Рекуррентные соотношения для некоторых определителей

В. Г. ЧИРСКИЙ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

УДК 511.4

Ключевые слова: приближения Эрмита—Паде, рекуррентные равенства для определителей.

Аннотация

В заметке установлены рекуррентные соотношения для некоторых определителей, связанных, например, с аппроксимациями Эрмита—Паде второго рода для некоторых обобщённых гипергеометрических функций.

Abstract

V. G. Chirskii, Recurrent relations for certain determinants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 173—175.

The note presents recurrent relations for certain determinants, e.g., connected with Hermite–Padé approximations of the second kind, for certain generalized hypergeometric functions.

В некоторых методах теории чисел, например в методе Зигеля—Шидловского [1, 3] и его модификациях, рассматриваются определители вида

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} P_{N,1} & P_{N,2} & \dots & P_{N,m} \\ P_{N+1,1} & P_{N+1,2} & \dots & P_{N+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{N+m-1,1} & P_{N+m-1,2} & \dots & P_{N+m-1,m} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где $P_{N+s,i}$, $s = 1, \dots, m-1$, $i = 1, \dots, m$, — некоторые многочлены от z.

Пусть Δ_0 — определитель единичной матрицы, и пусть для заданной последовательности α_N^* (где α_N^* — числа или многочлены от z), имеют место равенства

$$P_{N+m,i} = P_{N+1,i} + \alpha_N^* \times P_{N,i}, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Уравнениям подобного типа удовлетворяют многочлены, дающие аппроксимации Эрмита—Паде второго рода для некоторых обобщённых гипергеометрических функций [2].

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 173—175.

Обозначим через $\Delta_N(l_1,\dots,l_k)$ определитель, полученный из определителя (1) заменой его строк с номерами $l_1,\dots,l_k$ соответственно строками

$$(b_{1,1}\, b_{1,2}\dots b_{1,m}),\dots,\ (b_{k,1}\, b_{k,2}\dots b_{k,m}), \tag{3}$$

состоящими из не зависящих от N величин.

Цель заметки — найти систему рекуррентных уравнений, выражающих определители вида $\Delta_N(l_1,\dots,l_k)$ через определители вида $\Delta_{N-s}(1,t_2,\dots,t_k)$, у которых $s\geqslant 1$.

Предложение 1. *Пусть $l_1\ne 1$, $N\geqslant m$. Пусть для некоторого целого неотрицательного числа r выполняются равенства $l_{k-1}=k-1,\dots,\ l_{k-r}=k-r$. Тогда*

$$\begin{gathered}\Delta_N(l_1,\dots,l_k)=(-1)^{(m-1)(m-l_k)+(r+1)(k-r-1)}\cdot\alpha_N^*\cdot\alpha_{N-1}^*\cdots\alpha_{N-m+l_k+1}^*\times\\ \times\Delta_{N-m+l_k-r-1}(1,\dots,r+1,l_1+m-l_k+r+1,\dots,l_{k-r-1}+m-l_k+r+1).\end{gathered}\tag{4}$$

Доказательство. Если $l_k<m$, то из (2) следует равенство

$$\Delta_N(l_1,\dots,l_k)=(-1)^{m-1}\alpha_N^*\Delta_N(l_1+1,\dots,l_k+1). \tag{5}$$

Последовательно применяем равенство (5) $m-l_k$ раз, получаем

$$\begin{gathered}\Delta_N(l_1,\dots,l_k)=\\ =(-1)^{(m-1)(m-l_k)}\alpha_N^*\cdots\alpha_{N-m+l_k+1}^*\Delta_{N-m+l_k}(l_1+m-l_k,\dots,m).\end{gathered}\tag{6}$$

В последних $r+1$ строках определителя, стоящего в правой части равенства (6), находятся последние $r+1$ из набора векторов-строк (3). Переставим их вверх так, чтобы они стали первыми строками. В полученном в результате определителе переставим его строки из набора (3) так, чтобы эти строки шли в том же порядке, как в исходном наборе (3). Соответствующие вычисления труда не представляют. Равенство (4) и предложение 1 доказаны. □

Предложение 2. *Пусть число r определено так же, как в предложении 1. Если $l_k<m$, $N\geqslant m$, то*

$$\begin{gathered}\Delta_N(1,l_2,\dots,l_k)=\\ =(-1)^m\Delta_{N-1}(1,l_2+1,\dots,l_k+1)+(-1)^{(m-1)(m-l_k)}\alpha_N^*\cdots\alpha_{N-m+l_k+1}^*\times\\ \times\Delta_{N-m+l_k-r-1}(1,\dots,r+2,l_2+m-l_k+r+1,\dots,l_{r-r-1}+m-l_k+r+1).\end{gathered}\tag{7}$$

Если $l_k=m$, то

$$\begin{gathered}\Delta_N(1,l_2,\dots,l_k)=\\ =(-1)^{(m-1)(r+1)+(r+1)(k-r-1)}\Delta_{N-r-1}(1,\dots,r+2,l_2+r+1,\dots,l_{k-r-1}+r+1).\end{gathered}\tag{8}$$

Доказательство. Если $l_k < m$, то из равенства (2) получаем

$$\Delta_N(1, l_2, \ldots, l_k) = (-1)^m \Delta_{N-1}(1, l_2 + 1, \ldots, l_k + 1) + \\ + (-1)^{m-1} \alpha_N^* \Delta_{N-1}(2, l_2 + 1, \ldots, l_k + 1). \quad (9)$$

Ко второму из определителей, стоящих в правой части равенства (9), применяем предложение 1. Случай $l_k = m$ рассматривается так же, как и в предложении 1. Равенства (7) и (8), а с ними и предложение 2, доказаны. □

Предложения 1 и 2 можно использовать при исследовании вопроса о ранге некоторых совокупностей чисел. Случай $k = 1$ представляет особый интерес. Как следствие предложения 2 получаем следующее утверждение.

Предложение 3. *Для любого $N \geqslant 0$ имеет место равенство*

$$\Delta_{N+m}(1) = (-1)^m \Delta_{N+m-1}(1) + (-1)^{m-1} \alpha_{N+m}^* \cdots \alpha_{N+2}^* \Delta_N(1).$$

Числовые приложения полученных тождеств занимают значительно больше места и будут опубликованы отдельно.

Литература

[1] Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. — М.: ГИТТЛ, 1952.

[2] Нестеренко Ю. В. Приближения Эрмита—Паде обобщённых гипергеометрических функций // Мат. сб. — 1994. — Т. 185, № 10. — С. 39—72.

[3] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.