О диофантовых приближениях значений функции $\log x$

Е. Б. ТОМАШЕВСКАЯ
Брянский государственный технический университет
e-mail: syssov@mail.ru

УДК 511.36

Ключевые слова: мера иррациональности, метод перевала.

Аннотация

Получена оценка снизу для диофантовых приближений линейных комбинаций чисел $\log(5/3)$ и $(1/\sqrt{15})\operatorname{arctg}(1/\sqrt{15})$.

Abstract

E. B. Tomashevskaya, On Diophantine approximations to $\log x$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 157—166.

A lower bound for Diophantine approximations to linear combination of the numbers $\log(5/3)$ and $(1/\sqrt{15})\arctan(1/\sqrt{15})$ is obtained.

Введение

В работе рассматриваются диофантовы приближения значений функции $\log x$ в точках $x \in \mathbb{C}$ вида

$$\frac{a_1 + ib_1\sqrt{g}}{a_2 + ib_2\sqrt{g}}, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{N}$.

Идея построения совместных диофантовых приближений заключается в построении малых линейных форм, обладающих «хорошими» арифметическими свойствами. Ранее в изучении диофантовых приближений логарифмов рациональных чисел преобладал «вещественный» подход, когда использовались вещественные интегралы (см., например, [1—3, 6, 8]). В настоящей работе для этой цели конструируются комплексные интегралы вида

$$I(\omega) = \int\limits_{A/2}^{\omega} \frac{(x-\alpha)^n(x-(A-\alpha))^n(x-\beta)^n(x-(A-\beta))^n(x-A/2)^{2n}}{x^{2n+1}(A-x)^{2n+1}}\,dx, \tag{2}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$, $\omega \in \{\alpha, \beta\}$, $A/2 \in \mathbb{N}$, α, β имеют вид (1). Такое расширение позволяет получать новые оценки для совместных диофантовых приближений чисел $\log\bigl(\alpha/(A-\alpha)\bigr)$, $\log\bigl(\beta/(A-\beta)\bigr)$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 157—166.

Определение 1. Мерой иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ называется нижняя грань таких чисел μ, что для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $q_0(\varepsilon)$, которое удовлетворяет следующему условию: неравенство

$$\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geqslant q^{-\mu-\varepsilon}$$

выполняется для всех целых чисел p, q, где $q \geqslant q_0(\varepsilon)$.

Впервые симметризованные интегралы вида (2) применил В. Х. Салихов [2] для получения оценки меры иррациональности $\log 3$. В настоящей работе применение комплексного симметризованного интеграла позволило получить оценку снизу для меры иррациональности $\log(5/3)$:

$$\mu\left(\log\frac{5}{3}\right) \leqslant 5{,}512\ldots.$$

В [8] с использованием аппроксимации Паде для гипергеометрической функции Гаусса доказана общая теорема об оценках мер иррациональности логарифмов рациональных чисел. В этой же работе приведён достаточно большой список конкретных результатов, в частности оценка $\mu\bigl(\log(5/3)\bigr) \leqslant 9{,}7551\ldots$. В [3] Е. С. Сальникова улучшила последний результат: $\mu\bigl(\log(5/3)\bigr) \leqslant 7{,}038\ldots$. В [4] приведена новая оценка $\mu\bigl(\log(5/3)\bigr) \leqslant 5{,}651\ldots$.

Остановимся чуть подробнее на конструкции интеграла вида (2), позволяющей получить оценки мер иррациональности для линейных комбинаций чисел

$$\log 2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{g}}{a^2+2a+g}$$

с коэффициентами из $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим числа (1) вида

$$\frac{a+2\pm i\sqrt{g}}{a\pm i\sqrt{g}}, \tag{3}$$

где $a \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{N}$, $(a+2)^2 + g = 2(a^2+g)$. В этой ситуации введём следующие параметры интеграла (2):

$$\begin{gathered} A = 2\cdot\bigl((a+1)^2+g\bigr), \\ \alpha = (a+2+i\sqrt{g})(a+1-i\sqrt{g}), \quad A-\alpha = (a+i\sqrt{g})(a+1-i\sqrt{g}), \\ \beta = (a+2-i\sqrt{g})(a+1+i\sqrt{g}), \quad A-\beta = (a-i\sqrt{g})(a+1+i\sqrt{g}). \end{gathered}$$

Пусть везде далее $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, $(r_1, r_2) \neq (0,0)$.

В случае $a = 0$, $g = 4$ получаем оценку

$$\mu(r_1\log 2 + r_2\pi) \leqslant 8{,}58\ldots,$$

что чуть хуже, чем в [7].

В случае $a = 2$, $g = 8$ аналогично получаем, что

$$\mu\left(r_1\log 2 + r_2\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\sqrt{8}\right) \leqslant 6{,}358\ldots.$$

В работе [5] для чисел вида (3) при $a = 4$, $g = 4$ было доказано, что

$$\mu\left(r_1 \log 2 + r_2 \operatorname{arctg} \frac{1}{7}\right) \leqslant 4{,}997\ldots.$$

Следующая теорема позволяет получать оценки для совместных приближений чисел вида

$$\log \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \frac{a-b}{2\sqrt{ab}},$$

где $a, b \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Пусть* $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, $d \in \mathbb{N}$,

$$h = (8d^2-1)^2, \quad f(t) = \frac{t(t^2-2t+h)}{(t-h)^2}.$$

Пусть t_1 *— вещественный,* t_2, t_3 *— комплексно сопряжённые корни уравнения*

$$\frac{1}{t} + \frac{2t-2}{t^2-2t+h} - \frac{2}{t-h} = 0.$$

Тогда для любого ненулевого числа

$$\Theta_d = r_1 \log \frac{2d+1}{2d-1} + r_2 \frac{1}{\sqrt{4d^2-1}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4d^2-1}}$$

справедлива оценка

$$\mu(\Theta_d) \leqslant 1 - \frac{2 + \log|f(t_1)|}{2 + \log|f(t_2)|}.$$

При $d = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$ получаем $\mu\bigl(\log(5/3)\bigr) \leqslant 5{,}512\ldots$. Аналогично при $d = 3$ получаем оценку $\mu\bigl(\log(7/5)\bigr) \leqslant 4{,}865\ldots$. В [4] получен результат $\mu\bigl(\log(7/5)\bigr) \leqslant 6{,}046\ldots$. При $d = 4$ аналогично получаем, что $\mu\bigl(\log(9/7)\bigr) \leqslant$ $\leqslant 4{,}579\ldots$, что несколько хуже, чем в [4].

1. Вспомогательные утверждения

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Рассмотрим совместные диофантовы приближения логарифмов чисел (1) вида

$$\frac{2d+1+i\sqrt{4d^2-1}}{2d-1+i\sqrt{4d^2-1}}, \quad \frac{2d+1-i\sqrt{4d^2-1}}{2d-1-i\sqrt{4d^2-1}}.$$

Обозначим

$$V_1 = \frac{1}{2}\bigl(2d+1+i\sqrt{4d^2-1}\bigr), \quad V_2 = \frac{1}{2}\bigl(2d-1+i\sqrt{4d^2-1}\bigr),$$
$$W_1 = \frac{1}{2}\bigl(2d+1-i\sqrt{4d^2-1}\bigr), \quad W_2 = \frac{1}{2}\bigl(2d-1-i\sqrt{4d^2-1}\bigr),$$
$$U_1 = 2d - i\sqrt{4d^2-1}, \quad U_2 = 2d + i\sqrt{4d^2-1}.$$

Определим

$$A = 2U_1 \cdot U_2, \quad \alpha = 2 \cdot V_1 \cdot U_1, \quad \beta = 2 \cdot W_1 \cdot U_2. \tag{4}$$

Заметим, что

$$A - \alpha = 2 \cdot V_2 \cdot U_1, \quad A - \beta = 2 \cdot W_2 \cdot U_2. \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл (2) для определённых в (4) чисел α, β, A:

$$I(\omega) = \int\limits_{A/2}^{\omega} R(x)\,dx, \tag{6}$$

где $R(x) \in \mathbb{Q}(x)$, $R(A-x) = R(x)$.

Разложим $R(x)$ в сумму простейших дробей:

$$R(x) = P_{2n-2}(x) + \sum_{j=1}^{2n+1} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(A-x)^j} \right), \tag{7}$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, $P_{2n-2}(x) = \sum\limits_{j=0}^{2n-2} b_j x^j$, $b_j \in \mathbb{Z}$,

$$a_j = \frac{1}{(2n+1-j)!} \cdot \frac{d^{2n+1-j}}{dx^{2n+1-j}} \big(R(x) \cdot x^{2n+1} \big) \Big|_{x=0}. \tag{8}$$

Пусть K — кольцо чисел вида $k_1 + k_2 \cdot i\sqrt{4d^2-1}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Лемма 1. *Пусть $N \in \mathbb{N}$, $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \mathbb{Z}^+$. Тогда для V_1, V_2, W_1, W_2, определённых выше, справедливы следующие утверждения.*

1. $2 \cdot V_1^N$, $2 \cdot W_1^N \in K$.
2. $2 \cdot V_2^N$, $2 \cdot W_2^N \in K$.
3. $2 \cdot V_1^{N_1} \cdot V_2^{N_2} \cdot W_1^{N_3} \cdot W_2^{N_4} \in K$.

Доказательство. Пусть x — корень уравнения

$$x^2 - (2d+1)x + 2d^2 + d = 0. \tag{9}$$

Тогда по индукции можно доказать, что $x^N = A_N \cdot x + B_N$, где $A_N, B_N \in \mathbb{Z}$. Так как $2x \in K$, имеем $2 \cdot x^N = A_N(2 \cdot x) + 2 \cdot B_N \in K$. Значит, в силу того что V_1 и W_1 — корни уравнения (9), имеем $2 \cdot V_1^N$, $2 \cdot W_1^N \in K$.

Аналогично доказывается второе утверждение. Для доказательства третьего утверждения отметим, что $V_2 = V_1 - 1$, $W_2 = W_1 - 1$ и $V_1 \cdot W_1 = 2d^2 + d \in \mathbb{N}$. Лемма доказана. □

Предложение 1. *Для всех $j = 1, \ldots, 2n+1$ возможно представление*

$$2A \cdot a_j = \omega^{j-1} \cdot k(\omega, j),$$

где $k(\omega, j) \in K$, $\omega \in \{\alpha, A-\alpha, \beta, A-\beta\}$.

Доказательство. Обозначим

$$D^k\big(f(x)\big) = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}\big(f(x)\big)\Big|_{x=0}.$$

По формуле дифференцирования Лейбница из (8) выводим, что

$$a_j = D^{2n+1-j}(R(x)\cdot x^{2n+1}) = \sum_{n_1+\ldots+n_6=2n+1-j}\gamma(\bar n)\cdot\alpha^{n-n_1}\times$$
$$\times(A-\alpha)^{n-n_2}\cdot\beta^{n-n_3}\cdot(A-\beta)^{n-n_4}\cdot\left(\frac{A}{2}\right)^{2n-n_5}\cdot A^{-2n-1-n_6},$$

где $j=1,\ldots,2n+1$, все n_s принадлежат $\mathbb{Z}^+$, n_1, n_2, n_3, $n_4\leqslant n$, $n_5\leqslant 2n$, $\bar n=(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6)$, $\gamma(\bar n)\in\mathbb{Z}$,

$$\gamma(\bar n) = (-1)^N\cdot\prod_{s=1}^{4}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-n_s+1)}{n_s!}\times$$
$$\times\frac{2n\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot(2n-n_5+1)}{n_5!}\cdot\frac{(2n+1)\cdot\ldots\cdot(2n+n_6)}{n_6!},$$

где $N=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5$. Тогда, учитывая выбор параметров (4), получаем, что

$$a_j = \sum_{n_1+\ldots+n_6=2n+1-j}\gamma(\bar n)\cdot(2V_1\cdot U_1)^{n-n_1}\cdot(2V_2\cdot U_1)^{n-n_2}\cdot(2W_1\cdot U_2)^{n-n_3}\times$$
$$\times(2W_2\cdot U_2)^{n-n_4}\cdot(U_1\cdot U_2)^{2n-n_5}\cdot(2U_1\cdot U_2)^{-2n-1-n_6} =$$
$$= \sum_{n_1+\ldots+n_6=2n+1-j}\gamma(\bar n)\cdot 2^{2n-n_1-n_2-n_3-n_4-n_6-1}\cdot U_1^{2n-n_1-n_2-n_5-n_6-1}\times$$
$$\times U_2^{2n-n_3-n_4-n_5-n_6-1}\cdot V_1^{n-n_1}\cdot V_2^{n-n_2}\cdot W_1^{n-n_3}\cdot W_2^{n-n_4}. \tag{10}$$

Рассмотрим случай, когда $\omega=\alpha$. Заметим, что

$$2V_1 = \sqrt{2d+1}\big(\sqrt{2d+1}+i\sqrt{2d-1}\big),$$
$$2V_2 = i\sqrt{2d-1}\big(\sqrt{2d+1}-i\sqrt{2d-1}\big),$$
$$2W_1 = \sqrt{2d+1}\big(\sqrt{2d+1}-i\sqrt{2d-1}\big),$$
$$2W_2 = -i\sqrt{2d-1}\big(\sqrt{2d+1}+i\sqrt{2d-1}\big).$$

Значит,

$$W_1\cdot W_2 = -V_1\cdot V_2. \tag{11}$$

Равенство (10) можно представить в виде

$$a_j = \sum_{n_1+\ldots+n_6=2n+1-j}\gamma(\bar n)\cdot 2^L\cdot U\cdot V\cdot W, \tag{12}$$

где

$$L = 2n - n_1 - n_2 - n_3 - n_4 - n_6 - 1, \tag{13}$$

$$U = U_1^{2n-n_1-n_2-n_5-n_6-1} \cdot U_2^{2n-n_3-n_4-n_5-n_6-1}, \tag{14}$$

$$V = V_1^{n-n_1} \cdot V_2^{n-n_2}, \tag{15}$$

$$W = W_1^{n-n_3} \cdot W_2^{n-n_4}. \tag{16}$$

Так как $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_6 \leqslant 2n + 1 - j$, то из (13) следует, что

$$L \geqslant j - 2. \tag{17}$$

Обозначим

$$M_U = \max(n_1 + n_2 + n_5 + n_6,\ n_3 + n_4 + n_5 + n_6),$$
$$m_U = \min(n_1 + n_2 + n_5 + n_6,\ n_3 + n_4 + n_5 + n_6).$$

Из (14) следует, что

$$U = (U_1 \cdot U_2)^{2n-M_U-1} \cdot k_1, \quad k_1 \in K,$$

где

$$k_1 = \begin{cases} U_1^{M_U-m_U}, & \text{если} \quad m_U = n_1 + n_2 + n_5 + n_6, \\ U_2^{M_U-m_U}, & \text{если} \quad m_U = n_3 + n_4 + n_5 + n_6. \end{cases}$$

Но $M_U \leqslant n_1 + \ldots + n_6 = 2n + 1 - j$, т. е.

$$U = (U_1 U_2)^{j-2} \cdot k_2, \quad k_2 \in K. \tag{18}$$

Аналогично пусть $M_V = \max(n_1, n_2)$, $m_V = \min(n_1, n_2)$. Тогда из (15) следует, что

$$V = (V_1 \cdot V_2)^{n-M_V} \cdot k_3, \tag{19}$$

где

$$k_3 = \begin{cases} V_1^{M_V-m_V}, & \text{если} \quad m_V = n_1, \\ V_2^{M_V-m_V}, & \text{если} \quad m_V = n_2. \end{cases}$$

Пусть, наконец, $M_W = \max(n_3, n_4)$, $m_W = \min(n_3, n_4)$. Из (16) следует, что

$$W = (W_1 \cdot W_2)^{n-M_W} \cdot k_4, \tag{20}$$

где

$$k_4 = \begin{cases} W_1^{M_W-m_W}, & \text{если} \quad m_W = n_3, \\ W_2^{M_W-m_W}, & \text{если} \quad m_W = n_4. \end{cases}$$

Так как $M_V + M_W \leqslant n_1 + \ldots + n_6 = 2n + 1 - j$, то, учитывая формулу (11), из (19) и (20) получаем, что

$$V \cdot W = V_1^{j-1} \cdot V_2^{j-1} \cdot k_5, \tag{21}$$

где
$$k_5 = (-1)^{n-M_W} \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot (V_1V_2)^M, \quad M \in \mathbb{Z}^+.$$
По лемме 1 $2k_5 \in K$.

Из (12), (17), (18) и (21) следует, что
$$a_j = \sum_{n_1+\ldots+n_6=2n+1-j} \gamma(\bar{n}) \cdot 2^{j-2} \cdot (U_1U_2)^{j-2} \cdot V_1^{j-1} \cdot V_2^{j-1} \cdot k_6,$$
где $2k_6 \in K$. Поэтому
$$2 \cdot U_1 \cdot U_2 \cdot a_j = \omega^{j-1} \cdot k_7,$$
где по лемме 1 $2k_7 \in K$, т. е. $2 \cdot A \cdot a_j = \omega^{j-1} \cdot 2k_7$ и рассмотрение случая $\omega = \alpha$ завершено.

Случаи, когда $\omega \in \{A-\alpha, \beta, A-\beta\}$, рассматриваются аналогично. Предложение доказано. $\square$

Обозначим $q_N = \text{НОК}(1, \ldots, N)$. Тогда
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log q_N = 1.$$

Лемма 2. *Справедливы представления вида*
$$\Omega_1 = 2 \cdot A \cdot q_{2n} \cdot I(\alpha) = B \cdot \log \frac{2d+1+i\sqrt{4d^2-1}}{2d-1+i\sqrt{4d^2-1}} + A_1,$$
$$\Omega_2 = 2 \cdot A \cdot q_{2n} \cdot I(\beta) = B \cdot \log \frac{2d+1-i\sqrt{4d^2-1}}{2d-1-i\sqrt{4d^2-1}} + A_2,$$
где $B = 2 \cdot A \cdot q_{2n} \cdot a_1 \in \mathbb{Z}$, $A_1, A_2 \in K$, $A_2 = \bar{A}_1$.

Доказательство. Вычислим интегралы (6) с помощью представления (7). При $j = 2, \ldots, 2n+1$ имеем
$$I_{j,\alpha} \equiv \int\limits_{A/2}^{\alpha} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(A-x)^j}\right) dx = \frac{a_j}{1-j}\left(\frac{1}{x^{j-1}} - \frac{1}{(A-x)^{j-1}}\right)\Bigg|_{A/2}^{\alpha} =$$
$$= \frac{a_j}{1-j}\left(\frac{1}{\alpha^{j-1}} - \frac{1}{(A-\alpha)^{j-1}}\right). \qquad (22)$$
Ввиду предложения 1 из (22) следует, что
$$2 \cdot A \cdot q_{2n} \cdot \int\limits_{A/2}^{\alpha} \sum_{j=2}^{2n+1} a_j \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(A-x)^j}\right) dx = A_1' \in K. \qquad (23)$$

Аналогично при $j = 2, \ldots, 2n+1$ имеем
$$I_{j,\beta} \equiv \int\limits_{A/2}^{\beta} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(A-x)^j}\right) dx = \frac{a_j}{1-j}\left(\frac{1}{\beta^{j-1}} - \frac{1}{(A-\beta)^{j-1}}\right). \qquad (24)$$

Ввиду предложения 1 из (24) следует, что

$$2\cdot A\cdot q_{2n}\cdot\int\limits_{A/2}^{\beta}\sum_{j=2}^{2n+1}a_j\left(\frac{1}{x^j}+\frac{1}{(A-x)^j}\right)dx=A_2'\in K,\quad A_2'=\bar{A}_1'. \tag{25}$$

При $j=1$ из предложения 1 имеем $2\cdot A\cdot a_1\in K$, но $a_1\in\mathbb{Q}$, следовательно, $2\cdot A\cdot a_1\in\mathbb{Z}$. Далее,

$$I_{1,\alpha}\equiv a_1\int\limits_{A/2}^{\alpha}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{A-x}\right)dx=a_1\log\frac{x}{A-x}\bigg|_{A/2}^{\alpha}=a_1\cdot\log\frac{2d+1+i\sqrt{4d^2-1}}{2d-1+i\sqrt{4d^2-1}}=$$

$$=a_1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\log\frac{2d+1}{2d-1}-i\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{4d^2-1}}\right);$$

$$I_{1,\beta}\equiv a_1\int\limits_{A/2}^{\beta}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{A-x}\right)dx=a_1\log\frac{x}{A-x}\bigg|_{A/2}^{\beta}=a_1\cdot\log\frac{2d+1-i\sqrt{4d^2-1}}{2d-1-i\sqrt{4d^2-1}}=$$

$$=a_1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\log\frac{2d+1}{2d-1}+i\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{4d^2-1}}\right).$$

Наконец, вычислим интегралы

$$I_\alpha^*\equiv\int\limits_{A/2}^{\alpha}\sum_{j=0}^{2n-2}b_jx^j\,dx=\sum_{j=0}^{2n-2}b_j\cdot\frac{1}{j+1}\cdot\left(\alpha^{j+1}-\left(\frac{A}{2}\right)^{j+1}\right)$$

и

$$I_\beta^*\equiv\int\limits_{A/2}^{\beta}\sum_{j=0}^{2n-2}b_jx^j\,dx=\sum_{j=0}^{2n-2}b_j\cdot\frac{1}{j+1}\cdot\left(\beta^{j+1}-\left(\frac{A}{2}\right)^{j+1}\right).$$

По лемме 1

$$2A\cdot q_{2n}\cdot\int\limits_{A/2}^{\alpha}P_{2n-2}(x)\,dx=A_1''\in K, \tag{26}$$

$$2A\cdot q_{2n}\cdot\int\limits_{A/2}^{\beta}P_{2n-2}(x)\,dx=A_2''\in K,\quad A_2''=\bar{A}_1''. \tag{27}$$

Положим $A_1=A_1'+A_1''$ и $A_2=A_2'+A_2''$. Из (23), (25)—(27) получим требуемые представления интегралов Ω_1 и Ω_2. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть m — фиксированное неотрицательное целое число. Пусть γ_1, γ_2 — действительные числа, $\varepsilon_n=q_n\gamma_1-p_n$, $\delta_n=q_n\gamma_2-r_n$, где $p_n,q_n,r_n\in\in\mathbb{Z}+i\sqrt{m}\mathbb{Z}$ для всех $n\geqslant 1$. Допустим, что*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|q_n|=\sigma,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|\varepsilon_n|=-\tau,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|\delta_n|=-\tau'$$

для положительных чисел σ, τ и τ', таких что $\tau' \geqslant \tau$. Допустим, что существует бесконечно много n, удовлетворяющих условию $\delta_n/\varepsilon_n \neq \varrho$ для всех рациональных чисел ϱ. Тогда числа 1, γ_1, γ_2 линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Точнее, для всех $\varepsilon > 0$ существует такое положительное целое $H_0(\varepsilon)$, что

$$|p + q\gamma_1 + r\gamma_2| \geqslant H^{-\sigma/\tau-\varepsilon}$$

для всех целых p, q, r, таких что $H \equiv \max\{|q|, |r|\} \geqslant H_0(\varepsilon)$.

Лемма 3 была доказана в [7, лемма 2.1].

2. Доказательство теоремы

Найдём асимптотику линейных форм Ω_1 и Ω_2 с помощью метода перевала. Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(x) = \frac{(x-\alpha)(x-(A-\alpha))(x-\beta)(x-(A-\beta))(x-A/2)^2}{x^2(A-x)^2}. \qquad (28)$$

Схема дальнейших вычислений соответствует рассуждениям из [7].

Используя симметрию, введём в (28) замену переменной $t = (x - A/2)^2$. Тогда, учитывая выбор параметров (4), элементарными преобразованиями получим, что

$$f(t) = \frac{t(t^2 - 2t + (8d^2-1)^2)}{(t-(8d^2-1)^2)^2}.$$

Искомые точки перевала t_1, t_2, t_3 — корни уравнения

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = 0$$

(см. условие теоремы). Тогда согласно методу перевала

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|a_1| = \log|f(t_1)|.$$

Пусть далее (см. лемму 2)

$$A_1 = m_1 + im_2\sqrt{4d^2-1}, \quad A_2 = m_1 - im_2\sqrt{4d^2-1},$$

где $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Определим

$$p_n = -2\cdot A\cdot q_{2n}\cdot m_2, \quad r_n = 2\cdot A\cdot q_{2n}\cdot m_1, \quad q_n = 2\cdot A\cdot q_{2n}\cdot a_1,$$
$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{4d^2-1}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4d^2-1}}, \quad \gamma_2 = \log\frac{2d+1}{2d-1}.$$

По лемме 3 простыми преобразованиями получаем искомую оценку меры иррациональности

$$\mu\left(r_1 \log\frac{2d+1}{2d-1} + r_2 \frac{1}{\sqrt{4d^2-1}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4d^2-1}}\right) \leqslant 1 - \frac{2+\log|f(t_1)|}{2+\log|f(t_2)|},$$

так как

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |q_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(2 \cdot A \cdot q_{2n} \cdot |a_1|) = 2 + \log |f(t_1)|,$$
$$\tau = - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\varepsilon_n| = -(2 + \log |f(t_2)|).$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность научному руководителю В. Х. Салихову за большую помощь, оказанную при подготовке рукописи.

Литература

[1] Рухадзе Е. А. Оценка снизу приближения $\ln 2$ рациональными числами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1987. — № 6. — С. 25—29.

[2] Салихов В. Х. О мере иррациональности $\log 3$ // Докл. РАН. — 2007. — Т. 417, № 6. — С. 753—755.

[3] Сальникова Е. С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83, вып. 3. — С. 428—438.

[4] Сальникова Е. С. Приближения некоторых логарифмов числами из полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 6. — С. 139—155.

[5] Томашевская Е. Б. Совместное приближение $\log 2$ и $\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$ // Вестник БГТУ. — 2006. — № 4. — С. 126—130.

[6] Amoroso F., Viola C. Approximation measures for logarithms of algebraic numbers // Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 2001. — Vol. 30. — P. 225—249.

[7] Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. — 1993. — Vol. 63, no. 4. — P. 335—349.

[8] Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. — 1993. — Vol. 81, no. 1. — P. 183—202.