О трансцендентности модулей эллиптических функций Якоби

Я. М. ХОЛЯВКА
Львовский национальный университет
им. И. Франко, Украина
e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua

УДК 511.3

Ключевые слова: трансцендентность, модуль эллиптической функции Якоби, эллиптическая функция Якоби.

Аннотация

Пусть $\operatorname{sn}_1 z$, $\operatorname{sn}_2 z$ — эллиптические функции Якоби, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — модули этих функций, $0 < \varkappa_1^2 < 1$, $0 < \varkappa_2^2 < 1$, τ_1, τ_2 — значения модулярной переменной, $\theta_3(\tau_1)$, $\theta_3(\tau_2)$ — тэта-константы. В статье доказывается существование трансцендентного числа среди чисел $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\theta_3(\tau_1)$, $\theta_3(\tau_2)$, если τ_1/τ_2 иррационально.

Abstract

Ya. M. Kholyavka, On the transcendence of moduli of the Jacobian elliptic functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 167—172.

Let $\operatorname{sn}_1 z$ and $\operatorname{sn}_2 z$ be the Jacobian elliptic functions of moduli $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$, $0 < \varkappa_1^2 < 1$, $0 < \varkappa_2^2 < 1$, τ_1 and τ_2 be the values of the modular variable, $\theta_3(\tau_1)$ and $\theta_3(\tau_2)$ be the theta constants. In this paper, the set $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\theta_3(\tau_1)$, and $\theta_3(\tau_2)$ is shown to contain a transcendental number, provided that τ_1/τ_2 is irrational.

Пусть $\operatorname{sn}_1 z$, $\operatorname{sn}_2 z$ — эллиптические функции Якоби, $\varkappa_j$ — модуль $\operatorname{sn}_j z$, $j = 1, 2$. Эти функции определяются значениями модулярной переменной τ_j [2]. Для тэта-функций используем обозначения из [2]: $\theta_i(z, \tau_j)$ ($i = 2, 3, 4$, $j = 1, 2$) — тэта-функции от переменного z, которые определяются значениями модулярной переменной τ_j; тэта-константы $\theta_i(0, \tau_j)$ будем обозначать через $\theta_{i,j}$.

Арифметические свойства эллиптических и тэта-функций рассматривались многими авторами (см., например, [1, 5, 7]). В этой работе доказывается следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \varkappa_1^2 < 1$, $0 < \varkappa_2^2 < 1$ *и* τ_1/τ_2 *иррационально. Тогда среди чисел* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\theta_{3,1}$, $\theta_{3,2}$ *найдётся трансцендентное.*

Подобный результат для тэта-функций получен в работе [1].

При доказательстве теоремы 1 мы воспользуемся некоторыми свойствами функций Якоби $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$. Эти функции удовлетворяют дифференциальным

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 167—172.

уравнениям

$$(\operatorname{sn}' z)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 z)(1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 z),$$
$$(\operatorname{cn}' z)^2 = (1 - \operatorname{cn}^2 z)(1 - \varkappa^2 + \varkappa^2 \operatorname{cn}^2 z),$$
$$(\operatorname{dn}' z)^2 = (1 - \operatorname{dn}^2 z)(\varkappa^2 - 1 + \operatorname{dn}^2 z)$$

и связаны соотношениями

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \quad \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z = 1, \quad \operatorname{dn}^2 z + \varkappa^2 \operatorname{cn}^2 z = 1 + \varkappa^2,$$
$$\operatorname{sn}' z = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z, \quad \operatorname{cn}' z = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad \operatorname{dn}' z = -\varkappa^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z, \tag{1}$$

$$\varkappa_j^2 = \frac{\theta_{2,j}^4}{\theta_{3,j}^4}, \quad \operatorname{sn}_j z = \frac{\theta_{3,j}\theta_1(v,\tau_j)}{\theta_{2,j}\theta_4(v,\tau_j)}, \quad v = \frac{z}{\pi\theta_{3,j}^2}, \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

$$|\theta_i(z,\tau)| \leqslant \exp(\gamma |z|^2). \tag{3}$$

Коэффициентами разложений функций Якоби в ряд Тейлора в точке $z = 0$ будут многочлены с целыми коэффициентами от $\varkappa$.

Лемма 1. *Выполняются следующие соотношения*:

$$\operatorname{sn} z = \sum_{j=0}^{\infty} A_{1,2j+1}(\varkappa)\frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad \operatorname{cn} z = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2,2j}(\varkappa)\frac{z^{2j}}{(2j)!},$$
$$\operatorname{dn} z = \sum_{j=0}^{\infty} A_{3,2j}(\varkappa)\frac{z^{2j}}{(2j)!}, \tag{4}$$

где

$$A_{1,2j+1}(\varkappa) \ll (2j+1)!\,\varkappa^{2j}, \quad A_{2,2j}(\varkappa) \ll (2j)!\,\varkappa^{2j-2}, \quad A_{3,2j}(\varkappa) \ll (2j)!\,\varkappa^{2j}. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем лемму 1 индукцией по второму индексу коэффициентов $A_{k,j}(\varkappa)$. При $j = 0$ находим, что $A_{1,1}(\varkappa) = 1$, $A_{2,0}(\varkappa) = 1$, $A_{3,0}(\varkappa) = 1$. При $j = 1$ находим, что $A_{1,3}(\varkappa) = -(1 + \varkappa^2)$, $A_{2,2}(\varkappa) = -1$, $A_{3,2}(\varkappa) = -\varkappa^2$. Предположим, что (5) выполняется для всех коэффициентов в (4)) при $j \leqslant j_0$. Из соотношений (1) выводим, что

$$A_{1,2j_0+1}(\varkappa) = \sum_{k=0}^{j_0} \frac{(2j_0)!}{(2k)!\,(2(j_0-k))!} A_{2,2k}(\varkappa) A_{3,2(j_0-k)}(\varkappa).$$

Из индуктивного предположения следует оценка для $A_{1,2j+1}(\varkappa)$. Так же можно доказать и остальные оценки (5). Лемма доказана. □

Лемма 2. *Для любых целых неотрицательных чисел* t_1, t_2 *существуют такие многочлены* $B_{r,t_1,t_2}(\varkappa_1, \varkappa_2, \theta_{3,1}, \theta_{3,2}) \in \mathbb{Z}[\varkappa_1, \varkappa_2]$, *что*

$$\operatorname{sn}_1^{t_1}(\theta_{3,1}^2 z)\operatorname{sn}_2^{t_2}(\theta_{3,2}^2 z) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{r,t_1,t_2}(\varkappa_1, \varkappa_2, \theta_{3,1}, \theta_{3,2})\frac{z^r}{r!} \tag{6}$$

и

$$B_{r,t_1,t_2}(\varkappa_1, \varkappa_2, \theta_{3,1}, \theta_{3,2}) \ll r!\,t_1!\,t_2!\,2^{\frac{r+t_1+t_2}{2}}(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \theta_{3,1} + \theta_{3,2})^{4r-2t_1-2t_2}. \tag{7}$$

Доказательство. Положим $B_{r,t_1,t_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2}) = 0$, если $r < t_1 + t_2$. Из (4) и леммы 1, применённой к $\mathrm{sn}_1(\theta_{3,1}^2 z)$, $\mathrm{sn}_2(\theta_{3,2}^2 z)$, следует, что

$$\sum_{r=0}^{\infty} B_{r,t_1,t_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})\frac{z^r}{r!} =$$
$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_{1,2j+1}(\varkappa_1)\frac{(\theta_{3,1}^2 z)^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)^{t_1}\left(\sum_{j=0}^{\infty} A_{1,2j+1}(\varkappa_2)\frac{(\theta_{3,2}^2 z)^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)^{t_2}. \quad (8)$$

Для $r \geqslant t_1 + t_2$ сравним коэффициенты при z^r в левой и правой части (8):

$$\frac{B_{r,t_1,t_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})}{r!} =$$
$$= \sum\nolimits_1 t_1!\,t_2! \prod_{m=0}^{n} \frac{A_{1,2m+1}^{j_m}(\varkappa_1)A_{1,2m+1}^{k_m}(\varkappa_2)(\theta_{3,1})^{2r_1}(\theta_{3,2})^{2r_2}}{j_m!\,k_m!\,((2m+1)!)^{j_m+k_m}}, \quad (9)$$

где суммирование $\sum_1$ проводится по всем целым неотрицательным j_m, k_m, таким что

$$n = \left[\frac{r}{2}\right], \quad j_0 + \ldots + j_n = t_1, \quad k_0 + \ldots + k_n = t_2,$$
$$j_0 + 3j_1 + \ldots + (2n+1)j_n = r_1, \quad k_0 + 3k_1 + \ldots + (2n+1)k_n = r_2, \quad r_1 + r_2 = r.$$

Из (5), (9) выводим оценку

$$B_{r,t_1,t_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2}) \ll$$
$$\ll r!\,t_1!\,t_2!\,(\varkappa_1+\varkappa_2+\theta_{3,1}+\theta_{3,2})^{4r-2t_1-2t_2}\sum\nolimits_1\prod_{m=0}^{n}\frac{1}{j_m!\,k_m!} \ll$$
$$\ll r!\,t_1!\,t_2!\,(\varkappa_1+\varkappa_2+\theta_{3,1}+\theta_{3,2})^{4r-2t_1-2t_2}2^{\frac{r+t_1+t_2}{2}}. \quad (10)$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Для любого достаточно большого целого числа N существуют такие многочлены $C_{k_1,k_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2}) \in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3,x_4]$, $0 \leqslant k_1,k_2 \leqslant K$, $K = [4\sqrt{N}]$, что функция*

$$F(z) = \sum_{k_1,k_2=0}^{K} C_{k_1,k_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})\,\mathrm{sn}_1^{k_1}(\theta_{3,1}^2 z)\,\mathrm{sn}_2^{k_2}(\theta_{3,1}^2 z) \quad (11)$$

не равна тождественно нулю и

$$\mathrm{ord}_{z=0} F \geqslant N, \quad \deg C_{k_1,k_2} \leqslant N + 2k_1 + 2k_2, \quad \ln|C_{k_1,k_2}| \leqslant 2N\ln N. \quad (12)$$

Доказательство. Из леммы 2 и выбора параметра K следует, что для $r \leqslant N$ выполняется оценка

$$|B_{r,k_1,k_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})| \leqslant N!\,C_1^N. \quad (13)$$

Рассмотрим многочлены $D_{N,k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ с неопределёнными коэффициентами $a_{l_1,l_2,l_3,l_4}(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}$:

$$D_{N,k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum\nolimits_2 a_{l_1,l_2,l_3,l_4}(k_1,k_2)x_1^{l_1}x_2^{l_2}x_3^{l_3}x_4^{l_4}, \tag{14}$$

где суммирование $\sum_2$ проводится по всем целым неотрицательным l_1, l_2, l_3, l_4, таким что $l_1+l_2+l_3+l_4=N+2k_1+2k_2$.

Выберем $a_{l_1,l_2,l_3,l_4}(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}$, $a_{l_1,l_2,l_3,l_4}(k_1,k_2)\not\equiv 0$, так, чтобы для $0\leqslant r<N$ выполнялись соотношения

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{K} D_{N,k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)B_{r,k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv 0. \tag{15}$$

Для этого будем рассматривать (15) как систему уравнений относительно $a_{l_1,l_2,l_3,l_4}(k_1,k_2)$. Согласно (13) и лемме Зигеля [4] существуют такие $a_{l_1,l_2,l_3,l_4}(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}$, что выполняется соотношение (15) и

$$|a_{l_1,l_2,l_3,l_4}(k_1,k_2)|<N^N C_2^N, \quad a_{l_1,l_2,l_3,l_4}(k_1,k_2)\not\equiv 0. \tag{16}$$

Используя построенные многочлены $D_{N,k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)$, построим многочлены $C_{k_1,k_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})\not\equiv 0$.

Обозначим

$$\mathcal{D}_{s_1,s_2,s_3,s_4}=\frac{1}{s_1!\,s_2!\,s_3!\,s_4!}\frac{\partial^s}{\partial^{s_1}x_1\partial^{s_2}x_2\partial^{s_3}x_3\partial^{s_4}x_4}, \quad s_1+s_2+s_3+s_4=s. \tag{17}$$

Пусть s $0\leqslant s<N$, — такое наименьшее целое, что существуют $s_1,\dots,s_4$, $s_1+s_2+s_3+s_4=s$, удовлетворяющие для некоторого $D_{N,k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ условиям

$$\mathcal{D}_{s_1,s_2,s_3,s_4}D_{N,k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)|_{(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})}\neq 0. \tag{18}$$

Положим

$$\begin{aligned}C_{k_1,k_2}&(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})=\\&=\mathcal{D}_{s_1,s_2,s_3,s_4}D_{N,k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)|_{(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})}.\end{aligned} \tag{19}$$

Применим оператор $\mathcal{D}_{s_1,s_2,s_3,s_4}$ к левой части (15). Так как s минимально, получим, что для всех r, $0\leqslant r<N$, из (19) следует, что

$$\begin{aligned}E_r&(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})=\\&=\sum_{k_1,k_2=0}^{K} C_{k_1,k_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})B_{r,k_1,k_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})=0.\end{aligned} \tag{20}$$

Из (6), (11), (19), (20) следует, что

$$F^{(r)}(0)=E_r(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})=0, \quad 0\leqslant r<N. \tag{21}$$

Из условий теоремы 1 следует алгебраическая независимость функций $\mathrm{sn}_1(\theta_{3,1}^2 z)$, $\mathrm{sn}_2(\theta_{3,2}^2 z)$, поэтому $F(z)\not\equiv 0$.

Оценим коэффициенты $C_{k_1,k_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})$. Из (14), (16) получим, что

$$D_{N,k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4) \ll N!\,C_3^N(x_1+x_2+x_3+x_4)^{N+2k_1+2k_2}. \tag{22}$$

Из (19), (22) следует, что

$$C_{k_1,k_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2}) \ll N!\,C_4^N(\varkappa_1+\varkappa_2+\theta_{3,1}+\theta_{3,2})^{N-s+2k_1+2k_2}. \tag{23}$$

Лемма доказана. □

Пусть T — наименьшее целое, для которого $F^{(T)}(0) \neq 0$. Тогда $T \geqslant N$.

Лемма 4. *Существует такой многочлен* $R_T \in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3,x_4]$, *что*

$$F^{(T)}(0) = R_T(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2}), \tag{24}$$

$$\deg R_T(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2}) \leqslant 5T, \quad \ln|R_T(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})| \leqslant C_5 T\ln T, \tag{25}$$

$$0 < |R_T(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})| < \exp(-C_6T\sqrt{T}). \tag{26}$$

Доказательство. Из (6), (11), (21) и определения T следует, что

$$F^{(T)}(0) = \sum_{k_1,k_2=0}^{K} C_{k_1,k_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})B_{T,k_1,k_2}(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2}). \tag{27}$$

Положим

$$R_T(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum_{k_1,k_2=0}^{K} C_{k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)B_{T,k_1,k_2}(x_1,x_2,x_3,x_4). \tag{28}$$

Из (7), леммы 3 и выбора K следуют оценки (25). Из определения T следует, что $|R_T(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})| > 0$.

Рассмотрим функцию

$$G(z) = F(z)\theta_4^K\left(\frac{z}{\pi},\tau_1\right)\theta_4^K\left(\frac{z}{\pi},\tau_2\right). \tag{29}$$

Из (2), (12), (29) и свойств $\theta_4(z,\tau)$ следует, что $G(z)$ — целая периодическая функция с периодом 2π с нулями в точках $2\pi n$. Из выбора числа T следует, что порядок нулей равен T, поэтому целой будет и функция

$$H(z) = \frac{G(z)}{\prod\limits_{|n|\leqslant M}(z-2\pi n)^T}, \tag{30}$$

где $M = [C_7\sqrt{T}]$. Тогда

$$|H(0)| \leqslant \max_{|z|=4\pi M}|H(z)|. \tag{31}$$

Из (3), (13), (23), (29) и выбора чисел T, N для $|z| \leqslant 4\pi M$ следует, что

$$|G(z)| \leqslant \exp(C_8T\sqrt{T}). \tag{32}$$

Для $|z| = 4\pi M$ имеем

$$\prod_{|n|\leqslant M}(z-2\pi n)^T \geqslant (M!)^{2T}(2\pi)^{2MT}. \tag{33}$$

Из (12), (29), (30) и выбора T следует, что

$$|F^{(T)}(0)| = T!\,(M!)^{2T}\pi^{2MT}\bigl(\theta_4(0,\tau_1)\theta_4(0,\tau_2)\bigr)^{-K}H(0). \tag{34}$$

Из (30)—(34) выводим, что

$$|F^{(T)}(0)| < \exp(-C_9T\sqrt{T}). \tag{35}$$

Из (24) и (35) следует, что

$$|R_T(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})| < \exp(-C_{10}T\sqrt{T}). \tag{36}$$

Лемма доказана. □

Предположим, что теорема 1 не выполняется и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\theta_{3,1}$, $\theta_{3,2}$ — алгебраические числа. Тогда из (27) следует, что $F^{(T)}(0)$ — значение многочлена с алгебраическими коэффициентами в алгебраической точке $(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})$. Используя теорему Лиувилля [4], получим оценку

$$|R_T(\varkappa_1,\varkappa_2,\theta_{3,1},\theta_{3,2})| > \exp(-C_{11}T\ln T). \tag{37}$$

Противоречивость оценок (36) и (37) завершает доказательство теоремы 1.

Литература

[1] Нестеренко Ю. В. Об арифметических свойствах значений тета-констант // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 6. — С. 95—122.

[2] Уиттекер Э. Е., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2. — М.: Физматгиз, 1963.

[3] Холявка Я. М. О мере алгебраической независимости значений эллиптических функций Якоби // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 6. — С. 209—219.

[4] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.

[5] Fel'dman N. I., Nesterenko Yu. V. Transcendental Numbers. — Berlin: Springer, 1998.

[6] Masser D. Elliptic Functions and Transcendence. — Berlin: Springer, 1975. — (Lect. Notes Math.; Vol. 437).

[7] Waldschmidt M. Elliptic functions and transcendence. — `http://www.math.jussieu.fr/~miw/`.