{74n-0,5m_1-0,5m_2-m_4+2-\theta_{71n-m_1}-\theta_{71n-m_2}} = \\ & = k_1 \log \frac{5}{3}, \quad k_1 \in K, \end{aligned} \tag{21}$$

так как

$$\begin{aligned} 0,5m_1 + 0,5m_2 + m_4 - 2 + \theta_{71n-m_1} + \theta_{71n-m_2} &< 74n, \\ 0,5m_1 + \theta_{71n-m_1} - 2 &< 37n, \quad 0,5m_2 + \theta_{71n-m_2} - 2 < 37n. \end{aligned}$$

При $j \geq 2$

$$\begin{aligned} \int_1^{5-\sqrt{15}} \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(2-x)^j} \right) dx &= \frac{1}{(j-1)2^{0,5j-0,5-\theta_{j-1}}(4-\sqrt{15})^{0,5j-0,5-\theta_{j-1}}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{(\sqrt{15}-3)^{2\theta_{j-1}}3^{0,5j-0,5-\theta_{j-1}}} - \frac{1}{(5-\sqrt{15})^{2\theta_{j-1}}5^{0,5j-0,5-\theta_{j-1}}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2^{77n+4}3^{1,5n+2}5^{1,5n+2} \int_1^{5-\sqrt{15}} \sum_{j=2}^{74n+1} a_j \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(2-x)^j} \right) dx &= \sum_{j=2}^{74n+1} \frac{1}{j-1} \times \\ &\times \sum_{m_1+\dots+m_4=74n+1-j} c_{\bar{m}} (4-\sqrt{15})^{71n-0,5m_1-0,5m_2-0,5j+0,5-\theta_{71n-m_1}-\theta_{71n-m_2}+\theta_{j-1}} \times \\ &\times (5-\sqrt{15})^{2\theta_{71n-m_1}} (\sqrt{15}-3)^{2\theta_{71n-m_2}} 3^{37n-0,5m_2-\theta_{71n-m_2}+2} \times \\ &\times 5^{37n-0,5m_1-\theta_{71n-m_1}+2} 2^{74n-0,5m_1-0,5m_2-m_4-0,5j+3,5-\theta_{71n-m_1}-\theta_{71n-m_2}+\theta_{j-1}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{(\sqrt{15}-3)^{2\theta_{j-1}}3^{0,5j-0,5-\theta_{j-1}}} - \frac{1}{(5-\sqrt{15})^{2\theta_{j-1}}5^{0,5j-0,5-\theta_{j-1}}} \right) = \\ &= k_2, \quad q_{74n}k_2 \in K, \end{aligned} \quad (22)$$

так как

$$\begin{aligned} 0,5m_1 + 0,5m_2 + m_4 + 0,5j - 2,5 + \theta_{71n-m_1} + \theta_{71n-m_2} - \theta_{j-1} &< 74n, \\ 0,5m_1 + 0,5j - 0,5 + \theta_{71n-m_1} - \theta_{j-1} - 1 &< 37n, \\ 0,5m_2 + 0,5j - 0,5 + \theta_{71n-m_2} - \theta_{j-1} - 1 &< 37n, \end{aligned}$$

$$10(5-\sqrt{15})^{-1} \in K, \quad 6(\sqrt{15}-3)^{-1} \in K.$$

Очевидно, что

$$q_{74n}2^{77n+4}3^{1,5n+2}5^{1,5n+2} \int_1^{5-\sqrt{15}} P(x) dx \in K. \quad (23)$$

Из (21)–(23) следует утверждение леммы 8. $\square$

С помощью следующей леммы уточним знаменатель q_{74n} линейной формы, построенной в лемме 8, т. е. завершим построение линейной формы (1) для $\theta = \log(5/3)$, $d = 15$.

Лемма 9. Пусть

$$\frac{(40n)!(74n)!(74n)!}{(37n)!(71n)!(80n)!} = \frac{A_n}{B_n}, \quad A_n, B_n \in \mathbb{N}, \quad (A_n, B_n) = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_n = q_{80n} B_n^{-1} 2^{77n+4} 3^{1,5n+2} 5^{1,5n+2} I \equiv \\ \equiv \left((\Lambda_1(n)\sqrt{15} + \Lambda_2(n)) \log(5/3) + \Lambda_3(n)\sqrt{15} + \Lambda_4(n) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где все $\Lambda_i(n)$ целые.

Лемма 9 доказывается аналогично лемме 4 из работы [6].

Применим лемму 3 для линейной формы (24). В данном случае

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n = 12,4742 \dots, \\ \gamma_3 = 405,2423 \dots, \quad \gamma_1 = 195,2290 \dots, \quad \gamma_2 = 368,3051 \dots, \end{aligned}$$

т. е. $\mu > 32,5131 \dots$.

Аналогично могут быть получены оценки снизу приближения чисел вида $\log(k/(k-2))$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{k(k-2)})$.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность своему научному руководителю В. Х. Салихову за помощь в работе.

Литература

- [1] Зудилин В. В. Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмов // Чебышёвский сб. — 2004. — Т. 5, № 2. — С. 49—65.
- [2] Рухадзе Е. А. Оценка снизу приближения $\ln 2$ рациональными числами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1987. — № 6. — С. 25—29.
- [3] Салихов В. Х. О мере иррациональности $\log 3$ // Докл. РАН. — 2007. — Т. 417, № 6. — С. 753—755.
- [4] Салихов В. Х., Сальникова Е. С. Диофантовы приближения логарифма «золотого сечения» // Вестник БГТУ. — 2007. — № 1. — С. 111—119.
- [5] Сальникова Е. С. Оценка снизу приближения $\log 2$ квадратичными иррациональностями // Вестник БГТУ. — 2007. — № 2. — С. 109—114.
- [6] Сальникова Е. С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83, вып. 3. — С. 428—438.
- [7] Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений функции $\log x$ // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 6. — С. 157—166.
- [8] Amoroso F., Viola C. Approximation measures for logarithms of algebraic numbers // Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 2001. — Vol. 30. — P. 225—249.
- [9] Hata M. Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. — 1990. — Vol. 407, no. 1. — P. 99—125.

- [10] Hata M. Irrationality measures of the values of hypergeometric functions // *Acta Arith.* — 1992. — Vol. 60. — P. 335–347.
- [11] Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // *Acta Arith.* — 1993. — Vol. 63, no. 4. — P. 335–349.
- [12] Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // *Manuscripta Math.* — 1993. — Vol. 81, no. 1. — P. 183–202.
- [13] Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures // *Bull. Austral. Math. Soc.* — 1994. — Vol. 50, no. 2. — P. 225–243.
- [14] Huttner M. Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques // *J. Number Theory.* — 1987. — Vol. 26. — P. 166–178.
- [15] Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité // *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1985–86.* — Birkhäuser, 1987. — (Progress Math.; Vol. 71). — P. 155–164.
- [16] Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers // *Math. Comp.* — 2002. — Vol. 72, no. 242. — P. 901–911.

